ز و نا ار تحت تا ز ان لا نکس

منصور قابابا ی جز [۱] احمد پارسا ان[۲]

[۱] گروه ر ا و مار موسسه موزش عال ش خ بها

[۲] دانشکده علوم ر ا دانشگاه صنعت اصفهان

چکیده فرض می‌کن م در و عت بعت θ تصم م δ گرفته شود و خ ای $\Delta \equiv \Delta(\delta, \theta)$ پد د د سا اری از موزه‌های مار کلاس ک ه و ژه در راورد توا پارامتری ر پا ه‌ی تا ز ان متقارن مر خ ا ه فرم کلی $L(\Delta) = \Delta^{2}$ ارا ه می‌شود که ه لحا : ری اعث سادگی سا اری از محاسبات ر ا ی در حصول راوردگرها می‌گردد اما ه لحا کار ردی که معمولا ز انهای حاصل از خ ای ش راورد $\Delta >$ و خ ای کم راورد $\Delta <$ اهم ت کسانی ندارند مناس نست از ا ن رو علاقمندی ه استفاده از توا ز ان نامتقارن همچون تا ز ان لا نکس ه فرم کلی $L(\Delta) = b\{e^{a\Delta} - a\Delta - \}$ در سالهای اخ ر افزا ش افته است

ا ن مقاله ه رسی مفاه م نا ار بی عام و قاعده‌ی ز تحت تا ز ان لا نکس پرداخته و ارتبا ا ن مفاه م را مورد توجه قرار می‌دهد در ا تدا ه معرفی تا ز ان لا نکس پرداخته و ه و ژگ های ساختاری ن اشاره می‌شود و سپس نشان می‌ده م که ا ن تا ز ان ر پا ه‌ی خ ای ساده $\Delta = \delta - \theta$ و خ ای لگار تمی $\Delta = \ln[\frac{\delta}{\theta}]$ شر را و لمکول را راورده می‌سازد در حالی که ر پا ه‌ی خ ای نسبی $\Delta = \frac{\delta - \theta}{\theta}$ ا ن شر راورده نمی‌شود

واژه‌ها کل د راوردگرهای نا ار و ز توا خ ا و ز ان

مقدمه

فرض می‌کن م $\{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ ک خانواده از توز عها در ف ای اندازه‌پذ ر[۱] $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ است اگر ر اساس مشاهده‌ی $X \in \mathcal{X}$ راوردگر $\delta(X)$ رای راورد تا پارامتری $\gamma : \Theta \longrightarrow \Re$ کار رود نگاه ز ان ا ن تصم م را ا نماد تا $L(\delta(X), \gamma(\theta))$ ا $W(\delta(X), \gamma(\theta))$ نشان می‌ده م در مورد تا ز ان $L(., .)$ فرض می‌کن م که

الف $L(., .) \geq$

$L(\delta, \delta) =$

ج $L(., .)$ نسبت ه هر دو مولفه‌ی خود پ وسته است

1) Measurable Space

د   رای هر $r \in \Re$ ثا ت مجموعه‌ی $\{\delta|\ L(\delta, r) = \quad \}$ کراندار است

همچ ن تا   خ ای راورد $\gamma(\theta)$ ه وس له‌ی $\delta(X)$ را ا نماد $\Delta(\delta(X), \gamma(\theta))$ نشان می‌ده م
سه فرم معروف تا   خ ای راورد عبارتند از

الف خ ای ساده راورد $\qquad \Delta(\delta(X), \gamma(\theta)) = \delta(X) - \gamma(\theta)$

خ ای لگار تمی راورد $\qquad \Delta = \ln[\frac{\delta(X)}{\gamma(\theta)}]$

ج خ ای نسبی راورد $\qquad \Delta = \frac{\delta(X)}{\gamma(\theta)} -$

در استنبا   ماری معمولا ز ان ک تصم م تا عی از خ ای ن تصم م تعر ف می‌شود   در ا ن مقاله جهت اختصار قرار می‌ده م

$$\gamma_\theta \equiv \gamma(\theta)\ ,\ \delta_X \equiv \delta(X)\ \ ,\ \Delta \equiv \Delta(\delta_X, \gamma_\theta)\ \ ,\ L(\Delta) \equiv L(\Delta(\delta_X, \gamma_\theta))$$

لهمن در سال   را ب ن د تعر ف ناار بی عام [2] را ه صورت ز ر ارا ه داد

تعر ف ۱ ۱   ا فرض دراختا رداشتن تا   ز ان $W(.,.)$ ماره‌ی δ_X ک راوردگر W نااِر تا   پارامتری γ_θ است اگر و تنها اگر

$$E_\theta[W(\delta_X, \gamma_\theta)] \leq E_\theta[W(\delta_X, \gamma_{\theta'})] \qquad ;\ \forall \theta', \theta \in \Theta$$

که در صورت وجود δ_X تا   پارامتری γ_θ را W راوردپذ ر گفته می‌شود   همچ ن اگر ماره‌ی δ_X در شر   فوق صدق نکند ه ن ک راوردگر W ار γ_θ گفته می‌شود
 ررسی نااِر بی ک راوردگر از روی تعر ف عام نااِر بی سه ار دشوار است   کلبانف در سال   ا ارا ه لم ز ر ا ن ررسی را تحت رخی توا   ز ان سانتر نمود

لم ۱   فرض می‌کن م تا $W(.,.)$ ور پ وسته مشتق‌پذ ر و ه ازای هر مقدار ثا ت رای مولفه‌ی اول محد   است   وری که $W(\delta, \delta) =$ اگر δ_X ک ماره‌ی دلخواه رای راورد تا   پارامتری γ_θ ه گونه‌ای اشد که رای ک مقدار $\epsilon >$ در شر   ز ر صدق کند

$$E_\theta\left[\sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon}\{\frac{\partial^۲}{\partial \gamma_\theta^۲} W(\delta_X, \gamma_\theta + c)\}\right] < \infty \qquad ;\ \forall \theta \in \Theta \qquad (\ )$$

نگاه δ_X ک راوردگر W نااِر   تا   پارامتری γ_θ است اگر و تنها اگر در تساوی ز ر صدق کند

$$E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial \gamma_\theta} W(\delta_X, \gamma_\theta)\right] = \qquad ;\ \forall \theta \in \Theta \qquad (\ )$$

2) General Unbiasedness

اثبات در

معمولا مارههای که در شر   صدق نمی‌کنند تحت تا   ز ان W دارای مخا ره ی‌نها ت هستند ازا ن رو اغلا   در چارچو   کلاس مارههای که در شر   صدق می‌کنند ه اثبات ق ا ا پرداخنه می‌شود که در ا ن صورت تحت شرا   لم W نااریبی δ_X معادل راورده ساختن شر   توسد   مارهی δ_X است

مثال ۱ ۳ در راورد تا   پارامتری γ_θ توسد   راوردگر δ_X تا   ز ان نامتقارن لا نکس تحت خ ای ساده را ه فرم ز ر در نظر می‌گ ر م

$$L(\delta_X, \gamma_\theta) = b\left\{e^{a(\delta_X - \gamma_\theta)} - a(\delta_X - \gamma_\theta) - \quad \right\}$$

می‌خواه م ا توجه ه لم   ک تعر ف معادل رای نااریبی عام تحت ا ن تا   ز ان ه دست ور م که از ر ق ن ه سادگی بتوان م لا نکس نااریب ودن راوردگر δ_X را ررسی نما م   د ن منظور ا تدا شرا   لم   را رای ا ن تا   ز ان ررسی می‌کن م

- ه سادگی می‌توان ثا ت کرد که تا   ز ان لا نکس ه   ور پ وسته دو ار مشتق‌پذ ر و ه ازای هر مقدار ثا ت رای مولفه‌ی اول محد   است
- $L(\delta, \delta) = b\left\{e^{a(\delta-\delta)} - a(\delta - \delta) - \quad \right\} = \quad$

حال اگر راوردگر δ_X ه گونه‌ای اشد که رای ک مقدار $\epsilon >$ در شر   صدق کند   عنی رای هر $\theta \in \Theta$ داشته اش م

$$\begin{aligned}
E_\theta\left[\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{\frac{\partial^۲}{\partial\gamma_\theta^۲}L(\delta_X, \gamma_\theta + c)\right\}\right] &= E_\theta\left[\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{ba^۲e^{a(\delta_X-\gamma_\theta-c)}\right\}\right] \\
&= ba^۲E_\theta\left[e^{a(\delta_X-\gamma_\theta)}\right]\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\{e^{-ac}\} \\
&= ba^۲E_\theta\left[e^{a(\delta_X-\gamma_\theta)}\right]\max\{e^{a\epsilon}, e^{-a\epsilon}\} < \infty
\end{aligned}$$

ا ه   ور معادل $E_\theta[e^{a(\delta_X-\gamma_\theta)}] < \infty \quad ; \forall\theta \in \Theta$

نگاه راوردگر δ_X ک راوردگر لا نکس نااریب γ_θ است اگر و تنها اگر

$$E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\gamma_\theta}L(\delta_X, \gamma_\theta)\right] = \quad \Longleftrightarrow \quad E_\theta[e^{a\delta_X}] = e^{a\gamma_\theta} \quad ; \forall\theta \in \Theta$$

نت جه ۱   تحت کلاس راوردگرهای ز ر

$$\mathcal{C} = \left\{\ \delta_X \mid E_\theta[e^{a(\delta_X-\gamma_\theta)}] < \infty \quad ; \forall\theta \in \Theta\right\}$$

δ_X ک راوردگر لا نکس ناار γ_θ است اگر و تنها اگر در تساوی ز ر صدق کند

$$\gamma_\theta = \frac{}{a}\ln E_\theta[e^{a\delta_X}] \quad ; \forall\theta\in\Theta \qquad (\;)$$

که در صورت وجود تا پارامتری γ_θ لا نکس راوردپذ ر و تا مخا رەی لا نکس ن کراندار است

$$\begin{aligned} R(\delta_X,\gamma_\theta) &= E_\theta[L(\delta_X,\gamma_\theta)] \\ &= -abE_\theta[\delta_X-\gamma_\theta] < \infty \quad ; \forall\theta\in\Theta \end{aligned}$$

مثال ۱ در راورد تا پارامتری γ_θ توسـ راوردگر δ_X تا ز ان لا نکس را تحت خ ای لگار تمی ه فرم ز ر در ن ر می‌گ ر م

$$L(\delta_X,\gamma_\theta) = b\left\{\left(\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}\right)^a - a\ln\left[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}\right] - \right\}$$

می‌خواه م ا توجه ه لم ک تعر ف معادل رای ناار بی عام تحت ا ن تا ز ان دست ور م که از ر ق ن سادگی بتوان م L ناار ودن راوردگر δ_X را ررسی نما م د ن منـ ور ا تدا شرا لم را در را ه ا ان تا ز ان ررسی می‌کن م

- سادگی می‌توان ثا ت کرد که تا ز ان لا نکس تحت خ ای لگار تمی ور پ وسته دو ار مشتق‌پذ ر و ه شر $- \leq a$ ه ازای هر مقدار ثا ت رای مولفەی اول محد است
- $L(\delta,\delta) = b\left\{\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^a - a\ln\left[\frac{delta}{\delta}\right] - \right\} =$

حال اگر راوردگر δ_X ه گونه‌ای اشد که رای ک مقدار $\epsilon >$ در شر صدق کند عنی

$$\begin{aligned} &E_\theta\left[\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{\frac{\partial^۲}{\partial\gamma_\theta^۲}L(\delta_X,\gamma_\theta+c)\right\}\right] = \\ &= bE_\theta\left[\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{\frac{a(a+\;)\delta_X^a}{(\gamma_\theta+c)^{a+۲}} - \frac{a}{(\gamma_\theta+c)^۲}\right\}\right] < \infty \quad ; \forall\theta\in\Theta \end{aligned}$$

ا ه عبارت د گر

$$E_\theta\left[\delta_X^a\right]\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{\frac{a(a+\;)}{(\gamma_\theta+c)^{a+۲}}\right\} < \infty \quad ; \forall\theta\in\Theta$$

و

$$\sup_{-\epsilon\leq c\leq\epsilon}\left\{\frac{-a}{(\gamma_\theta+c)^{۲}}\right\}<\infty \quad ; \forall\theta\in\Theta$$

نگاه راوردگر δ_X ک راوردگر L نااری γ_θ است اگر و تنها اگر

$$E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\gamma_\theta}L(\delta_X,\gamma_\theta)\right]= \quad \Longleftrightarrow \quad E_\theta[\delta_X^a]=\gamma_\theta^a \quad ;\forall\theta\in\Theta$$

اگر در تا زیان L قرار دهیم $a=-b=-$ نگاه تا زیان نتروپی نوع اول را دست می‌ورم این تا زیان در شرا لم صدق می‌کند پس δ_X راوردگر نتروپی نااری γ_θ است اگر در شر زیر صدق کند

$$E_\theta\left[\frac{}{\delta_X}\right]=\frac{}{\gamma_\theta} \quad ; \forall\theta\in\Theta$$

اگر در تا زیان L قرار دهیم $a=b=$ نگاه تا زیان نتروپی نوع دوم را دست می‌ورم این تا زیان در شرا لم صدق نمی‌کند

همچنین کلبانف در این ارتبا شرا وجود توا پارامتری راوردپذیر را در لم زیر رشمرد

لم ۱ فرض می‌کنیم W تابعی نامنفی و محدب نسبت به مولفه‌ی دوم است وری که $W(\delta,\delta)=$ اگر مارهی δ_X به گونه‌ای اشد که در شر زیر صدق کند

$$\inf_{r\in\Re}E_\theta[W(\delta_X,r)]<\infty \quad ; \forall\theta\in\Theta \qquad (\ )$$

نگاه تا پارامتری γ_θ وجود دارد به وری که δ_X راوردگر W نااری ن است

اثبات در

کلبانف در سال با ان فر ات در مورد توا زیان L و W تعریف راورده شدن شر راو لکول[۳] توس جفت توا (L,W) را به صورت زیر ارائه نمود

تعریف ۱ فرض می‌کنیم $T\equiv T(X)$ مارهی سنده برای خانواده‌ی توزیعهای $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ در فضای اندازه‌پذیر $(\mathcal{X},\mathcal{U})$ است اگر به ازای هر راوردگر W نااری δ_X برای تا پارامتری γ_θ ک راوردگر W نااری $\delta_T^*\equiv\delta^*(T)$ بر پایه‌ی مارهی سنده‌ی T برای γ_θ وجود داشته اشد به گونه‌ای که در شر زیر صدق کند

$$E_\theta[L(\delta_T^*,\gamma_\theta)]\leq E_\theta[L(\delta_X,\gamma_\theta)] \quad ; \forall\theta\in\Theta \qquad (\ )$$

نگاه می‌گوییم شر راو لکول توس جفت (L,W) راورده می‌شود بررسی راورده شدن شر راو لکول توس ک جفت از توا زیان از رق تعریف ن سار مشکل است

3) Rao-Blackwell's Condition

در ا ن مقاله در محدوده‌ی کلاس راوردگرها ی که در شرو و صدق می‌کنند ه ررسی راورده شدن شر را و لمکول می‌پرداز م در ا ن کلاس از راوردگرها معمولا تا مخا ره کراندار است از ا ن رو منظ ور ما از راوردگرهای W نالار ماره‌ها ی است که در شرو و صدق می‌کنند

کلبانف ا ارا ه‌ی ق ه‌ی ز ر روش ساده‌تری را رای ا ن ررسی تحت خ ای ساده‌ی راورد ارا ه داد

ق ه ۱ ۸ فرض می‌کن م $\Delta \equiv \Delta(\delta_X, \gamma_\theta) = \delta_X - \gamma_\theta$ تا خ ای ساده‌ی راورد تا پارامتری γ_θ ه وس له‌ی راوردگر δ_X است و ن ز $\psi : \Re \longrightarrow \Re$ ک تا نامنفی اکدا محد و دو ار ور پ وسته مشتق‌پذ ر است اگر قرار ده م $W(\delta_X, \gamma_\theta) = \psi(\Delta)$ وری که $\psi( ) =$ نگاه ک شر لازم و کافی رای راورده شدن شر را و لمکول توس جفت توا (L, W) ا ن است که تا ψ ه کی از دو فرم ز ر اشد

$$\psi(\Delta) = c\Delta^2 \qquad \text{ز ان مر خ ا}$$

$$\psi(\Delta) = b\{e^{a\Delta} - a\Delta - \} \qquad \text{ز ان لا نکس}$$

که در ن $b, c >$ و $a \neq$ است و ن ز رای هر r ثا ت تا $L(\psi'^{-1}(.), r)$ محد است

اثبات در

نت جه ۱ اگر $W(\delta_X, \gamma_\theta) = \psi(\delta_X - \gamma_\theta)$ که در ن δ_X ک راوردگر W نالار رای تا پارامتری γ_θ است و $\psi : \Re \longrightarrow \Re$ ک تا نامنفی اکدا محد و دو ار ور پ وسته مشتق‌پذ ر است ه وری که $\psi( ) =$ نگاه ک شر لازم و کافی رای ا نکه $\delta_T^* = \psi'^{-1} \circ E[\psi'(\delta_X)|T]$ ک راوردگر W نالار رای γ_θ ر پا ه‌ی ماره‌ی سنده‌ی T وجود داشته اشد ا ن است که ψ ه فرم تا ز ان مر خ ا ا لا نکس اشد

اگر تا ψ ه فرم تا ز ان مر خ ا اشد نگاه راوردگر δ_T^* در دو تساوی ز ر صدق می‌کند

$$\delta_T^* = E[\delta_X|T] \qquad , \quad E[\delta_T^*] = E[\delta_X] = \gamma_\theta \qquad , \forall\theta \in \Theta$$

و اگر تا ψ ه فرم تا ز ان لا نکس اشد نگاه راوردگر δ_T^* در دو تساوی ز ر صدق می‌کند

$$\delta_T^* = \frac{}{a} \ln E[e^{a\delta_X}|T] \qquad , \quad E[e^{a\delta_T^*}] = E[e^{a\delta_X}] = e^{a\gamma_\theta} \qquad , \forall\theta \in \Theta$$

علاوه ر ا ن اگر رای هر r ثا ت تا $L(\psi'^{-1}(.), r)$ محد اشد نگاه δ_T^* راوردگر نالار ا لا نکس نالار ا کمتر ن مخا ره‌ی تا ز ان L[4] است

4) Minimum L-Risk (LINEX-)Unbiased Estimator(MRUE)

در حالت خاص اگر T ک ماره سنده وکامل و L ه فرم تا ز ان مر خ ا لا نکس اشد نگاه راوردگر δ_T^* را راوردگر UMVUE[5] UMRUE رای تا پارامتری γ_θ گفته می‌شود

مثال ۱ ۱ فرض می‌ک: م $X_1, X_2, ..., X_n$ ک نمونه‌ی تصادفی و مستقل از توز $N(\theta, \sigma^2)$ σ معلوم است و δ_X ک راوردگر دلخواه رای تا پارامتری γ_θ است ا در ز ر گرفتن توا ز ان مر خ ا L_s و ز ان لا نکس L ه فرم ز ر

$$
\begin{aligned}
L_s(\delta_X, \gamma_\theta) &= (\delta_X - \gamma_\theta)^2 \\
, L(\delta_X, \gamma_\theta) &= e^{a(\delta_X - \gamma_\theta)} - a(\delta_X - \gamma_\theta) -
\end{aligned}
$$

ه و وح ملاح ه می‌شود که توا L_s و L فر ات ق ه‌ی فوق را راورده می‌سازند از ا ن رو دار م

- جفت L, L_s شر را و لمکول را راورده می‌سازد رای مثال می‌دا: م $\delta_X = X_1$ ک راوردگر L_s نااr رای پارامتر θ است از رفی راوردگر $\delta^*_{\bar{X}} = \bar{X}$ ک راوردگر L_s نااr θ ر مبنای ماره‌ی سنده است ه گونه‌ای که در نامساوی ز ر صدق می‌کند

$$
\begin{aligned}
E_\theta[L(\delta^*_{\bar{X}}, \theta)] &= e^{\frac{1}{2n}a^2\sigma^2} - \\
&\leq e^{\frac{1}{2}a^2\sigma^2} - \\
&= E_\theta[L(\delta_X, \theta)]
\end{aligned}
$$

- جفت L_s, L شر را و لمکول را راورده می‌سازد رای مثال می‌دا: م $\delta_X = X_1 - \frac{1}{2}a\sigma^2$ ک راوردگر لا نکس نااr رای پارامتر θ است از رفی راوردگر $\delta^*_{\bar{X}} = \bar{X} - \frac{1}{2n}a\sigma^2$ ک راوردگر لا نکس نااr θ ر مبنای ماره‌ی سنده است ه گونه‌ای که در نامساوی ز ر صدق می‌کند

$$
\begin{aligned}
E_\theta[L_s(\delta^*_{\bar{X}}, \theta)] &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{}{n}a^2\sigma^4 \\
&\leq \sigma^2 + -a^2\sigma^4 \\
&= E_\theta[L_s(\delta_X, \theta)]
\end{aligned}
$$

راوردگرها UMRUE در خانواده توز عها ا دامنه وا سته ه پارامتر

درا ن خش ا اشاره ه دو فرم از توا چگالی توز عها ی که دامنه‌ی مقاد ر وا سته ه پارامتر دارند فرم کلی راوردگرهای لا نکس نااr ا کمتر ن مخا ره لا نکس UMRUE را در صورت

5) Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator

امکان رای توا پارامتری دست می ور م

الف اگر $X_{1}, X_{2}, \cdots, X_{n}$ ک نمونه‌ی تصادفی از توز عی ا تا چگالی ز ر اشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Q_{1}(\theta)M_{1}(x) & ; b < x < \theta \\ & ; \text{سا ر نقا} \end{cases}$$

می‌دا م

$$\begin{aligned} &= \int_b^\theta f_\theta(x)dx \\ &= Q_{1}(\theta)\int_b^\theta M_{1}(x)dx \end{aligned}$$

نا ران

$$\frac{}{Q_{1}(\theta)} = \int_b^\theta M_{1}(x)dx \qquad (\ )$$

و

$$M_{1}(\theta) = \frac{-Q'_{1}(\theta)}{Q_{1}^{2}(\theta)} \qquad (\ )$$

لذا ا توجه ه تساوی دار م

$$\begin{aligned} F_\theta(x) &= \int_b^x f_\theta(t)\,dt \\ &= Q_{1}(\theta)\int_b^x M_{1}(t)dt \\ &= \frac{Q_{1}(\theta)}{Q_{1}(x)} \quad ;\ b < x < \theta \qquad (\ ) \end{aligned}$$

ماره‌ی سنده و کامل ا ن خانواده از توز عها را راست ا

$$X_{(n)} = \max_{i=1,2,\cdots,n}\{X_i\}$$

که ا توجه ه تساوی دارای تا چگالی ه فرم ز ر است

$$\begin{aligned} g_\theta(t) &= n[F_\theta(t)]^{n-1}f_\theta(t) \\ &= \frac{n\,Q_{1}^{n}(\theta)}{Q_{1}^{n-1}(t)}M_{1}(t) \end{aligned}$$

ر ا ن اساس $\delta^*(\mathbf{X}) \equiv \delta^*(X_{(n)})$ راوردگر UMRUE $\gamma_\theta \equiv \gamma(\theta)$ در تساوی ز ر صدق می‌کند

$$\begin{aligned} e^{a\gamma_\theta} &= E_\theta\left[e^{a\delta^*(X_{(n)})}\right] \\ &= \int_b^\theta e^{a\delta^*(t)} g_\theta(t)\,dt \\ &= \int_b^\theta e^{a\delta^*(t)} \frac{nQ_1^n(\theta)}{Q_1^{n-1}(t)} M_1(t)\,dt \qquad ;\ \forall\theta > x \end{aligned}$$

نا را ن

$$\int_b^\theta e^{a\delta^*(t)} \frac{M_1(t)}{Q_1^n(t)}\,dt = \frac{\ }{n} Q_1^{-n}(\theta) e^{a\gamma_\theta}$$

ا مشتق‌گ ری از رف ن تساوی اخ ر دار م

$$e^{a\delta^*(\theta)} \frac{M_1(\theta)}{Q_1^{n-1}(\theta)} = \frac{\ }{n}\left(a\gamma'_\theta e^{a\gamma_\theta} Q_1^{-n}(\theta) - nQ'_1(\theta) Q_1^{-n-1}(\theta) e^{a\gamma_\theta}\right)$$

ه عبارت د گر ا توجه ه تساوی دار م

$$e^{a\delta^*(\theta)} = e^{a\gamma_\theta}\left(\ \ - \frac{a\gamma'_\theta Q_1(\theta)}{nQ'_1(\theta)}\right)$$

نا را ن فرم کلی راوردگر UMRUE تا پارامتری $\gamma(\theta)$ ه شر وجود را است ا

$$\delta^*(X_{(n)}) = \gamma(X_{(n)}) + \frac{\ }{a} \ln\left[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(n)}) Q_1(X_{(n)})}{nQ'_1(X_{(n)})}\right]$$

که در ن $\left[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(n)}) Q_1(X_{(n)})}{nQ'_1(X_{(n)})}\right]$ ا احتمال ک مثبت است

فرم کلی تا مخا ره‌ی ا ن راوردگر معمولا قا ل محاسبه ن ست

$$\begin{aligned} R(\delta^*, \gamma_\theta) &= E_\theta\left[e^{a(\delta^*(X_{(n)}) - \gamma(\theta))} - a(\delta^*(X_{(n)}) - \gamma(\theta)) - \ \ \right] \\ &= -aE_\theta\left[\delta^*(X_{(n)}) - \gamma(\theta)\right] \\ &= -aE_\theta[\gamma(X_{(n)}) - \gamma(\theta)] - E_\theta\left[\ln[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(n)}) Q_1(X_{(n)})}{nQ'_1(X_{(n)})}]\right] \end{aligned}$$

مثال ۱ اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ ک نمونه‌ی تصادفی از توز کنواخت روی فاصله‌ی $(\,, \theta)$ اشد در ا ن صورت

$$Q_1(\theta) = \frac{}{\theta} \quad , \ M_1(x) = \quad , \ b =$$

و نا را ن راوردگر UMRUE پارامتر $\gamma_\theta = \theta$ ه شر $< a <$ را ر است ا

$$\delta^*(X_{(n)}) = X_{(n)} + \frac{}{a} \ln\left[\ + \frac{aX_{(n)}}{n}\right]$$

تا مخا ره‌ی ا ن راوردگر ه روش تحل لی قا ل محاسبه ن ست

$$\begin{aligned} R(\delta^*, \theta) &= E_\theta\left[e^{a(\delta^*(X_{(n)})-\theta)} - a(\delta^*(X_{(n)}) - \theta) - \ \right] \\ &= -aE_\theta\left[X_{(n)} + \frac{}{a}\ln[\ + \frac{aX_{(n)}}{n}] - \theta\right] \end{aligned}$$

از ا ن رو ا روش شب ه سازی مونت کارلو ه رسم ا ن تا اکتفا می‌کن م

در شکل ا تول د نمونه‌ی تصادفی ه حجمهای و تا ی و از توز $\mathrm{U}(\,, \theta)$ تا مخا ره راوردگر δ^* در دامنه‌ی مقاد ر $\theta \in (\,, \ )$ رسم شده است مشاهده می‌شود که مقاد ر مخا ره‌ی نمونه‌ی تا ی کمتر از مقاد ر مخا ره‌ی نمونه‌ی تا ی است

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ک نمونه‌ی تصادفی از توز عی ا تا چگالی ز ر اشد

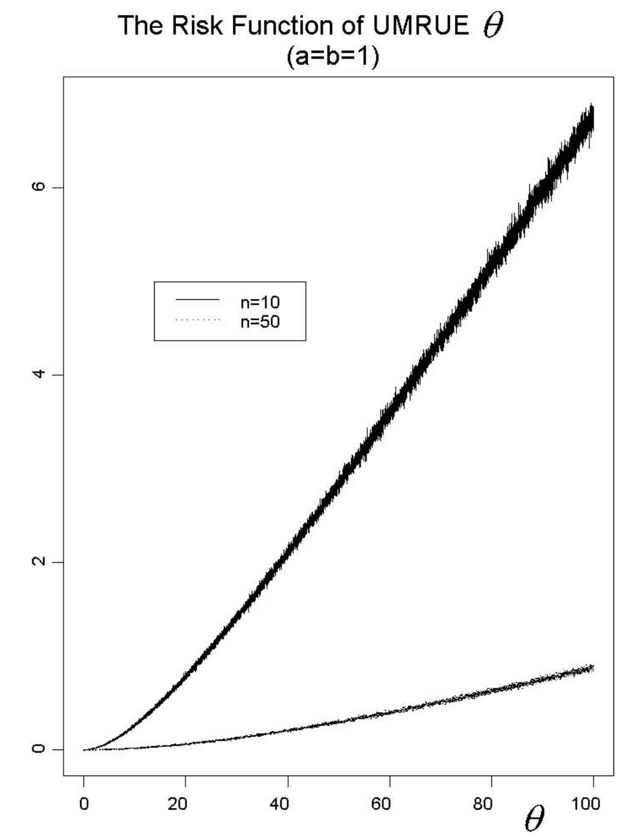
$$f_\theta(x) = \begin{cases} Q_2(\theta)M_2(x) & ;\theta < x < b \\ & ;\text{سا ر نقا} \end{cases}$$

می‌دان م

$$\begin{aligned} &= \int_\theta^b f_\theta(x)dx \\ &= Q_2(\theta)\int_\theta^b M_2(x)dx \end{aligned}$$

نا را ن

$$\frac{}{Q_2(\theta)} = \int_\theta^b M_2(x)dx \qquad (\ )$$



شکل شب ه‌سازی تا مخا ره‌ی راوردگر UMRUE پارامتر θ در توز $\mathrm{U}(\ ,\theta)$

و

$$M_{۲}(\theta)=\frac{Q'_{۲}(\theta)}{Q^{۲}_{۲}(\theta)} \qquad (\quad)$$

از رفی ا توجه ه تساوی دار م

$$\begin{aligned} - F_\theta(x) &= \int_x^b f_\theta(t)dt \qquad (\quad) \\ &= Q_{۲}(\theta)\int_x^b M_{۲}(t)dt \\ &= \frac{Q_{۲}(\theta)}{Q_{۲}(x)} \quad ;\ \theta<x<b \end{aligned}$$

مارهی سنده وکامل ا ن خانواده از توز عها را ر است ا

$$X_{(۱)}=\min_{i=۱,۲,\cdots,n}\{X_i\}$$

که ا توجه ه تساوی دارای تا چگالی ه فرم ز ر است

$$\begin{aligned} g_\theta(t) &= n[\ - F_\theta(t)]^{n-۱} f_\theta(t) \\ &= \frac{n\,Q^n_{۲}(\theta)}{Q^{n-۱}_{۲}(t)}M_{۲}(t) \end{aligned}$$

را ن اساس $\delta^*(\mathbf{X})\equiv\delta^*(X_{(۱)})$ راوردگر UMRUE $\gamma_\theta=\gamma(\theta)$ در تساوی ز ر صدق میکند

$$\begin{aligned} e^{a\gamma_\theta} &= E_\theta\left[e^{a\delta^*(X_{(۱)})}\right] \\ &= \int_\theta^b e^{a\delta^*(t)}\frac{nQ^n_{۲}(\theta)}{Q^{n-۱}_{۲}(t)}M_{۲}(t)\,dt \quad ;\ \forall b>\theta \end{aligned}$$

ا

$$\int_\theta^b e^{a\delta^*(t)}\frac{M_{۲}(t)}{Q^n_{۲}(t)}\,dt=\frac{\,}{n}Q_{۲}^{-n}(\theta)e^{a\gamma_\theta}$$

ا مشتقگ ری از رف ن تساوی اخ ر دار م

$$-e^{a\delta^*(\theta)}\frac{M_{۲}(\theta)}{Q^{n-۱}_{۲}(\theta)}=\frac{\,}{n}\left(a\gamma'_\theta e^{a\gamma_\theta}Q_{۲}^{-n}(\theta)-nQ'_{۲}(\theta)Q_{۲}^{-n-۱}(\theta)e^{a\gamma_\theta}\right)$$

ه عبارت د گر ا توجه ه تساوی   دار م

$$e^{a\delta^*(\theta)} = e^{a\gamma_\theta}\left[\ \ - \frac{a\gamma'_\theta Q_۲(\theta)}{nQ'_۲(\theta)}\right]$$

نا را ن فرم کلی راوردگر UMRUE رای تا   پارامتری $\gamma(\theta)$ ه شر   وجود را ر است ا

$$\delta^*(X_{(۱)}) = \gamma(X_{(۱)}) + \frac{}{a}\ln\left[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(۱)})Q_۲(X_{(۱)})}{nQ'_۲(X_{(۱)})}\right]$$

که در ن $\left[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(۱)})Q_۲(X_{(۱)})}{nQ'_۲(X_{(۱)})}\right]$ ا احتمال ک مثبت است

فرم کلی تا   مخا رەی ا ن راوردگر معمولا ه روش تحل لی قا ل محاسبه ن ست

$$\begin{aligned} R(\delta^*, \gamma_\theta) &= E_\theta\left[e^{a(\delta^*(X_{(۱)})-\gamma(\theta))} - a(\delta^*(X_{(۱)}) - \gamma(\theta)) - \ \ \right] \\ &= -aE_\theta[\delta^*(X_{(۱)}) - \gamma(\theta)] \\ &= -aE_\theta[\gamma(X_{(۱)}) - \gamma(\theta)] - E_\theta\left[\ln[\ \ - \frac{a\gamma'(X_{(۱)})Q_۲(X_{(۱)})}{nQ'_۲(X_{(۱)})}]\right] \end{aligned}$$

شر   را و لمکول تحت خ   ا   لگار تم

کلبانف ق   ەی   را تنها در حالت $\Delta = \delta_X - \gamma_\theta$ اثبات نمود و از ا ن رو تا ψ را ه کی از دو فرم مر   خ   ا و لا نکس ه دست ورد اما ا استدلال مشا ه می‌توان ا ن ق   ه را تعم م داد   تعم م ق   ەی   ان می‌کند که اگر $\Delta = \pm\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]$ نگاه راورده شدن شر   را و لمکول معادل ا ن است که تا ψ ه فرم لا نکس وده و تا $L(e^{\psi'^{-۱}(\cdot)}, r)$ رای هر r ثا ت و مثبت محد   اشد

در ا ن مقاله در چارچو   کلاس مارەها ی که در شرا   و   صدق می‌کنند   ه ارا ه و اثبات تعم م ق   ەی   تحت خ   ای لگار تمی $\Delta = \ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]$ می‌پرداز م   د هی است در چارچو   ا ن کلاس از راوردگرها W نا ار بی معادل رقراری شر   است   همچن ن اثبات ا ن ق   ه در حالت $\Delta = -\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]$ مشا ه است از ا ن رو از تکرار ن صرف‌ن ر می‌شود

ق   ه ۳ ۱   فرض می‌کن م $\Delta \equiv \Delta(\delta_X, \gamma_\theta) = \ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]$ تا   خ   ای لگار تمی راورد تا   پارامتری مثبت γ_θ ه وس لەی راوردگر δ_X است و ن ز $\psi : \Re \longrightarrow \Re$ ک تا   نامنفی اک دا محد   و دو ار   ور پ وسته مشتق‌پذ ر است   اگر قرار ده م $W(\delta_X, \gamma_\theta) = \psi(\Delta)$ وری که $\psi(\ \ ) = $ نگاه ک شر   لازم و کافی رای راورده شدن شر   را و لمکول توس   جفت

توا (L,W) ا ن است که تا ψ ه فرم ز ر اشد

$$\psi(\Delta)=b\{e^{a\Delta}-a\Delta-\ \}$$

ا ه عبارت د گر

$$W(\delta_X,\gamma_\theta)=b\left\{(\frac{\delta_X}{\gamma_\theta})^a-a\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]-\ \right\}$$

که در ن $a\leq -\ ,\ b>$ و رای هر r ثا ت و مثبت تا $L(e^{\psi'^{-1}(.)},r)$ محد است

اثبات ۳

شر لازم اگر روی ف ای $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,x_3\}$ خانواده‌ای از توز ها را ه فرم ز ر تعر ف کن م

$$p_\theta(x)\equiv P_\theta\{X=x\}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}\sin^2\theta & ;x=x_1,x_2\\ \cos^2\theta & ;x=x_3\end{array}\right.\qquad ;\ \forall\theta\in[\ ,\ \pi]$$

نگاه مارهٔی سنده م ن مال رای ا ن خانواده از توز ها را ر است ا

$$T\equiv T(X)=\left\{\begin{array}{ll}s_1 & ;X=x_1,x_2\\ s_2 & ;X=x_3\end{array}\right.$$

که در ن $s_1,s_2\in\Re$ را ر هم ن ستند

اکنون راوردگر دلخواه δ_X را ه فرم ز ر در ن ر می‌گ ر م

$$\delta_X=\left\{\begin{array}{ll}d_1 & ;X=x_1\\ d_2 & ;X=x_2\\ d_3 & ;X=x_3\end{array}\right.\qquad(\ \ )$$

که در ن $d_1,d_2,d_3\in\Re^+$ مقاد ر دلخواه هستند

در ا ن صورت ا کارگ ری لم تا پارامتری کتای γ_θ وجود دارد وری که δ_X راوردگر W نااَر ن اشد همچن ن δ_T^* ک راوردگر W نااَر د گر رای γ_θ ر پا هٔی مارهٔی سندهٔی T را ه فرم ز ر در ن ر می‌گ ر م بق تعر ف راورده شدن شر را و لمکول چن ن راوردگری وجود دارد

$$\delta_T^*=\left\{\begin{array}{ll}t_1 & ;T=s_1\\ t_2 & ;T=s_2\end{array}\right.\qquad(\ \ )$$

که در ن $t_1,t_2\in\Re^+$ مقاد ر را ر هم ن ستند ا توجه ه لم اگر δ_X راوردگر W نااَر γ_θ اشد نگاه

$$\begin{aligned}E_\theta[\frac{\partial}{\partial\gamma_\theta}W(\delta_X,\gamma_\theta)] &= E_\theta[-\frac{}{\gamma_\theta}\psi'(\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}])]\\ &= \qquad ;\ \forall\theta\in[\ ,\ \pi]\end{aligned}$$

ا

$$-\left(\psi'(\ln[\frac{d_1}{\gamma_\theta}]) \quad + \quad \psi'(\ln[\frac{d_2}{\gamma_\theta}])\right)\sin^2\theta + \psi'(\ln[\frac{d_3}{\gamma_\theta}])\cos^2\theta = \qquad (\quad)$$

ه هم ن ترت اگر γ_θ تا پارامتری ا راوردگر W ناار δ_T^* اشد نگاه

$$\psi'(\ln[\frac{t_1}{\gamma_\theta}])\sin^2\theta + \psi'(\ln[\frac{t_2}{\gamma_\theta}])\cos^2\theta \;\; = \qquad ; \; \forall\theta \in [\;,\;\pi] \quad (\quad)$$

ا قرار دادن $\theta =$ در دو تساوی و دار م

$$\psi'(\ln[\frac{d_3}{\gamma_0}]) = \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma_0 = d_3$$

$$\psi'(\ln[\frac{t_2}{\gamma_0}]) = \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma_0 = t_2$$

ا جا گذاری ا ن مقادر ه ترت در دو تساوی و دار م

$$-\left(\psi'(\ln[\frac{d_1}{\gamma_\theta}]) + \psi'(\ln[\frac{d_2}{\gamma_\theta}])\right)\sin^2\theta = -\psi'(\ln[\frac{\gamma_0}{\gamma_\theta}])\cos^2\theta$$

و

$$\psi'(\ln[\frac{t_1}{\gamma_\theta}])\sin^2\theta = -\psi'(\ln[\frac{\gamma_0}{\gamma_\theta}])\cos^2\theta$$

از مقا سه‌ی دو تساوی اخ ر نت جه می‌شود که

$$\psi'(\ln[\frac{t_1}{\gamma_\theta}]) = -\left(\psi'(\ln[\frac{d_1}{\gamma_\theta}]) + \psi'(\ln[\frac{d_2}{\gamma_\theta}])\right) \qquad (\quad)$$

ا مشتق‌گ ری نسبت ه γ_θ از رف ن تساوی دار م

$$\psi''(\ln[\frac{t_1}{\gamma_\theta}]) = -\left(\psi''(\ln[\frac{d_1}{\gamma_\theta}]) + \psi''(\ln[\frac{d_2}{\gamma_\theta}])\right) \qquad (\quad)$$

و ا قرار دادن $\theta =$ در دو تساوی و دار م

$$\psi'(\ln[\frac{t_1}{\gamma_0}]) = -\left(\psi'(\ln[\frac{d_1}{\gamma_0}]) + \psi'(\ln[\frac{d_2}{\gamma_0}])\right) \qquad (\quad)$$

و

$$\psi''(\ln[\frac{t_۱}{\gamma_۰}]) = -\left(\psi''(\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}]) + \psi''(\ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}])\right) \qquad (\ \ )$$

اگر جهت اختصار قرار دهیم $y \equiv \psi'(\ln[\frac{t_۱}{\gamma_۰}])$ از تساوی نتیجه می‌شود که

$$\psi'(\ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}]) = \ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}])$$

یا

$$\psi'(\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}]) = \ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}])$$

چون تابع ψ اکیدا محدب است پس ψ' اکیدا یکنوا و در نتیجه معکوس‌پذیر است. از این رو

$$\ln[\frac{t_۱}{\gamma_۰}] = \psi'^{-۱}(y)$$

و

$$\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}] = \psi'^{-۱}\left(\ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}])\right) \iff \ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}] = \psi'^{-۱}\left(\ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}])\right)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در تساوی داریم

$$\begin{aligned}\psi''(\ln[\frac{t_۱}{\gamma_۰}]) &= \psi'' \circ \psi'^{-۱}(y)\\ &= -\left(\psi'' \circ \psi'^{-۱}(\ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۲}{\gamma_۰}])) + \psi'' \circ \psi'^{-۱}(\ \ y - \psi'(\ln[\frac{d_۱}{\gamma_۰}]))\right)\end{aligned}$$

براحتی می‌توان نشان داد که فرم تابع $\psi'' \circ \psi'^{-۱}(.)$ خطی است یعنی

$$\psi'' \circ \psi'^{-۱}(y) = Ay + B$$

به عبارت دیگر

$$\psi''(y) = A\psi'(y) + B$$

با توجه به فرضیات قبلی در مورد تابع ψ و نیز مرجع تابع ψ که معادله‌ی دیفرانسیلی فوق را براورده می‌سازد به فرم زیر است

$$\psi(y) = b\{e^{ay} - ay - \ \ \} \quad ; \ b > \ \ , a \leq -$$

اگر در تساوی فوق بجای y مقدار $\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]$ قرار گیرد، آنگاه فرم مطلوب تابع W را بدست می آوریم.
اکنون فرض می‌کنیم تابع ψ به فرمی تابع زیان لاینکس است و نشان می‌دهیم که تابع $L(e^{\psi'^{-1}(\cdot)}, r)$ برای هر r ثابت و مثبت محدب است.
بدین منظور δ_X را به همان فرم یک براوردگر W ناارب دلخواه تابع پارامتری γ_θ در نظر می‌گیریم.
در این صورت

$$E_\theta[\psi'(\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}])] = \quad \Longleftrightarrow \quad E_\theta[\delta_X^a] = \gamma_\theta^a \quad ; \forall\theta \in [\ ,\ \pi] \qquad (\ )$$

همچنین اگر δ_T^* یک براوردگر W ناارب γ_θ بر پایه‌ی آماره‌ی بسنده‌ی T به همان فرم باشد، آنگاه با توجه به تساوی داریم

$$\begin{aligned} \gamma_\theta^a &= E_\theta[\delta_X^a] \\ &= E_\theta[\delta_T^{*a}] \quad ; \forall\theta \in [\ ,\ \pi] \end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} \gamma_\theta^a &= -(d_1^a + d_2^a)\sin^2\theta + d_3^a\cos^2\theta \\ &= t_1^a\sin^2\theta + t_2^a\cos^2\theta \quad ; \forall\theta \in [\ ,\ \pi] \qquad (\ ) \end{aligned}$$

بنابراین

$$t_1 = (\frac{d_1^a + d_2^a}{})^{\frac{1}{a}} \quad , \ t_2 = d_3 \qquad (\ )$$

از طرفی با توجه به براورده شدن شرط را و بلکول توسط جفت (L, W) شرط برقراراست یعنی

$$E_\theta[L(\delta_X, \gamma_\theta)] \ \geq \ E_\theta[L(\delta_T^*, \gamma_\theta)]$$

یا

$$\frac{1}{2}[L(d_1, \gamma_\theta) \ + \ L(d_2, \gamma_\theta)]\sin^2\theta + L(d_3, \gamma_\theta)\cos^2\theta \geq L(t_1, \gamma_\theta)\sin^2\theta + L(t_2, \gamma_\theta)\cos^2\theta$$

بنابراین با توجه به را به داریم

$$-[L(d_1, \gamma_\theta) \ + \ L(d_2, \gamma_\theta)] \ \geq \ L((\frac{d_1^a + d_2^a}{})^{\frac{1}{a}}, \gamma_\theta)$$

حال ا قرار دادن $\theta =$ در نامساوی اخ ر و تساوی دار م

$$\gamma_{\circ} = d_{3}$$

و

$$-[L(d_{1}, d_{3}) \; + \; L(d_{2}, d_{3})] \;\; \geq \;\; L((\frac{d_{1}^{a} + d_{2}^{a}}{})^{\frac{1}{a}}, d_{3})$$

که ا ن نامساوی انگر محد ودن $L(e^{\psi'^{-1}(.)}, r)$ رای هر r ثا ت و مثبت است
شر کاف اکنون ا فرض ا نکه تا ψ ه فرم تا ز ان لا نکس $- \leq a$ و $b >$ است
و ن ز تا $L(e^{\psi'^{-1}(.)}, r)$ رای هر r ثا ت و مثبت محد است ثا ت می‌کن م جفت (L, W)
شر را و لمکول را راورده می‌سازد
اگر δ_X را ک راوردگر W نالار تا پارامتری γ_θ در ن ر گ ر م وجود مارهای همچون
δ_T^* ر پا ه‌ی مارهی سنده‌ی T را نشان می‌ده م وری که راوردگر W نالار تا پارامتری
γ_θ اشد و در شر صدق کند
ا توجه ه مثال فرض می‌کن م مارهی δ_X ک راوردگر W نالار γ_θ است عنی

$$E_\theta[\delta_X^a] \sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon} \left\{ \frac{a(a+\ )}{(\gamma_\theta + c)^{a+2}} \right\} < \infty \quad ; \forall \theta \in \Theta$$

و

$$\sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon} \left\{ \frac{-a}{(\gamma_\theta + c)^{2}} \right\} < \infty \quad ; \forall \theta \in \Theta$$

همچن ن

$$E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \gamma_\theta} W(\delta_X, \gamma_\theta) \right] = \quad \Longleftrightarrow \quad E_\theta[\delta_X^a] = \gamma_\theta^a \quad ; \forall \theta \in \Theta$$

در ا ن صورت اگر قرار ده م

$$\begin{aligned} \delta_T^* &= e^{\psi'^{-1} \circ E[\psi'(\ln[\delta_X]) | T]} \\ &= \{E[\delta_X^a | T]\}^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

نگاه

$$\begin{aligned} E_\theta \left[\delta_T^{*a}\right] \sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon} \left\{ \frac{a(a+\ )}{(\gamma_\theta + c)^{a+2}} \right\} &= E_\theta E\left[\delta_X^a | T\right] \sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon} \left\{ \frac{a(a+\ )}{(\gamma_\theta + c)^{a+2}} \right\} \\ &= E_\theta \left[\delta_X^a\right] \sup_{-\epsilon \leq c \leq \epsilon} \left\{ \frac{a(a+\ )}{(\gamma_\theta + c)^{a+2}} \right\} < \infty \quad ; \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

عنی δ_T^* در شر صدق می‌کند
همچن ن

$$\begin{aligned} E_\theta[\delta_T^{*a}] &= E_\theta E[\delta_X^a|T] \\ &= E_\theta[\delta_X^a] \\ &= \gamma_\theta^a \iff E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\gamma_\theta}W(\delta_X,\gamma_\theta)\right] = \quad ; \forall\theta\in\Theta \end{aligned}$$

عنی δ_T^* در شر صدق می‌کند پس ک راوردگر W ناار γ_θ ر پا ه‌ی مار‌ه‌ی سنده‌ی T وجود دارد علاوه ر ا ن ا توجه ه محد ودن تا $L(e^{\psi'^{-1}(.)},r)$ و نامساوی جنسن دار م

$$\begin{aligned} E_\theta[L(\delta_X,\gamma_\theta)] &= E[L(e^{\psi'^{-1}\circ\psi'(\ln[\delta_X])},\gamma_\theta)] \\ &\geq E_\theta[L(e^{\psi'^{-1}\circ E[\psi'(\ln[\delta_X])|T]},\gamma_\theta)] \\ &= E_\theta\left[L(\{E[\delta_X^a|T]\}^{\frac{1}{a}},\gamma_\theta)\right] \\ &= E_\theta[L(\delta_T^*,\gamma_\theta)] \quad ; \forall\theta\in\Theta \end{aligned}$$

عنی δ_T^* در شر صدق می‌کند پس شر را و لکول توس جفت (L,W) راورده می‌شود

نت جه ۳ ۳ فرض می‌کن م $W(\delta_X,\gamma_\theta)=\psi(\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}])$ که در ن $\psi:\Re\longrightarrow\Re$ ک تا نامنفی اکدا محد و دو ار ور پوسته مشتق‌پذ ر است وری که $\psi(\ )=$ و δ_X ک راوردگر W ناار رای تا پارامتری γ_θ است در ا ن صورت ک شر لازم و کافی رای ا نکه $\delta_T^*=e^{\psi'^{-1}\circ E[\psi'(\ln[\delta_X])|T]}$ ک راوردگر W ناار رای γ_θ ر پا ه‌ی مار‌ه‌ی سنده‌ی T وجود داشته اشد ا ن است که تا ψ ه فرم تا ز ان لا نکس ا پارامتر مقا اس نا شتر از منفی ک اشد که در ا ن صورت راوردگر δ_T^* در دو تساوی ز ر صدق می‌کند

$$\delta_T^*=\{E[\delta_X^a|T]\}^{\frac{1}{a}} \quad , \; E_\theta[\delta_T^{*^a}]=E_\theta[\delta_X^a]=\gamma_\theta^a \quad ; \forall\theta\in\Theta$$

مثال علاوه ر ارا ه‌ی کار ردی از ق ه‌ی نشان می‌دهد که تحت خ ای نسبی $\Delta(\delta_X,\gamma_\theta)=\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}-$ ق ه‌ی قا ل تعم م ن ست ه عبارت د گر راورد عنی تحت تا ز ان لا نکس تعم م افته شر را و لکول راورده نمی‌شود

مثال ۳ اگر δ_X ک راوردگر دلخواه رای γ_θ و تا ز ان ا ن راوردگر را ه فرم ز ان لا نکس تعم م افته اشد عنی

$$\begin{aligned} W(\delta_X,\gamma_\theta) &= b\left\{e^{a(\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}-1)}-a(\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}-\ \ )-\ \ \right\} \\ &= b\left\{e^{a(e^{\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]}-1)}-a(e^{\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}]}-\ \ )-\ \ \right\} \end{aligned}$$

نگاه $W(\delta_X,\gamma_\theta)=\psi(\ln[\frac{\delta_X}{\gamma_\theta}])$ که در ن تا $\psi(.)$ ه فرم ز ر است

$$\psi(\Delta)=b\left\{e^{a(e^{\Delta}-1)}-a(e^{\Delta}-\quad)-\quad\right\}$$

ا توجه ه ق ه‌ی و نت جه‌ی ن چون تا $\psi(.)$ ه فرم لا نکس ا ه عبارت د گر ه فرم لا نکس ‌ ست از ا ن رو شر را و لکول توس جفت (L,W) راورده نمی‌شود همچن ن اگر δ_X ک راوردگر W ناار γ_θ اشد نگاه راوردگر W ناار γ_θ ر پا ه‌ی ماره‌ی سنده‌ی T قا ل حصول ‌ ست

ارت ا مفاه م ز و ناار تحت تا ز ان لا نکس

وجه اشتراک راوردگرهای ناار و ز و ه ور کلی ارتبا مفاه م ناار بی و زی همواره مورد حث مارشناسان وده است از رفی رخی از مارشناسان که و ژگ های م لو خو ش را در مفهوم ناار بی افته‌اند چندان ه ارزش راوردگرهای زی ها نمی‌دهند و رخی د گر چندان ا مفهوم ناار بی کاری ندارند از ا ن رو می‌توان گفت عق ده‌ی مشترک ن مارشناسان را ن است که و ژگی مشترکی ن مفاه م ناار بی و زی وجود ندارد ا ن مو و رسما توس بلکول و گ رشِک [6] نشان داده شده است د ن ترت که نها نشان داده‌اند که تا مخا ره‌ی زی ک راوردگر ناار و ز صفر است شر ی که راورده شدن ن در مسا ل معمول تصم م غ ر ممکن است

نور بلوچ و م دن [7] در سال ارتبا مفاه م ناار بی و زی را تحت تا ز ان مر خ ا مورد رسی قرار دادند در ا ن خش ا توجه ه ا ده‌ی ه کار رفته در مقاله‌ی نها ه رسی ارتبا مفاه م ناار بی و زی تحت تا ز ان لا نکس می‌پرداز م

متوس ز ان پس ن و تا مخا ره‌ی زی راوردگر δ_X تا پارامتری γ_θ تحت تا ز ان لا نکس و توز پ ش ن π ه ترت را راند ا

$$\begin{aligned}R_\pi(\delta_x,\gamma_\theta) &= \int_\Theta L(\delta_x,\theta)\pi(\theta|x)\,d\nu(\theta)\\ &= bE_x\left[e^{a(\delta_x-\gamma_\theta)}-a(\delta_x-\gamma_\theta)-\quad\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(\delta_X,\gamma_\theta,\pi) &= E_f[R_\pi(\delta_X,\gamma_\theta)]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}R_\pi(\delta_x,\theta)f(x)dx\end{aligned}$$

6) Blackwell & Girshick 7) Meeden

ا توجه ه ا ن که

$$\frac{\partial^۲}{\partial \delta_x^۲} R_\pi(\delta_x,\gamma_\theta) = bE_x\left[a^۲ e^{a(\delta_x-\gamma_\theta)}\right] >$$

قاعده‌ی ز δ_X^π نسبت ه توز پ ش ن π از حل معادله‌ی ز ر ه دست می د

$$\frac{\partial}{\partial \delta_x} R_\pi(\delta_x,\gamma_\theta)\,\big|_{\delta_x=\delta_x^\pi} =$$

ه سادگی تحق ق می‌شود که از معادله‌ی فوق قاعده‌ی ز γ_θ نسبت ه توز پ ش ن π و تحت تا ز ان لا نکس ه شر نکه $E_X[e^{-a\gamma_\theta}]$ وجود داشته اشد را ر است ا

$$\begin{aligned}\delta_X^\pi &= -\frac{}{a}\ln\left[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]\right]\\ &= -\frac{}{a}\ln\left[\int_\Theta e^{-a\gamma_\theta}\,\pi(\theta|X)\,d\nu(\theta)\right] \qquad (\ )\end{aligned}$$

در ا ن صورت متوس ز ان پس ن و تا مخا ره‌ی زی δ_X^π ه ترت   ه فرم ز ر ساده می‌شوند

$$\begin{aligned}R_\pi(\delta_X^\pi,\gamma_\theta) &= bE_X\left[e^{a(\delta_X^\pi-\gamma_\theta)} - a(\delta_X^\pi-\gamma_\theta) - \ \right]\\ &= b\ln\left[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]\right] + abE_X[\gamma_\theta]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}R(\delta_X^\pi,\gamma_\theta,\pi) &= E_f[R_\pi(\delta_X^\pi,\gamma_\theta)]\\ &= bE_f\left[\ln[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]]\right] + abE_\pi[\gamma_\theta]\end{aligned}$$

مقا سه‌ی تساو های   و   نشان می‌دهد که نقش X و θ قا ل تعو ض است د ن معنا که اگر θ کم تی قا ل مشاهده و X کم تی غ ر قا ل مشاهده و نامعلوم اشد نگاه تساوی انگر لا نکس ناار بی γ_θ رای قاعده‌ی δ_X^π و ز ز ودن δ_X^π رای تا پارامتری γ_θ نسبت ه توز پ ش ن π و تحت تا ز ان لا نکس است از رفی تساوی   انگر ناار بی δ_X رای γ_θ و ز ز ودن γ_θ رای راوردگر δ_X نسبت ه توز پ ش ن f و تحت تا ز ان لا نکس است

 نا را ن ناار بی δ_X رای تا پارامتری γ_θ معادل ز ودن γ_θ رای قاعده‌ی δ_X است همچن ن ز ودن δ_X رای γ_θ معادل ناار بی γ_θ رای δ_X است   ه عبارتی د گر ا تعو ض نقش X و θ مفهوم ناار بی معادل مفهوم ز است

ا استفاده از ا ن نکته می‌توان تعر ف کلی‌تری در مورد راوردگرهای ناار ارا ه داد ه گونه‌ای که تعر ف عام لهمن از ناار بی تنها حالت خاصی از ا ن تعر ف اشد

تعر ف ۱ اگر $L(.,.)$ ک تا ز ان دلخواه ا تا مخا ره‌ی زی $R(.,.;\pi)=E_\pi E_\theta[L(.,.)]$ اشد نگاه δ_X را نسبت ه توز پ ش ن π راوردگر L ناار تا پارامتری γ_θ می‌گو م اگر

$$R(\delta_X,\gamma_\theta;\pi)=\inf_{r_\theta} R(\delta_X,r_\theta;\pi)$$

کی از پ امدهای ارتبا مفاه م ناار بی و زی پس از تعو ض نقش X و θ ا ن است که ز ر ق ا ای مفاه م ناار بی را می‌توان در مورد مفاه م ز نز م رح نمود و رعکس در ادامه پس از ان مقدمه‌ای کوتاه ه نمونه‌ای از ا ن ق اا اشاره می‌شود

کی از مسا ل م رح و مورد علاقه در تصمم زی افتن قاعده‌ی ز δ_X^π رای تا پارامتری γ_θ نسبت ه توز پ ش ن π و تحت تا ز ان لا نکس است مس له‌ی د گر در ا ن زم نه افتن تا پارامتری γ_θ است ه گونه‌ای که ماره‌ی دلخواه δ_X قاعده‌ی ز ن نسبت ه پ ش ن π و تحت تا ز ان لا نکس اشد ق ه‌ی ز ر پاسخی ه ا ن مس له ارا ه می‌دهد

ق ه ا فرض ا ن که X دارای تا چگالی ه فرم ز ر اشد

$$f(x|\theta)=\begin{cases}\beta(\theta)e^{\theta x}h(x) & ;x< \\ & ;\text{سا رنقا}\end{cases}\qquad \theta\in\Theta=(\ ,\infty)$$

و نز π تا چگالی پ ش ن θ و همه جا پ وسته اشد اگر رای ک تا ϕ تا $\delta_x\equiv\delta(x)$ ه فرم ز ر در اخت ار اشد

$$\delta_x=-\frac{}{a}\ln\left[\int_\circ^\infty e^{\theta x}\phi(\theta)\,d\theta\right]\qquad ;\ \forall x<$$

نگاه δ_X تحت تا ز ان لا نکس و پ ش ن π قاعده‌ی ز تا پارامتری ز ر است

$$\gamma_\theta=-\frac{}{a}\ln\left[\frac{\int_\circ^\theta\phi(\theta-t)\beta(t)\pi(t)\,dt}{\pi(\theta)\beta(\theta)}\right]$$

اثبات ۳ همانگونه که اشاره شد اگر δ_X قاعده‌ی ز γ_θ نسبت ه پ ش ن π و تحت تا ز ان لا نکس اشد نگاه

$$\begin{aligned}\delta_x &= -\frac{}{a}\ln\left[\int_\circ^\infty e^{-a\gamma_\theta}\pi(\theta|x)\,d\theta\right]\\ &= -\frac{}{a}\ln\left[\frac{\int_\circ^\infty e^{-a\gamma_\theta}e^{\theta x}\beta(\theta)\pi(\theta)\,d\theta}{\int_\circ^\infty e^{\theta x}\beta(\theta)\pi(\theta)\,d\theta}\right]\qquad ;\ \forall x< \qquad (\ )\end{aligned}$$

ا توجه ه تعر ف δ_x تساوی   معادل است ا

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\theta x}e^{-a\gamma_\theta}\beta(\theta)\pi(\theta)\,d\theta &= \left\{\int_0^\infty e^{\theta x}\phi(\theta)\,d\theta\right\}\left\{\int_0^\infty e^{\theta x}\beta(\theta)\pi(\theta)\,d\theta\right\}\\ &= \int_0^\infty e^{\theta x}\left\{\int_0^\theta \phi(\theta-t)\beta(t)\pi(t)\,dt\right\}\,d\theta\end{aligned}$$

 نا را ن ا توجه ه کتا ی تبد لات لاپلاس دار م

$$e^{-a\gamma_\theta}\beta(\theta)\pi(\theta) = \int_0^\theta \phi(\theta-t)\beta(t)\pi(t)\,dt$$

 ا

$$\gamma_\theta = -\frac{}{a}\ln\left[\frac{\int_0^\theta \phi(\theta-t)\beta(t)\pi(t)\,dt}{\pi(\theta)\beta(\theta)}\right] \quad \square$$

 ه سادگی می‌توان ق   ه‌ی   را ه ز ان نا‌ار بی ازنو سی نمود   اگر $e^{a\gamma_\theta}$ تبد ل لاپلاس تا عی مانند $\alpha(.)$ روی $(\ ,\infty)$ فرض شود   ا ه عبارت د گر

$$\gamma_\theta = \frac{}{a}\ln\left[\int_0^\infty e^{\theta x}\alpha(x)\,dx\right] \qquad ;\ \forall\theta >$$

نگاه راوردگر لا نکس نا‌ار   کتا رای γ_θ را ر است ا

$$\delta_X = \frac{}{a}\ln\left[\frac{\int_0^X \alpha(X-t)h(t)\,dt}{h(X)}\right]$$

در ادامه   ا ارا ه‌ی ک ق   ه   نشان می‌ده م که تحت چه شرا   ی تا   مخا ره‌ی   زی ک راوردگر تحت تا   ز ان لا نکس را ر ا صفر است

ق   ه   اگر δ_X ک راوردگر لا نکس نا‌ار γ_θ اشد ه گونه‌ای که در شر   لا نکس نا‌ار   صدق کند و نسبت ه توز   پ ش ن π ک قاعده‌ی   ز γ_θ اشد   عنی در تساوی   صدق کند نگاه تا   مخا ره‌ی   زی δ_X را ر ا صفر است   عنی

$$R(\delta_X,\gamma_\theta;\pi) =$$

اثبات   ا توجه ه نت جه‌ی   تا   مخا ره‌ی لا نکس δ_X را ر است ا

$$\begin{aligned}R(\delta_X,\gamma_\theta) &= E_\theta\left[e^{a(\delta_X-\gamma_\theta)} - a(\delta_X-\gamma_\theta) - \ \right]\\ &= -aE_\theta[\delta_X-\gamma_\theta]\end{aligned}$$

همچن ن ا توجه ه تساوی دار م

$$\delta_X = -\frac{1}{a}\ln\left[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]\right]$$

ا توجه ه دو تساوی اخ ر و محد ودن تا $-\ln$ تا مخا ره‌ی زی ه صورت ز ر ساده می‌شود

$$\begin{array}{rcl} R(\delta_X,\gamma_\theta;\pi) & = & E_\pi[R(\delta_X,\gamma_\theta)] \\ & = & -aE_\pi E_\theta[\delta_X-\gamma_\theta] \\ & = & -aE_\pi E_\theta\left[-\frac{1}{a}\ln[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]]-\gamma_\theta\right] \\ & = & E_\pi E_\theta\left[\ln[E_X[e^{-a\gamma_\theta}]]\right]+aE_\pi[\gamma_\theta] \\ & \leq & E_\pi\left[\ln[E_\theta E_X[e^{-a\gamma_\theta}]]\right]+aE_\pi[\gamma_\theta] \\ & = & -aE_\pi[\gamma_\theta]+aE_\pi[\gamma_\theta] \\ & = & \end{array}$$

نا را ن تا مخا ره‌ی زی ا ستی صفر اشد □

مثال اگر $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ ک نمونه‌ی تصادفی از توز پواسون $\mathrm{P}(\lambda)$ اشد ا فرض توز پ شن $\mathrm{G}(\alpha,\beta)$ توز پس ن λ ن ز ه فرم گاما است عنی

$$\lambda|x \sim G(\alpha_x, \beta+n)$$

که در ن $\alpha_x = \alpha + \sum_{i=۱}^{n} x_i$ و α, β مقاد ر معلوم هستند
نا را ن راوردگر زی λ نسبت ه $\pi(\lambda)$ و تحت تا ز ان لا نکس ه شر $a > -\beta - n$ را ر است ا

$$\begin{array}{rcl} \hat{\lambda}_B & = & -\frac{1}{a}\ln\left[E_X[e^{-a\lambda}]\right] \\ & = & -\frac{\alpha_X}{a}\ln\left[\frac{\beta+n}{\beta+n+a}\right] \end{array}$$

ا توجه ه کتا ی و ز ودن $\hat{\lambda}_B$ می‌توان گفت که ا ن راوردگر تحت تا ز ان لا نکس مجاز است
ا تما ل α, β ه مقاد ر نزد ک صفر توز پ شن $\mathrm{G}(\alpha,\beta)$ ه توز پ شن و ی ا لا $\pi(\lambda) \propto \frac{۱}{\lambda}$ متما ل می‌گردد ولی توز پس ن ه فرم گاما است عنی

$$\lambda|x \sim G(\sum_{i=۱}^{n} x_i, n)$$

نا ار ن راوردگر ز تعم م افته‌ی λ نسبت ه توز ع پ ش ن $\pi(\lambda)$ و تحت تا ع ز ان لا نکس ه شر $a > -n$ را ر است ا

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{GB} &= -\frac{\;}{a}\ln[E_X[e^{-a\lambda}]] \\ &= \cdots = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{a}\ln\left[\frac{a}{n} + \quad\right] \end{aligned}$$

 راوردگر $\hat{\lambda}_{GB}$ همچن ن ک راوردگر لا نکس نا ار   رای λ است ه گونه‌ای که در شر   لا نکس نا ار   صدق می‌کند اما

$$\begin{aligned} R(\hat{\lambda}_{GB}, \lambda) &= E_\lambda\left[e^{a(\hat{\lambda}_{GB}-\lambda)} - a(\hat{\lambda}_{GB} - \lambda) - \quad\right] \\ &= a\lambda - n\lambda\ln\left[\frac{a}{n} + \quad\right] \neq \end{aligned}$$

پس بق ق ه‌ی   می‌توان گفت که راوردگر $\hat{\lambda}_{GB}$ رای هر توز ع پ ش ن داده شده   راوردگر ز λ ن ست

مراج

[1] Blackwell, D., and Girshick, M.A., Theory of games and statistical decisions., John Wiley , New York, 1954.

[2] Klebanov, L.B. (1974), Unbiased estimators and Sufficient statistics. Theory Prob. Applications ,19 ,2 ,pp. 379-383.

[3] Klebanov, L.B. (1976), A general definition of unbiasedness. Theory Probab. Applications, 21 ,571-585.

[4] Lehmann, E.L. (1951), A general concept of unbiasedness. Ann. Math.Statist. ,22 ,578-592.

[5] Noorbaloochi, S., and Meeden, G. (1983) , Unbiasedness as the dual of being bayes., JASA, Theory and Methods section, Vol. 78, No. 383, pp. 619-623.

 ا ری   معادلات د فرانس ل همراه ا معرفی نرم‌افزار متمت ک چاپ سوم دانشگاه صنعتی اصفهان