بررسی و شبیه سازی مسئله ورشکستگی قمارباز نامتقارن با n بازیکن

سید مقتدی هاشمی پرست، مهدی سبزواری
گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

در این مقاله به بررسی مسئله ورشکستگی قمارباز نامتقارن با n بازیکن در حالتی که سرمایه اولیه بازیکنان با هم مساوی و هر کدام برابر با d دلار است، $1 \leq d \leq n$، و نیز احتمال وقوع حالت تساوی در هر دور از بازی وجود دارد می پردازیم. در هر دور از این بازی یا یکی از بازیکنان به پیروزی می رسد و در این صورت از هر یک از $n - 1$ بازیکن دیگر نفری ۱ دلار و در مجموع $n - 1$ دلار دریافت میکند، یا در بازی حالت تساوی اتفاق می افتد و هیچ پولی در آن دور از بازی رد و بدل نمی شود. بازی تا جایی که سرمایه حداقل یکی از بازیکنان تمام شود ادامه پیدا می کند. ازجمله پارامترهایی که در این مقاله مورد بررسی قرار می گیرد، امید زمان ورشکستگی و احتمال ورشکستگی هر یک از بازیکنان می باشد. همچنین ثابت می کنیم که زمان ورشکستگی و اینکه کدام بازیکن ورشکست شود دو پیشامد مستقل اند. در پایان با شبیه سازی چند مسئله خاص، نتایج بدست آمده از امید زمان ورشکستگی را در عمل مورد بررسی قرار می دهیم. نتایج بدست آمده از شبیه سازی، صحت روابط بدست آمده را مورد تایید قرار می دهد.

واژه‌های کلیدی: مسئله ورشکستگی قمارباز با n بازیکن، بازی نامتقارن، زمان ورشکستگی، استقلال دو پیشامد.

۱ مقدمه

دو بازیکن را در نظر بگیرید که با سرمایه های اولیه i و $N - i$ دلار به بازی قمار مشغولند. بازی ها به صورت مستقل از یکدیگر بوده و قمارباز مورد نظر ما در هر دور از بازی با احتمال p برنده می شود و در آنصورت ۱ دلار از طرف مقابل خود می گیرد، یا با احتمال $q = 1 - p$ بازنده می شود و در آنصورت ۱ دلار به طرف مقابل می پردازد. بازی تا جایی ادامه پیدا می کند که یکی از بازیکنان به ورشکستگی برسد. در آنصورت بازیکن برنده با سرمایه N دلار و بازیکن بازنده با سرمایه ۰ دلار بازی را به پایان خواهند برد. سئوالی که

در اینجا مطرح است احتمال رسیدن سرمایه قمارباز به N دلار پس از پایان بازی است در صورتی که بازی را با سرمایه اولیه i دلار آغاز کند.

مسئله بالا که یکی از مسائل بسیار مهم و شناخته شده در فرایندهای تصادفی است به مسئله ورشکستگی قمارباز معروف است که در مراجع مختلف حالت های زیادی از آن بررسی شده است [۳]. از جمله تعمیم های این مسئله می توان به مسئله ورشکستگی قمارباز با n بازیکن اشاره کرد.

n بازیکن را در نظر بگیرید که سرمایه اولیه هر کدام بترتیب برابر با $c_1, c_2, \ldots, c_n$ دلار باشد. در هر دور از بازی، یکی از بازیکنان (مثلا بازیکن iام) به طور تصادفی و با احتمال p_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ برنده می شود که در آن $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. اگر $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$ باشد آنگاه بازی را متقارن[1] و در غیر اینصورت آنرا نامتقارن[2] گوییم. در هر دور از بازی، بازیکن برنده از هرکدام از $n - 1$ بازیکن بازنده نفری ۱ دلار (و در مجموع $n - 1$ دلار) دریافت می کند. بازی تا زمانی که سرمایه حداقل یکی از بازیکنان به اتمام برسد ادامه پیدا می کند. لازم به ذکر است که در این بازی ممکن است بیش از یک بازیکن ورشکست شود. از جمله پارامترهایی که در این بازی مایل به بررسی آنها می باشیم، امید زمان ورشکستگی و احتمال های ورشکستگی بازیکنان می باشد.

سندل[3] ضمن بررسی بازی متقارن با سه بازیکن، با به کار بردن قضیه توقف اختیاری[4] اثبات نموده است که در این بازی به ازای سرمایه های اولیه دلخواه c_1، c_2 و c_3 برای بازیکنان:

$$E(T) = \frac{c_1 c_2 c_3}{c_1 + c_2 + c_3 - 2}$$

که در آن T زمان ورشکستگی بازی می باشد [۷]. در این مقاله بازی مشابه در حالت نامتقارن مورد بررسی قرار نگرفته است. تا به حال، هیچ فرمولی برای محاسبه $E(T)$ برای بازی نامتقارن با سرمایه های اولیه دلخواه ارائه نگردیده است.

چانگ[5] و چو[6]، ضمن تعمیم مسئله فوق، بترتیب فرمولی برای محاسبه $E(T)$ به ازای $n = 4$ و $n \geq 3$ ارائه نموده اند [۱] و [۲]. اما فرمول ارائه شده در این مقالات به شکل یک

[1] Symmetric

[2] Asymmetric

[3] Sandell

[4] Optional Stopping Theorem

[5] Chang

[6] Cho

فرمول بسته ساده نمی باشد و برای محاسبه $E(T)$ نیاز به محاسبه احتمال های ورشکستگی در زمان های مختلف می باشد. اما در صورتی که سرمایه اولیه بازیکنان را مساوی با یکدیگر در نظر بگیریم، روش ارائه شده در این مقالات به یک فرم بسته تبدیل می گردد.

مسئله ورشکستگی قمارباز با n بازیکن در حالت نامتقارن برای اولین بار توسط روچا[7] و اشترن[8] بررسی گردید [۵]. در این مقاله نویسندگان حالتی را بررسی نموده اند که سرمایه اولیه بازیکنان با هم مساوی و برابر با d دلار، $0 \leq d \leq n+1$، باشد. در این مقاله ثابت شده است که به ازای $\alpha = n!p_1p_2\dots p_n$ و $\beta = \frac{(n+1)\alpha}{2}$:

۱. اگر $d=n$ باشد در اینصورت

$$P(T=t)=\begin{cases} \alpha^{k-1}(1-\alpha) & t=kn, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

۲. اگر $d=n+1$ باشد در اینصورت

$$P(T=t)=\begin{cases} \beta^{k-1}(1-\beta) & t=kn+1, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

۳. اگر $0 \leq d \leq n-1$ باشد در اینصورت

$$P(T=t)=\begin{cases} 1 & t=d, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

و نیز

$$E(T)=\begin{cases} \frac{n}{1-\alpha} & d=n, \\ 1+\frac{n}{1-\beta} & d=n+1, \\ d & 0 \leq d \leq n-1. \end{cases}$$

[7] Rocha

[8] Stern

روچا و اشترن نتایج بدست آمده از مقاله فوق الذکر را به حالتی که سرمایه اولیه بازیکنان با هم مساوی و برابر با $n+r$ دلار است نیز گسترش داده اند که در آن r عددی ثابت و کوچکتر یا مساوی n است [۶].

اخیرا تعمیمی از بازی طراحی شده در [۵] ارائه گردیده است که در آن احتمال وقوع حالت تساوی در هر دور از بازی وجود داشته باشد [۴]. در این مقاله مسئله در حالتی بررسی شده است که سرمایه اولیه بازیکنان با هم مساوی و هر کدام برابر با d دلار است، $۱ \leq d \leq n+۱$. در هر دور از بازی یا یکی از بازیکنان، مثلا بازیکن iام، $i=۱,۲,\ldots,n$، با احتمال p_i به پیروزی می رسد و در این صورت از هر یک از $n-۱$ بازیکن دیگر نفری ۱ دلار و در مجموع $n-۱$ دلار دریافت میکند، یا با احتمال r در بازی حالت تساوی اتفاق می افتد و هیچ پولی در آن دور از بازی رد و بدل نمی شود. احتمال های p_i و r به قسمی هستند که $\underbrace{p_۱+p_۲+\cdots+p_n}_{p}+r=۱$. بازی تا جایی که سرمایه حداقل یکی از بازیکنان تمام شود ادامه پیدا می کند. لذا در این مقاله ضمن بررسی مجدد این حالت، با شبیه سازی چند بازی خاص نتایج حاصل از [۴] را مورد بررسی قرار می دهیم. کلیه شبیه سازی ها با نرم افزار Maple 12 انجام شده اند و می توانند گواهی بر صحت نتایج بدست آمده و نیز مطابقت این نتایج با اتفاقات عملی باشد.

۲ شروع بازی با سرمایه اولیه d دلار برای هر بازیکن، $۱ \leq d < n$.

۲-۱ امید زمان ورشکستگی

واضح است که قبل از دور dام ورشکستگی رخ نمی دهد. از آنجا که سرمایه اولیه هر یک از بازیکنان کمتر از n دلار است، بنابراین اگر d بازی بدون تساوی انجام پذیرد، دراینصورت حداقل یک بازیکن وجود خواهد داشت که کل سرمایه اش را از دست می دهد. لذا برای اینکه ورشکستگی در دور tام، $t \geq d$، اتفاق بیفتد می بایست در $t-۱$ دور اول $t-d$ تساوی اتفاق افتد و در d دور باقی مانده حالت تساوی رخ ندهد. بنابر این اگر T زمان ورشکستگی باشد دراینصورت

$$P(T=t)=\binom{t-۱}{t-d}r^{t-d}(۱-r)^d, \quad t=d,d+۱,d+۲,\ldots$$

قضیه ۱ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان d دلار، $۱ \leq d < n$،

$$E(T) = \sum_{t=d}^{\infty} t \binom{t-۱}{t-d} r^{t-d} (۱-r)^d = \frac{d}{p} \qquad (۱)$$

۲-۲ احتمال ورشکستگی هریک از بازیکنان

فرض کنید E_i پیشامد ورشکستگی بازیکن iام باشد. لذا برای اینکه E_i در دور tام، $t \geq d$، اتفاق بیفتد می بایست در $t-۱$ دور اول $t-d$ تساوی اتفاق افتد و در d دور باقی مانده بازیکن iام پیروز نشود. بنابراین

$$P(E_i \cap \{T=t\}) = \binom{t-۱}{t-d} r^{t-d} (p-p_i)^d, \quad t = d, d+۱, d+۲, \ldots$$

بنابراین

$$P(E_i) = \sum_{t=d}^{\infty} P(E_i \cap \{T=t\}) = \sum_{t=d}^{\infty} \binom{t-۱}{t-d} r^{t-d} (p-p_i)^d = \frac{(p-p_i)^d}{p^d}$$

به طریق مشابه قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان d دلار، $۱ \leq d < n$، اگر $۱ \leq m \leq n$ و $i_۱, i_۲, \ldots, i_m \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $i_۱ \neq i_۲ \neq \ldots \neq i_m$ در اینصورت

$$P(E_{i_۱} \cap E_{i_۲} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = \frac{(p - p_{i_۱} - p_{i_۲} - \cdots - p_{i_m})^d}{p^d}$$

به عنوان آخرین نکته ای که از این بخش می توان بیان نمود، با توجه به ساختار فرمول احتمال زمان ورشکستگی و همچنین احتمال ورشکستگی بازیکن iام، واضح است که:

$$P(E_i \cap \{T=t\}) = P(E_i) P(T=t)$$

لذا در حالت کلی تر قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان d دلار، $۱ \leq d < n$، این که کدام بازیکن یا بازیکنان ورشکست گردند، پیشامدی مستقل از زمان ورشکستگی می باشد.

۳ شروع بازی با سرمایه اولیه n دلار برای هر بازیکن

۳-۱ امید زمان ورشکستگی

واضح است که در این حالت قبل از دور nام ورشکستگی رخ نمی دهد، بنابراین $T \geq n$. به راحتی می توان نشان داد که اگر حالت مساوی در بازی وجود نداشته باشد، در اینصورت ورشکستگی فقط در زمان های $T = kn$، $k = ۱, ۲, \ldots$، می تواند رخ دهد [۵]. لذا در حالتی که مساوی در بازی وجود دارد، اگر ورشکستگی در زمان $T = kn$ اتفاق افتد، در اینصورت دقیقا ۰ یا n یا $۲n$ یا. . . یا $(k-۱)n$ تساوی در $kn-۱$ دور اول اتفاق افتاده است. لذا در گام اول به محاسبه احتمال ورشکستگی در زمان های $T = kn$، $k = ۱, ۲, \ldots$، می پردازیم.

اگر $T > n$ در این صورت یکی از حالت های زیر اتفاق افتاده است:

- در n دور اول حداقل یک تساوی اتفاق افتاده است. این پیشامد با احتمال زیر رخ می دهد:

$$P(\text{حداقل یک مساوی در } n \text{ دور}) = ۱ - P(\text{صفر مساوی در } n \text{ دور}) = ۱ - p^n$$

- در n دور اول هر بازیکن دقیقا ۱ برد داشته است. احتمال وقوع این پیشامد برابر است با

$$P(\text{یک برد برای هر بازیکن در } n \text{ دور}) = n! p_۱ p_۲ \ldots p_n$$

بنابراین

$$P(T > n) = n! p_۱ p_۲ \ldots p_n + ۱ - p^n = \alpha + ۱ - p^n$$

که در آن $\alpha = n! p_۱ p_۲ \ldots p_n$. از آنجا که ورشکستگی تا قبل از دور nام نمی تواند اتفاق افتد بنابراین

$$P(T = n) = ۱ - P(T > n) = p^n - \alpha$$

حال به بررسی احتمال این پیشامد می پردازیم که ورشکستگی در زمان $T = ۲n$ رخ دهد. همان گونه که قبلا بیان کردیم در این حالت دقیقا ۰ یا n مساوی در $۲n - ۱$ دور اول اتفاق افتاده است. بنابر این یکی از حالات زیر را داریم:

- هیچ حالت مساوی در بازی اتفاق نیفتاده است. در n دور اول هر بازیکن دقیقا ۱ بار به پیروزی رسیده و در n دور پایانی بازی به ورشکستگی رسیده است. این پیشامد با احتمال $\alpha(p^n - \alpha)$ اتفاق میفتد.

- در $2n - 1$ دور اول دقیقا n حالت مساوی اتفاق افتاده است و در n دور باقیمانده بازی به ورشکستگی رسیده است. احتمال این پیشامد برابر با $\binom{2n-1}{n} r^n (p^n - \alpha)$ می باشد.

بنابراین داریم:

$$P(T = 2n) = \alpha(p^n - \alpha) + \binom{2n-1}{n} r^n (p^n - \alpha)$$

مشابه حالت بالا، برای ورشکست شدن در زمان $T = kn$ به رابطه زیر می رسیم:

$$P(T = kn) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{kn-1}{in} r^{in} \alpha^{k-i-1} (p^n - \alpha)$$

اگر کمی کلی تر به این مسئله بپردازیم خواهیم دید که اگر ورشکستگی در زمان $T = kn + l$، $k = 1, 2, \ldots$ و $l = 0, 1, \ldots n - 1$، رخ دهد در اینصورت در $kn + l - 1$ دور اول بازی دقیقا l یا $n + l$ یا $2n + l$ یا... یا $(k-1)n + l$ مساوی اتفاق افتاده است. لذا در حالتی مشابه بالا داریم:

$$\begin{aligned} P(T = kn + l) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{kn + l - 1}{in + l} r^{in+l} \alpha^{k-i-1} (p^n - \alpha), \quad k &= 1, 2, \ldots \\ l &= 0, 1, \ldots, n - 1 \end{aligned}$$

قضیه ۱ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان n دلار،

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} (kn + l) \binom{kn + l - 1}{in + l} r^{in+l} \alpha^{k-i-1} (p^n - \alpha) = \frac{np^{n-1}}{p^n - \alpha} \quad (2)$$

۲-۳ احتمال ورشکستگی هریک از بازیکنان

جهت محاسبه احتمال ورشکستگی بازیکن iام در این حالت، باید روشی مشابه آنچه در بخش بالا بیان نمودیم را دنبال کنیم. برای اینکه بازیکن iام در زمان $T = n$ ورشکست شود

کافیست در این n دور هیچ مساوی رخ ندهد و این بازیکن صاحب هیچ پیروزی نگردد. بنابراین

$$P(E_i \cap \{T = n\}) = (p - p_i)^n$$

به همین ترتیب اگر بازیکن iام در زمان $T = ۲n$ ورشکست شود آنگاه یکی از حالات زیر اتفاق افتاده است:

- هیچ حالت مساوی در بازی اتفاق نیفتاده است. در n دور اول هر بازیکن دقیقا ۱ بار به پیروزی رسیده و در n دور پایانی بازیکن iام هیچ پیروزی به دست نیاورده است. این پیشامد با احتمال $\alpha(p - p_i)^n$ اتفاق میفتد.
- در $۲n - ۱$ دور اول دقیقا n حالت مساوی صورت گرفته است و در n دور باقیمانده بازیکن iام به هیچ پیروزی نرسیده است. احتمال این پیشامد برابر با $\binom{۲n-۱}{n} r^n (p - p_i)^n$ می باشد.

لذا خواهیم داشت:

$$P(E_i \cap \{T = ۲n\}) = \alpha(p - p_i)^n + \binom{۲n - ۱}{n} r^n (p - p_i)^n$$

اگر روندی که در بخش قبل طی شد را یک بار دیگر دنبال کنیم، برای اینکه بازیکن iام در زمان $T = kn + l$ ورشکست شود به فرمول زیر می رسیم:

$$P(E_i \cap \{T = kn + l\}) = \sum_{j=۰}^{k-۱} \binom{kn + l - ۱}{jn + l} r^{jn+l} \alpha^{k-j-۱} (p - p_i)^n$$

و لذا داریم:

$$\begin{aligned} P(E_i) &= \sum_{k=۱}^{\infty} \sum_{l=۰}^{n-۱} P(E_i \cap \{T = kn + l\}) \\ &= \sum_{k=۱}^{\infty} \sum_{l=۰}^{n-۱} \sum_{j=۰}^{k-۱} \binom{kn + l - ۱}{jn + l} r^{jn+l} \alpha^{k-j-۱} (p - p_i)^n = \frac{(p - p_i)^n}{p^n - \alpha} \end{aligned}$$

قضیه ۲ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان n دلار، اگر $۱ \le m \le n$ و $i_۱, i_۲, \ldots, i_m \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $i_۱ \neq i_۲ \neq \ldots \neq i_m$ در اینصورت

$$P(E_{i_۱} \cap E_{i_۲} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = \frac{(p - p_{i_۱} - p_{i_۲} - \cdots - p_{i_m})^n}{p^n - \alpha}$$

در این بخش نیز همانند بخش قبل، قضیه زیر را در مورد استقلال پیشامدها داریم:

قضیه ۳ در بازی نامتقارن n بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان n دلار، این که کدام بازیکن یا بازیکنان ورشکست گردند، پیشامدی مستقل از زمان ورشکستگی می باشد.

۴ شبیه سازی بازی

در این بخش سه بازی متمایز از مسئله ورشکستگی قمارباز را مطابق زیر در نظر می گیریم:

i) ۵ بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان ۴ دلار به بازی قمار مشغولند. احتمال برد بازیکنان و همچنین احتمال وقوع حالت تساوی در بازی بصورت زیر تعریف شده اند:

$$r = \frac{۱}{۶}; \quad p_۱ = p_۲ = \frac{۱}{۶}; \quad p_۳ = p_۴ = \frac{۱}{۸}; \quad p_۵ = \frac{۱}{۴}$$

با توجه به رابطه (۱) در این مسئله، $E(T) = \frac{d}{p} = \frac{۴}{\frac{۵}{۶}} = ۴/۸$.

ii) ۵ بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان ۵ دلار به بازی قمار مشغولند. احتمال برد بازیکنان و همچنین احتمال وقوع حالت تساوی در بازی همانند (i) تعریف شده اند. با توجه به رابطه (۲) در این مسئله، $E(T) = \frac{np^{n-۱}}{p^n-\alpha} = ۶/۲۰۰۹۱$.

iii) ۶ بازیکن با سرمایه های اولیه یکسان ۶ دلار قماربازی می کنند. احتمال مساوی در این بازی وجود ندارد ($r = ۰$) و شانس برد بازیکنان با هم مساوی و برابر با $p_i = \frac{۱}{۶}$ می باشد. با توجه به رابطه (۲) در این مسئله، $E(T) = \frac{np^{n-۱}}{p^n-\alpha} = ۶/۰۹۴۰۴$.

بازی طراحی شده در (i) مربوط به بخش دوم و دو بازی دیگر مربوط به بخش سوم می باشند. بازی طراحی شده در (iii) یک بازی متقارن است که حالت خاصی از مسئله مطرح شده در بخش سوم می باشد.

این سه بازی را با نرم افزار Maple 12 شبیه سازی نموده و هر کدام را N بار اجرا می کنیم. جدول ۱ نتایج بدست آمده از میانگین زمان ورشکستگی به ازای Nهای مختلف در این شبیه سازی ها را نشان می دهد.

N	(i)	(ii)	(iii)
۱۰	۴/۳۰۰۰۰	۵/۳۰۰۰۰	۶
۵۰	۴/۵۵۰۰۰	۵/۸۶۰۰۰	۶/۱۲۰۰۰
۱۰۰	۴/۶۹۰۰۰	۵/۹۶۰۰۰	۶/۱۲۰۰۰
۵۰۰	۴/۷۴۴۰۰	۶/۱۰۸۰۰	۶/۱۴۴۰۰
۱۰۰۰	۴/۷۹۵۰۰	۶/۱۳۶۰۰	۶/۱۰۸۰۰
۵۰۰۰	۴/۷۹۶۰۰	۶/۱۸۵۸۰	۶/۱۰۵۶۰
۱۰۰۰	۴/۷۹۱۸۰	۶/۱۶۹۸۰	۶/۰۹۶۰۰
۱۰۰۰	۴/۷۹۴۴۷	۶/۱۹۴۱۴	۶/۰۹۳۲۴
۱۰۰۰۰	۴/۷۹۹۱۱	۶/۲۰۱۸۹	۶/۰۹۴۱۵

جدول ۱. میانگین زمان ورشکستگی بازی های شبیه سازی شده

همان گونه که از جدول بالا قابل مشاهده است، نتایج بدست آمده از شبیه سازی، علی الخصوص به ازای Nهای بزرگ، با نتایج بدست آمده در روابط (۱) و (۲) کاملا مطابقت دارد که این امر خود میتواند گواهی بر درستی این روابط باشد.

مراجع

[1] D.K. Chang, *A game with four players*, Sta. Pro. Lett. 23 (1995) 111-115.

[2] D.H. Cho, *A game with n players*, J. Korean Sta. Soc. 25 (1996) 185-196.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and it's applications*, Vol. 1, 3rd edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968.

[4] S.M. Hashemiparast, M. Sabzevari, *The asymmetric n-player gambler's ruin problem with ties allowed*, Submited.

[5] A.L. Rocha, F. Stern, *The gambler's ruin problem with n players and asymmetric play*, Sta. Pro. Lett. 44 (1999) 87-95.

[6] **A.L. Rocha, F. Stern,** ***The asymmetric n-player gambler's ruin problem with equal initial fortunes*****, Adv. Appl. Math. 33 (2004) 512-530.**

[7] **D. Sandell,** ***A game with three players*****, Sta. Pro. Lett. 7 (1989) 61-63.**