روردتوا چگال ا روش ماکس مم نتروپ زمان که چهارگشتاور اول ه توز معلوم است

علی قامحمد

ع و ه ت علم دانشگاه زنجان

چک ده کی از متداولتر ن کار ردهای نتروپی تع ن توز عهای مجهول است ا لاعات موجود صورت مقاد ر مورد انت ار ام د ر ا ی در دسترس وده و تا چگالی ر اساس اصل ماکس مم نتروپی ه دست می د اگر ا لا از توز فق محدود ه م انگ ن اشد نگاه ر اساس اصل ME[1] تا چگالی لاپلاس و اگر ا لا محدود ه م انگ ن و وار انس اشد تا چگالی نرمال خواهد ود ه دل ل ا نکه در پی رورد توز عها هست م پس هر چه ا لا از و ژگ های توز شتر اشد رورد توز هتر خواهد ود از جمله و ژگ های مهم توز عها اندازه‌ی چولگی و کش دگی نها است که ه تر ا گشتاورهای سوم و چهارم مشخص می‌شوند در ا ن مقاله ا لحا کردن چهارگشتاور اول ه عنوان ا لا تا چگالی را ر اساس اصل ME رورد می‌کن م

واژه‌ها کل د نتروپی ماکس مم نتروپی رورد توا چگالی

ان روش

مدل نتروپی ماکس مم[2] (MEM) رای تع ن پارامترهای مختلف ف ای احتمال تحت ق ود معلوم کار می‌رود مس له حاصل را در حالت کلی فق می‌توان ه صورت عددی حل کرد و حل ن مت من محاسبه ماکس مم ک تا چند متغ ری است ولی در ع ی حالتهای خاص جوا را می‌توان ه صورت تحل لی پ دا کرد ا ه ک دستگاه معادلات جبری خلاصه کرد در ا ن حث حالتهای خاص مع نی را در ن ر گرفته و حث را در مورد ق ودی که ه صورت ام دهای ر ا ی هستند پ ش می ر م نتا ج را می‌توان ا روشهای گوناگون که مت من محاسبه را لاگرانژ ا معادلات او لر هستند ه دست ورد ولی رای اغل مسا ل مورد ن ر کافی است لم ز ر را ه کار ر م

1) Maximum Entropy 2) *Maximum Entropy Model*

اگر $f(x)$ و $\phi(x)$ دو تا چگالی دلخواه اشند نگاه

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\ln(\phi(x))dx \leq -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\ln(f(x))dx \qquad (\ )$$

مثال تا چگالی ماکس مم نتروپی X را در ازه (,) ه دست ور د
در ا ن مثال $H(X)$ نتروپی متغ ر تصادفی X را تحت ا ن ق د که خارج از ازه (,) $f(x) =$ است ماکس مم می‌کن م   نتروپی متنا ر ه صورت ز ر داده می‌شود

$$H(X) = -\int_{\circ}^{\prime} f(x)\ln(f(x))dx$$

حال مس له پ دا کردن $f(x)$ است که انتگرال الا را ماکس مم کند اگر $f(x) =$ نگاه $H(X) =$ و ادعا می‌کن م که $H(X)$ ماکس مم است
در واق اگر $\phi(x)$ هر چگالی د گری اشد ه قسمی که خارج از ازه (,) $\phi(x) =$ نگاه نا ر را ه

$$-\int_{\circ}^{\prime} \phi(x)\ln(\phi(x))dx \leq -\int_{\circ}^{\prime} \phi(x)\ln(f(x))dx = \quad = H(X)$$

در نت جه تا چگالی ماکس مم نتروپی در ازه (,) ه صورت توز   کنواخت است البته دون تحم ل ه چ گونه ق ودی روی تا چگالی در خش عد توا چگالی ماکس مم نتروپی تحت ق ود داده شده مورد ررسی قرار می‌گ رند

۱ ۱ ق دها ی به صورت ام د ر ا ی برا ماکس مم ساز   نتروپی

اکنون رده‌ای از مسا ل را که مستلزم ق ودی ه صورت ام دهای ر ا ی است در ن ر می‌گ ر م چن ن مسا لی در مکان ک ماری متداول است   حث را ا حالت تک عدی شرو می‌کن م
می‌خواه م $f^*_X(x)$ چگالی متغ ر تصادفی X را تحت ا ن شرا   که ام دهای ر ا ی μ_i از n تا $g_i(X)$ که ه صورت ز ر داده شده‌اند را تع ن کن م

$$E\{g_i(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(x) f^*(x)dx = \mu_i, \qquad i = \ ,\ ,\ldots,n \qquad (\ )$$

 ا استفاده از را ه   نشان می‌ده م که MEM ه ا ن نت جه منجر می‌شود که $f^*_X(x)$ ا د ک تا   نما ی ه صورت ز ر اشد

$$f^*_X(x) = A\exp\{-\lambda_{\prime} g_{\prime}(x) - \lambda_{\text{۲}} g_{\text{۲}}(x) - \cdots - \lambda_n g_n(x)\} \qquad (\ )$$

که در ن λ_iها n مقدار ثا ت هستند که از ه دست می ند و A قسمی تع ن می‌شود که شر چگالی ودن رقرار اشد که ه ن ثا ت نرمال سازگو ند عنی

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\lambda_۱ g_۱(x)-\lambda_۲ g_۲(x)-\cdots-\lambda_n g_n(x))dx= \qquad (\ )$$

رای ا ن من ور فرض کن د $f(x)$ صورت داده شده است در ا ن صورت

$$\begin{aligned}
- & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))dx= \\
- & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left\{\ln(A)-\lambda_۱ g_۱(x)-\lambda_۲ g_۲(x)-\cdots-\lambda_n g_n(x)\right\}dx
\end{aligned}$$

لذا نتروپی $f(x)$ را ر است ا

$$H(X)=\lambda_۱\mu_۱+\lambda_۲\mu_۲+\cdots\lambda_n\mu_n-\ln(A) \qquad (\ )$$

رای اثبات کافی است نشان ده م که اگر $\phi(x)$ هر چگالی د گری غ ر از $f(x)$ اشد که در ق ود صدق کند نتروپی ن نمی‌تواند از مقدار را ه شتر اشد ا ن ن ز ه سادگی از نت جه می‌شود ز را

$$\begin{aligned}
- & \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\ln(\phi(x))dx\leq-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\ln(f^*(x))dx \\
= & -\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\left\{-\lambda_۱ g_۱(x)-\lambda_۲ g_۲(x)-\cdots-\lambda_n g_n(x)+\ln(A)\right\}dx \\
= & \ \lambda_۱\mu_۱+\lambda_۲\mu_۲+\cdots+\lambda_n\mu_n-\ln(A)
\end{aligned}$$

ا د توجه کرد که اگر خارج ک مجموعه مع ن R $f(x)=$ اشد نگاه $f(x)$ دو اره رای هر x در R ا داده می‌شود و ناح ه انتگرال‌گ ری در مجموعه R خواهد ود

مثال تا چگالی احتمال که زرگتر ن نتروپی را ا توجه ه ق د $E(X^۲)=\sigma^۲$ دارا است توز گاوسی ا م انگ ن صفر و وار انس $\sigma^۲$ می اشد

از را ه دار م

$$f^*(x|\sigma^۲)=A\exp(-\lambda x^۲)$$

از رفی ا توجه ه ق د داده شده روا ز ر ه دست می ند

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2} f^{*}(x|\sigma^{2})dx &= \sigma^{2} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Ax^{2}\exp(-\lambda x^{2})dx \\ &= \frac{\frac{1}{2}A\pi^{1/2}}{\lambda^{3/2}} = \sigma^{2} \qquad (\ )\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{*}(x|\sigma^{2})dx &= \quad \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A\exp(-\lambda x^{2})dx \\ &= A(\pi/\lambda)^{1/2} = \qquad (\ )\end{aligned}$$

حال از تقسم م را ه   ر را ه   خواه م داشت $\lambda = \frac{1}{2\sigma^{2}}$ از رفی از را ه   دار م

$$A = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} = \frac{}{\sqrt{\ \pi\sigma^{2}}}$$

پس تا   چگالی ME ه صورت ز ر است

$$f^{*}(x|\sigma^{2}) = \frac{}{\sqrt{\ \pi\sigma^{2}}}\exp(-\frac{}{\sigma^{2}}x^{2})$$

مثال فوق را می‌توان چن ن تعب ر کرد که در م ان همه توز عها ا وار انس مفروض توز   نرمال دارای شتر ن عدم حتم ت می اشد

ر رود توا   چگال   ا استفاده از روش ماکس مم نتروپ

در خش قبل توز عها ی را ا فرض ق ودی ه دست وردم و د د م که اگر ق ود محدود ه م انگ ن و وار انس اشند نگاه توز ME نرمال است   دل ل ا نکه در پی رورد توز عها هست م پس هر چه ا لا از و ژگ های توز   شتر اشد   رورد توز   هتر خواهد ود   از جمله و ژگ های مهم توز عها اندازه چاولگی و اندازه کش دگی نها است که ه ترت   ا گشتاورهای سوم و چهارم مشخص می‌شوند   در ا ن خش ا لحا   کردن چهار گشتاور اول ه عنوان ق ود ا لا   تا   چگالی ME را ه دست می ور م

۱ ارا ه الگور تم

فرض کن د X دارای تا چگالی $P(x)$ اشد می‌خواه م $P(x)$ را وری ه دست ور م که عبارت

$$W = -\int P(x)\ln(P(x))dx$$

تحت ق ود

$$\int x^i P(x)dx = \mu_i, \qquad i = \ , \ , \ , \ ,$$

ماکس مم شود که در ن $\mu_\circ = $ و $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ه ترت چهار گشتاور غ ر مرکزی تا چگالی $P(x)$ هستند

ا استفاده از را ه $P(x)$ ا د صورت

$$P(x|\underline{\Lambda}) = \exp(-\left\{\ + \lambda_\circ + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4\right\}) \qquad (\ )$$

اشد که در ن $A = \exp(-\lambda_\circ - \ )$ ثا ت نرمال ساز است و $\underline{\Lambda} = (\lambda_\circ, \lambda_1, \cdots, \lambda_4)$ ردار مجهول است که ا د تحت ق ود داده شده تع ن شوند

رای تع ن توز ME ا د λ_iها مشخص شوند ا قرار دادن معادله در پنج ق د گفته شده ک دستگاه معادله و مجهولی که ر اساس λ_iها غ ر خ ی هستند ه دست می د حل ا ن دستگاه غ ر خ ی خا ر ا نکه هر ک از معادله‌ها ن ز انتگرالها ی از تا نما ی است مشکل می اشد و ه روش تحل لی نمی‌توان نرا حل کرد رای حل ا ن دستگاه از روش ن وتن که ک روش عددی است و در حالتهای و ژه ن ز تقر بهای خو ی از جوا ها ه دست می‌دهد استفاده می‌شود

اگر قرار ده م

$$\begin{aligned} G_k(\underline{\Lambda}) &= \int x^k \exp\left\{-(\ + \lambda_\circ + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_4 x^4)\right\} dx \\ &\le \ k \le \end{aligned} \qquad (\ )$$

نگاه

$$\mu_i = G_i(\underline{\Lambda}), \qquad i = \ , \ , \ , \ ,$$

حال اگر قرار ده م

$$g_{ij} = \left\{\frac{\partial G_i(\underline{\Lambda})}{\partial \lambda_j}\right\}_{\underline{\Lambda}=\underline{\Lambda}^\circ} \qquad \le i \le \ , \qquad \le j \le$$

نگاه ا استفاده از قاعده لا ن تز خواه م داشت

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= -\int x^{i+j}\exp\left[-(\ \ +\lambda_۰+\lambda_۱ x+\cdots+\lambda_۴ x^۴)\right]dx \\
&= -G_{i+j}(\underline{\Lambda}^\circ), \qquad\qquad \leq i+j\leq\ \ ,\quad \leq i\leq\ \ ,\quad \leq j\leq
\end{aligned}
$$

ا سط ت لر توا $G_i(\underline{\Lambda})$ $i=\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,$ حول مقدار اول ه $\underline{\Lambda}^\circ=(\lambda_۰^\circ,\lambda_۱^\circ\ldots,\lambda_۴^\circ)$ دار م

$$
\begin{aligned}
\mu_i=G_i(\underline{\Lambda})\simeq G_i(\underline{\Lambda}^\circ) &+ (\lambda_۰-\lambda_۰^\circ)g_{i۰}+(\lambda_۱-\lambda_۱^\circ)g_{i۱}+\cdots \\
&+ (\lambda_۴-\lambda_۴^\circ)g_{i۴}, \qquad \leq i\leq \qquad\qquad (\quad)
\end{aligned}
$$

هما ن ورکه ملاحظ ه می‌شود g_{ij} گشتاورهای $(i+j)$ام توز ع ماکس مم نتروپی می اشد از نجا که $g_{ij}=-G_{i+j}(\underline{\Lambda}^\circ)$ معادلات را ه را می‌توان ه صورت دستگاه معادلات

$$
\begin{pmatrix}
G_۰ & G_۱ & G_۲ & G_۳ & G_۴\\
G_۱ & G_۲ & G_۳ & G_۴ & G_۵\\
G_۲ & G_۳ & G_۴ & G_۵ & G_۶\\
G_۳ & G_۴ & G_۵ & G_۶ & G_۷\\
G_۴ & G_۵ & G_۶ & G_۷ & G_۸
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}\delta_۰\\ \delta_۱\\ \delta_۲\\ \delta_۳\\ \delta_۴\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}G_۰-\mu_۰\\ G_۱-\mu_۱\\ G_۲-\mu_۲\\ G_۳-\mu_۳\\ G_۴-\mu_۴\end{pmatrix}
$$

ا ه اختصار $J(\underline{\Lambda})\delta=\underline{\mu}$ نوشت که در ن δ_jها مولفه‌های ردار $\underline{\delta}$ عبارتند از $\delta_j=\lambda_j-\lambda_j^\circ$ $\leq j\leq$ و $J(\underline{\Lambda})$ ک ماتر س ($\times$) است که عناصر ن از را ه رای هر $\underline{\Lambda}$ مشخص ه دست می د و مولفه‌های ردار $\underline{\mu}$ از را ه $\mu_i=G_i-\mu_i$ $\leq i\leq$ محاسبه می‌شوند

ا تدا ا فرض ا نکه مقدار اول ه ردار $\underline{\Lambda}$ را ر $\underline{\Lambda}^\circ$ است $\underline{\delta}$ از حل دستگاه معادلات خ ی

$$
J(\underline{\Lambda}^\circ)\delta=\underline{\mu}
$$

 ه دست می د نگاه $\lambda_j^۱$ها را از را ه $\lambda_j^۱=\delta_j^\circ+\lambda_j^\circ$ $\leq j\leq$ محاسبه کرده در نت جه ردار جد د $\underline{\Lambda}^۱$ صورت $\underline{\Lambda}^۱=(\lambda_۰^۱,\lambda_۱^۱,\ldots,\lambda_۴^۱)$ ه دست می د حال $\underline{\Lambda}^۱$ را ه جای $\underline{\Lambda}^\circ$ قرار داده عمل ات را دو اره تکرار می‌کن م تا زمانی که مقاد ر $\underline{\delta}$ ه اندازه کافی کوچک شوند نگاه $\underline{\Lambda}$ ه دست مده از ا ن $\underline{\delta}$ و مقدار $\underline{\Lambda}$ قبلی جوا مس له خواهد ود روش گفته شده روش ن وتن رای حل دستگاههای غ ر خ ی است که انت ار می‌رود ه ورکلی همگرا ی درجه دوم دهد ه شر ا نکه مقدار غاز ن ه حد کافی دق ق اخت ار شده اشد ماتر س $J(\underline{\Lambda})$ ماتر س ژاکو ن نام ده می‌شود ک عف اساسی مشخص در روش ن وتن از لزوم معکوس پذ ر ودن ماتر س $J(\underline{\Lambda})$ در هر مرحله رای حل دستگاه خ ی نشات می‌گ رد ا ن مشکل ه علت ساختار ماتر س $J(\underline{\Lambda})$ در ا ن مس له خا ر ا نکه ماتر س $J(\underline{\Lambda})$ رای هر $\underline{\Lambda}$ مشخص

ک ماتر س هم شه مثبت است مرتف می‌شود رای اثبات ا نکه $J(\underline{\Lambda})$ هم شه مثبت است ه ترت ز ر عمل می‌کن م

اگر $\underline{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ردار غ ر صفر اشد نگاه

$$\begin{aligned}
\underline{\Lambda}' J(\underline{\Lambda})\underline{\Lambda} &= \lambda_0^2 G_0 + \quad \lambda_0\lambda_1 G_1 + (\lambda_1^2 + \quad \lambda_0\lambda_2)G_2 \\
&+ \quad (\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)G_3 + (\lambda_2^2 + \quad \lambda_0\lambda_4 + \quad \lambda_1\lambda_3)G_4 \\
&+ \quad (\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)G_5 + (\lambda_3^2 + \quad \lambda_2\lambda_4)G_6 \\
&+ \quad \lambda_3\lambda_4 G_7 + \lambda_4^2 G_8
\end{aligned}$$

حال اگر مقاد ر $G_i(\underline{\Lambda})$ را از را ه در را ه الا جا گذاری کن م خواه م داشت

$$\begin{aligned}
\underline{\Lambda}' J(\underline{\Lambda})\underline{\Lambda} &= \int (\lambda_0^2 + \quad \lambda_0\lambda_1 x + (\lambda_1^2 + \quad \lambda_0\lambda_2)x^2 + \quad (\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)x^3 \\
&+ \quad (\lambda_2^2 + \quad \lambda_0\lambda_4 + \quad \lambda_1\lambda_3)x^4 + (\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)x^5 \\
&+ \quad (\lambda_3^2 + \quad \lambda_2\lambda_4)x^6 + \quad \lambda_3\lambda_4 x^7 + \lambda_4^2 x^8) P(x|\underline{\Lambda}))dx \\
&= \int \left[\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4\right]^2 P(x|\underline{\Lambda})dx
\end{aligned}$$

از نجا که $P(x|\underline{\Lambda}) >$ پس $\underline{\Lambda}' J(\underline{\Lambda})\underline{\Lambda} >$ در نت جه ماتر س $J(\underline{\Lambda})$ در هر تکرار هم شه مثبت وده پس معکوس پذ ر است در عمل ا ن روش عموما ه صورت ک روش دو مرحله‌ای انجام می‌شود ا تدا ک ردار $\underline{\delta}$ پ دا می‌شود که در را ه $J(\underline{\Lambda}_0)\underline{\delta} = \underline{\mu}$ صادق اشد عد از ا ن مرحله تقر جد د عنی $\underline{\Lambda}^1$ را می‌توان ا افزودن $\underline{\delta}$ ه Λ^0 ه دست ورد حال ا ن دو مرحله را تا زمانی که δ_jها ه اندازه کافی کوچک شوند ادامه می‌ده م رای م العه شتر ا ن ا ن روش ه وردن و فا رز مراجعه شود

رای حل انتگرالهای را ه رای هر $\underline{\Lambda}$ مشخص می‌توان از قاعده س مپسون استفاده کرد رنامه کامپ وتری ا ن روش رای ه دست وردن توا چگالی ME در قسمت پ وست مده است

بررسی کتا ی تا ع چگالی ماکس مم نتروپی

محاسبه پارامترهای توز ME مستلزم حل ک دستگاه معادلات غ ر خ ی است در نت جه ممکن است دستگاه دارای چند جوا اشد که در ا ن صورت ه تعداد جوا ها توز ماکس مم نتروپی خواه م داشت در ا ن خش نشان می‌ده م که توز ME کتا است

ق ه فرض کن د $F : R^n \to R^m$ ک نگاشت از R^n ه توی R^m اشد ه وری که $n \leq m$ و $F \in L'(E)$ اگر رای ک مقدار مانند c ع و E $F'(c)$ ک ه ک

اشد نگاه عدد مثبتی مانند δ موجود است قسمی که تحد د F ر $N_\delta(c)$ ک ه ک اشد $F \in L'(E)$ عنی مشتق اول F روی E موجود و پ وسته است

اث ات رای اثبات ه رود ن مراجعه شود

حال نگاشت $F : R^5 \to R^5$ را ه صورت

$$F(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (G_0(\underline{\Lambda}), G_1(\underline{\Lambda}), G_2(\underline{\Lambda}), G_3(\underline{\Lambda}), G_4(\underline{\Lambda}))$$

تعر ف می‌کن م که در ن $G_i(\underline{\Lambda})$ از را ه محاسبه می‌شود در ا ن حالت ژاکو ن تبد ل $J(\underline{\Lambda})$ چون $J(\underline{\Lambda})$ رای هر $\underline{\Lambda}$ مشخص متقارن و هم شه مثبت است پس رای هر $\underline{\Lambda} \in R^5$ $F'(\underline{\Lambda}) = J(\underline{\Lambda})$ ک ه ک است در نت جه رای هر ناح ه محد دلخواه در R^5 نگاشت F ک ه ک خواهد ود نا را ن اگر $\underline{\Lambda}$ در ق ود پنجگانه گفته شده صادق اشد کتا خواهد ود ز را

$$G_0(\underline{\Lambda}) = \mu_0, \quad G_1(\underline{\Lambda}) = \mu_1, \quad G_2(\underline{\Lambda}) = \mu_2, \quad G_3(\underline{\Lambda}) = \mu_3, \quad G_4(\underline{\Lambda}) = \mu_4.$$

ا فرض ا نکه $\mu_1 =\ /$ $\mu_2 =\ /$ $\mu_3 = -\ /$ $\mu_4 =\ /$ ا استفاده از رنامه‌ی کامپ وتری ز ر مقاد ر $\lambda_0 = -\ /$ $\lambda_1 =\ /$ $\lambda_2 =\ /$ $\lambda_3 =\ /$ $\lambda_4 =\ /$ ه دست می ند در نت جه تا چگالی ماکس مم نتروپی ا چهار گشتاور اول ه فوق ه صورت ز ر خواهد ود

$$f(x) = \exp(-\left\{\ -\ /\ \ +\ /\ \ x +\ /\ \ x^2 +\ /\ \ x^3\right\})$$

۳ بررسی ک مدل لوج ت دو پارامتر

رای مقا سه کارا ی روش ماکس مم نتروپی در تع ن توا چگالی حاش ه‌ای ه ررسی زی ک مدل لوج ت دو پارامتری که توس زلنر و روسی ه روش عددی و س مجانبی مورد ررسی قرارگرفته است می‌پرداز م و در پا ان مس له را ا روش ماکس مم نتروپی ن ز مورد م العه قرار داده و نتا ج ا ن دو روش را ا هم مقا سه خواه م کرد

زلنر و روسی نمونه‌ای ه حجم از مدل لوج ت دو پارامتری ز ر

$$p_i = F(\beta_0 + \beta_1 x_i) = \frac{}{\ + \exp(-\beta_0 - \beta_1 x_i)}, \qquad i =\ ,\ , \ldots, n.$$

ا فرض ا نکه $\beta_0 = -\ $ و $\beta_1 =\ /$ ه ترت ز ر شب ه‌سازی کردند ا تدا مقاد ر x_i ها را از توز نرمال استاندارد تول د کرده در نت جه مقاد ر p_i ها مشخص می‌شوند رای تول د y_iها ا و ژگی توز رنولی ا تدا z_iها را از توز کنواخت $(\ ,\ )$ انتخا کرده اگر $p_i \le z_i$ اشد نگاه $y_i =$ در غ ر ا ن صورت $y_i =$ در ن ظر گرفته می‌شود

جدول مقادیر گشتاورهای توزیع حاشیه‌ای β_0

		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
$N=$	گشتاورهای دقیق	$-$		$-$	
	گشتاورهای مجانبی	$-$			

جدول مقادیر گشتاورهای توزیع حاشیه‌ای β_1

		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
$N=$	گشتاورهای دقیق				
	گشتاورهای مجانبی				

نتایج بررسیهای زلنر و روسی در جداول و آمده است. از آنجا که محاسبه انتگرالها به روش تحلیلی ممکن نبوده، آنها از روشهای عددی استفاده کردند و گشتاورهای دقیق توزیع پسین را بوسیله روش انتگرالگیری سیمپسون دو متغیری با انتخاب نقاط زیر فاصله روی هر دو محور محاسبه کردند. مقادیر گشتاورها با استفاده از روش بسط مجانبی در ذیل مقادیر دقیق در جدول درج شده است. برای مطالعه بیشتر به زلنر و روسی مراجعه کنید.

حال با استفاده از روش ماکسیمم انتروپی با مشخص بودن چهار گشتاور اول به متغیرهای تصادفی β_0 و β_1 توزیع آنها را برآورد می‌کنیم. با به کار بردن الگوریتم گفته شده مقادیر λ_0، λ_1، λ_2، λ_3 و λ_4 برای β_0 و β_1 طبق جدول می‌باشد. پارامترهای تابع چگالی ماکسیمم انتروپی β_0 و β_1 با استفاده از مقادیر گشتاورهای دقیق که در جداول و آمده است محاسبه شده‌اند.

زلنر و روسی برای مقایسه کارایی روش بسط مجانبی، مقادیر تابع چگالی پسین دقیق و بسط مجانبی β_0 و β_1 را برای نقاط مختلف محاسبه کردند. برای مقایسه کارایی روشهای بسط مجانبی و ماکسیمم انتروپی، مقادیر تابع چگالی ماکسیمم انتروپی نیز برای این نقاط محاسبه

جدول مقادیر پارامترهای چگالی ماکسیمم انتروپی برای β_0 و β_1

		λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
$N=$	β_0					
	β_1		$-$			

شده که نتا ج ن در جداول   و   رای ک نمونه ه حجم   مده است

 ا ررسی ا ن دو جدول ملاح ه می‌شود که روش ماکس مم نتروپی ه مرات   از روش سه مجانبی هتر عمل کرده‌است   ز را مقاد ر تا   چگالی ماکس مم نتروپی نسبت ه مقاد ر تا چگالی مجانبی ه مقاد ر تا   چگالی پس ن دق ق نزد کتر است

رنامه کامپ وتر   تع ن تا   چگال   ماکس مم نتروپ

ا ن رنامه ا فر   ات ز ر در نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است

$$\underline{\Lambda}^{\circ} = \underline{b}, \qquad \underline{\mu} = \underline{M}, \qquad \underline{\delta} = \underline{a}.$$

```
a=[1;1;1;1;1]
b=[b0;b1;b2;b3;b4]
M=(M0;M1;M2;M3;M4]
While(a>0/0001)

for   m=0
f(m)=x m exp( (1 b0 b1x b2x 2 b3x 3 b4x 4);
G(m)=quad (f(m)  1000 1000);
end
A=[G(0) G(1) G(2) G(3) G(4); G(1) G(2) G(3) G(4) G( );
G(2) G(3) G(4) G( ) G( ); G(3) G(4) G( ) G( ) G( );
G(4) G( ) G( ) G( ) G( )];
h=[G(0) M0; G(1) M1; G(2) M2; G(3) M3; G(4) M4];
a=A  h;
b=a b;
end

b
```

جدول مقادر تا چگالی حاشه‌ای پارامتر β_0

مجانبی										
تروپی										
دقت										
مقادر	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

جدول   مقاد ر تا   چگالی حاش ه‌ای پارامتر β_1

مجانبی	تجربی	دقوق	مقاد ر
			–
			–
			–

مراج

[1] Agmon, N., Alhassid, Y. and Levine, R. D. (1979), An Algoritm for Finding the Distribution of Maximum Entropy, J. of Computational Physics, 30, 250-259.

[2] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (1989), Numerical Analysis, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

[3] Gokhale, D. V. (1975), Maximum Entropy Characterizations of some Distributions, in: G. P. Partial et al., eds. Statistical Distribution in Scientific Work, Vol. 3, No. 32.

[4] Golan, A., Judge, G. G. and Robinson, S. (1994), Recovering Information from Incomplete or Partial Multisectoral Economic Data, Review of Economic and Statistics, 76, 541-549.

[5] Jessop, A. (1994), An Introduction to information Entropy and Statistics, New York Londone, Ellis Horwood.

[6] Majernik, V. (2000), Marginal Probablity Distribution Determined By the Maximum Entropy Method, Journal of Econometrica, Vol. 45, No. 2, 171-181.

[7] Royden, H. L. (1968), Real Analysis MACMILLAN PUBLISHING CO.,INC.

[8] Zellner, A. and Rossi, P. (1984), Bayesian Analysis of Dichotomous Quantal Response Models, Journal of Econometrics, 25, 365-393.

[9] Zellner, A. and Highfield, R. A. (1988), Calculation of Maximum Entropy Distribution and Approximate of Marginal Posterior Distribution, Journal of Econometrics, 37, 195-206.

روورد توز عهای ماکسمم نتروپی و کار ردهای ن پا ان‌نامه دوره کارشناسی ارشد علی قامحمدی دانشگاه تر ت مدرس دانشکده علوم پا ه گروه مار