مقا سه ا لا ف شر نهفته در رکوردها ع ف و قو ا مشاهدات مستقل و همتوز

جعفر احمد مص فی رزمخواه بهاره خ ستانه

گروه مار دانشکده علوم ر ا دانشگاه فردوس

چک ده در ک دنباله از زما شات تخر بی روش نمونه‌گ ری ر اساس رکوردها ه جهت محفو ماندن نمونه‌ها حا ز اهم ت می اشد ررسی م زان ا لا ف شر نهفته در رکوردهای ع ف و قوی هدف اصلی ا ن مقاله است در ا ن مقاله ا تدا ه تعر ف رکوردهای ع ف و قوی و تع ن توز دق ق نها می‌پرداز م سپس در حالت کلی ه فرمول ندی ا لا ف شر نهفته در رکوردهای ع ف و قوی می‌پرداز م همچ ن توز ع‌های گسسته خاصی را در ن ر گرفته و م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد ع ف و نخست ن m رکورد قوی را در ن ا همان تعداد مشاهده $(i.i.d)$ مقا سه می‌ک ن م

واژه‌ها کل د ا لا ف شر رکوردهای ع ف رکوردهای قوی توز های گسسته

مقدمه

در ک دنباله از مشاهدات مستقل و همتوز رکوردها مقاد ری هستند که از مشاهدات قبل از خود زرگتر و ا کوچکتر اشند

رکوردها در مسا لی از قب ل زمون ول عمر ق عات الکترون کی گران ق مت و ا زمون استقامت الوارهای چو داده‌های مر و ه مسا قات ورزشی هواشناسی ژوف ز ک زلزله‌نگاری و مانند ن نقش شا ان توجهی ا فا می‌کنند م العات ماری رکوردها در سال توس $Chandler$ شرو شد پس از ن م العات قا ل ملاح ه‌ای روی رکوردها و ماره‌های مر و ه انجام شده است که از ن جمله می‌توان ه $Nevzorov$ سال $Nagaraja$ سال $Balakrishnan$ و $Nagaraja$ سال اشاره نمود

ا لا ف شر که مو و اصلی ا ن مقاله می اشد در نامساوی کرامر را و رای دست وردن کران پا ن وار انس رو‌ردگرهای ناار و همچ ن دروار انس توز حدی رو‌ردگرهای درستنما ی ماکز مم اهر می‌شود اخ را ررسی ا لا ف شر نهفته در ماره‌های رکوردی در توز ع‌های پ وسته مورد توجه محقق ن ز ادی از جمله $Hofmann$ و $Nagaraja$ سال $Ahmadi$ و $Arghami$ سال و قرارگرفته است همچ ن احمدی و رزمخواه سال ا لا ف شر نهفته درمشاهدات $i.i.d.$ از توز $BURR\ XII$ را رای پارامتر شکل و احمدی

رزمخواه و خ سال ا لا ف شر نهفته در مارەهای رکوردی همان توز را مورد ررسی قرار دادەاند در توز عهای گسسته نز م العاتی توسط $Balakrishnan$ $Stepanov$ و $Hafmann$ سال صورت گرفتەاست

ما در ا ن مقاله ا تدا در خش دوم تعار ف نمادها و لمهای مورد نز از را ان می‌کن م و سپس در خش سوم توز رکوردهای عف و ا لا ف شر نهفته در نها را مورد ررسی قرار می‌ده م در خش چهارم م زان ا لا ف شر نهفته در رکوردهای قوی را رای توز عهای گسسته در حالت کلی ان می‌کن م در خش پنجم سعی می‌کن م م ال ان شده در خش دوم و سوم را در مورد توز زتا ه کار ر م و سرانجام ه مقا سه ا لا ف شر نهفته در رکوردهای عف و قوی ا همان تعداد مشاهده $i.i.d.$ از توز زتا می‌پرداز م

لازم ه تو ح است که خش‌های و اقتباس از مقاله $Balakrishnan$ $Stepanov$ و $Hafmann$ سال می اشد

تعار ف نمادها و لم‌ها

فرض کن د $X_۱, X_۲, \cdots$ متغ رهای تصادفی مستقل و همتوز از جامعه‌ای ا تا توز F اشند در ا نصورت دنباله زمان رکوردها $L(n)$ مقاد ر رکوردها $X_{(n)}$ زمان رکوردهای عف $L^w(n)$ و مقاد ر رکوردهای عف $X^w_{(n)}$ رای $n \geq$ ه صورت ز ر تعر ف می‌شوند

تعر ف ۱ مقاد ر رکوردها X_j ک رکورد الا است هر گاه از تمام مقاد ر ما قبل خود زرگتر اشد نا را ن $X_۱$ را عنوان اول ن رکورد درنظ ر می‌گ ر م و ه $X_{(۱)}$ نشان می‌ده م

تعر ف زمان رکوردها شماره سر الی که nام ن رکورد در ن رخ می‌دهد خود ک متغ ر تصادفی است و ه زمان رکورد معروف است در ا ن مقاله زمان nام ن رکورد را ه $L_{(n)}$ نشان می‌ده م

تعر ف ۳ مقاد ر رکوردها عف X_j ک رکورد عف الا است هرگاه از تمام مقاد ر ماقبل خود زرگتر ا مساوی ا نها اشد نا را ن $X_۱$ را عنوان اول ن رکورد عف درنظ ر می‌گ ر م و ه $X^w_{(۱)}$ نشان می‌ده م

تعر ف زمان رکوردها عف متغ ر تصادفی شماره سر الی که nام ن رکورد عف در ن رخ می‌دهد ه زمان رکورد عف معروف است در ا ن مقاله زمان nام ن رکورد عف را ه $L^w_{(n)}$ نشان می‌ده م

د هی است که اگر توز جامعه پ وسته اشد ن مقاد ر رکوردها و مقاد ر رکوردهای عف تفاوتی وجود نخواهد داشت رکوردهای عف معمولا وقتی درنظ ر گرفته می‌شوند که توز جامعه F روی شبکه‌ای از اعداد حق قی تعر ف شود که دون از دست رفتن کل ت مساله ه حالتی محدود می‌شود که تک ه‌گاه متغ ر تصادفی جامعه اصلی $\{\ ,\ ,\ , \cdots, N\}$ اشد که $N \leq \infty$ در ا ن حالت متغ رهای تصادفی ز ر را تعر ف می‌کن م

تعر ف متغ ر تصادفی η_i را عنوان تعداد رکوردهای ع فی در ن ر می‌گ رم که در نق ه iام تک ه‌گاه رخ می‌دهند $i = \ , \ , \cdots , N$

ن η_iها و توز رکوردهای ع ف را ه ز ر رای $\leq m < N$ و $n \geq$ رقرار است

$$\left\{ X^{w}_{(n)} > m \right\} \equiv \left\{ \sum_{i=\circ}^{m} \eta_i < n \right\} \qquad (\ )$$

تعر ف متغ ر تصادفی $\eta_i^{(m)}$ را عنوان تعداد رکوردهای ع فی در ن ر می‌گ رم که از ن نخست ن m رکورد ع ف در نق ه iام تک ه‌گاه رخ می‌دهند نا ران $\eta_i^{(m)} = \ , \ , \cdots , m$ که در ن $i = \ , \ , \cdots , N$ مجموعهای جزی ا ن متغ رها را ه صورت ز ر تعر ف می‌کن م

$$S^{(m)}(k) = \sum_{i=\circ}^{k} \eta_i^{(m)}, \quad S^{(m)}(-\ ) \equiv \ .$$

تعر ف متغ ر تصادفی η_i' را عنوان تعداد رکوردهای قوی در ن ر می‌گ رم که در نق ه iام تک ه‌گاه رخ می‌دهند نا ران $\eta_i' = \ , \ $ که در ن $i = \ , \ , \cdots , N$ مجموعهای جزی ا ن متغ رها را ه‌صورت ز ر تعر ف می‌کن م

$$S'(k) = \sum_{i=\circ}^{k} \eta_i', \quad S'(-\ ) \equiv \ .$$

تعر ف ۸ متغ ر تصادفی $\eta_i'^{(m)}$ را عنوان تعداد رکوردهای قوی در ن ر می‌گ رم که‌از ن نخست ن m رکورد قوی در نق ه iام تک ه‌گاه رخ می‌دهند نا ران $\eta_i'^{(m)} = \ , \ $ که در ن $i = \ , \ , \cdots , N$ مجموعهای جزی ا ن متغ رها را ه صورت ز ر تعر ف می‌کن م

$$S'^{(m)}(k) = \sum_{i=\circ}^{k} \eta_i'^{(m)}, \quad S'^{(m)}(-\ ) \equiv \ .$$

لم ۱ فرض کن د $X_۱, X_۲, \cdots$ دنباله‌ای از مشاهدات مستقل و همتوز ا تا توز F اشند در ا نصورت

الف متغ رهای تصادفی η_i که در الا تعر ف شدند مستقل هستند

توز η_iها ه صورت ز ر است

$$P(\eta_i = k) = \frac{P(X_۱ > i)}{P(X_۱ \geq i)} \left(\frac{P(X_۱ = i)}{P(X_۱ \geq i)} \right)^{k}, k = \ , \ , \ , \cdots$$

ج رای $N < \infty$ دار م $\eta_N = \infty, a.s.$

برهان   ا توجه ه استقلال X_iها و تعر ف η_iها قسمت الف د هی است   رای قسمت   ه صورت ز ر استدلال می‌کن م

از دنباله X_jها فق   متغ رها ی را که زرگتر ا مساوی ا i هستند در ن ر می‌گ ر م   ا ن عمل روی متغ رهای η_i اثر نمی‌گذارد و در حق قت ا ا ن کار فق   سمت چپ نق ه i را ر ده‌ا م متغ رهای اق مانده را ا $\{Y_۱, Y_۲, \cdots\}$ نشان می‌ده م   متغ رهای جد د ن ز مستقل و همتوز هستند و در شر   ز ر صدق می‌کنند

$$P(Y_n < x) = P(X_n < x | X_n \geq i), n = \ , \ , \cdots$$

اکنون پ شامد $\eta_i = m$ معادل است ا پ شامد ا نکه $Y_۱, Y_۲, \cdots, Y_m$ مساوی i اشند و $Y_{m+۱}$ زرگتر از i اشد   نا را ن دار م

$$\begin{aligned} P(\eta_i = m) &= P(Y_۱ = i, Y_۲ = i, \ldots, Y_m = i, Y_{m+۱} > i) \\ &= \left(P(Y_۱ = i)\right)^m P(Y_۱ > i) \end{aligned}$$

و از رفی

$$\begin{aligned} P(Y_۱ = i) &= P(X_۱ = i | X_۱ \geq i) \\ &= \frac{P(X_۱ = i, X_۱ \geq i)}{P(X_۱ \geq i)} \\ &= \frac{P(X_۱ = i)}{P(X_۱ \geq i)} \end{aligned}$$

در نت جه دار م

$$P(\eta_i = m) = \left(\frac{P(X_۱ = i)}{P(X_۱ \geq i)}\right)^m \frac{P(X_۱ > i)}{P(X_۱ \geq i)}.$$

از رفی اگر N متناهی اشد از نجاکه در ا ن مقاله رکوردهای   ع ف الا در ن رگرفته شده‌اند رای ک دنباله از متغ رهای تصادفی مستقل در خر ن   عنی Nام ن نق ه تک ه‌گاه ی‌نها ت رکورد   ع ف الا اتفاق می‌افتد ز را عد از زمانی که رای اول ن ار در نق ه Nام تک ه‌گاه ک رکورد رخ می‌دهد فق   مشاهداتی را ه عنوان رکورد   ع ف در ن ر می‌گ ر م که ا N را ر اشند و رای ک دنباله از متغ رهای تصادفی تعداد ا ن رکوردها ه   ور قر   ه ق ن ی‌نها ت است   ■

لم   فرض کن د $\{\eta_۰, \eta_۱, \cdots, \eta_m\}$ متغ رهای تصادفی هندسی مستقل ا تا   جرم احتمال $P(\eta_i = k) = p_i q_i^k, k = \ , \ , \cdots, i = \ , \ , \cdots, m$ اشند در ا نصورت اگر تمام q_iها

متفاوت اشند تا   جرم احتمال $\sum_{i=0}^{m}\eta_i$ ه صورت ز ر است

$$P\left(\sum_{i=0}^{m}\eta_i = k\right) = \sum_{i=0}^{m} p_i q_i^{k+m} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i} \qquad (\ )$$

و اگر $q_0 = q_1 = \cdots = q_m = q$ توز $\sum_{i=0}^{m}\eta_i$ دوجمله‌ای منفی خواهد ود

$$P\left(\sum_{i=0}^{m}\eta_i = k\right) = \binom{m+k}{k} p^{m+1} q^k, \quad k = \ ,\ ,\cdots. \qquad (\ )$$

برهان   رای ملاح ه جز ات اثبات رجو شود ه Sen و Balakrishnan سال ■

رکوردها   ع ف

در ا ن خش ا تدا توز   ماری رکوردهای   ع ف را مشخص می‌کن م و سپس ه ررسی م زان ا لا   ف شر نهفته در رکوردهای   ع ف استخراج شده از ک دنباله از مشاهدات مستقل و همتوز   از جوام گسسته می‌پرداز م

۱ ۳   توز   رکوردها   ع ف

فرض کن د X_iها دنباله‌ای از متغ رهای تصادفی گسسته مستقل از جامعه‌ای ا تا   توز F و تک ه‌گاه $\{\ ,\ ,\cdots,N\}$ اشند که $N \leq \infty$ همچن ن فرض کن د

$$q_i = \frac{P(X_1 = i)}{P(X_1 \geq i)}, \qquad \leq i \leq m < N \qquad (\ )$$

$$p_i = \ - q_i = \frac{P(X_1 > i)}{P(X_1 \geq i)}, \qquad \leq i \leq m < N$$

در ا نصورت توز   رکوردهای   ع ف $X_{(n)}^w$ ه مقادر q_iها ستگی دارد   ور که
الف اگر تمام q_iها متفاوت اشند دار م   ا استفاده از   و   می‌توان نوشت

$$P\left(X_{(n)}^w \leq m\right) = P\left(\sum_{i=0}^{m}\eta_i \geq n\right) = \sum_{k=n}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^{m}\eta_i = k\right)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=\circ}^{m} p_i q_i^{k+m} \prod_{\substack{j=\circ \\ j\neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i} = \sum_{i=\circ}^{m} p_i q_i^{m} \prod_{\substack{j=\circ \\ j\neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i} \sum_{k=n}^{\infty} q_i^k$$

در نتـ جه دار م

$$P\left(X_{(n)}^{w} \leq m\right) = \sum_{i=\circ}^{m} q_i^{m+n} \prod_{\substack{j=\circ \\ j\neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i} \qquad (\ )$$

اگر $q_\circ = q_\text{۱} = \cdots = q_m = q$ ه ور مشا ه ا استفاده از و دار م

$$P\left(X_{(n)}^{w} \leq m\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{m+k}{k} p^{m+\text{۱}} q^k, \quad k = \ , \ , \ldots . \qquad (\ )$$

۳ ا لا ف شر در رکوردها ع ف

فرض کنـ د X_iها دنباله‌ای از متغ رهای تصادفی گسسته مستقل از جامعه‌ای ا تا توز F و تکـ ه‌گاه $\{ \ , \ , \cdots , N\}$ اشند که $N \leq \infty$ علاوه $X_{(\text{۱})}^{w}, \cdots , X_{(n)}^{w}$ نخستـ ن m رکورد ع ف استخراج شده از ا ن دنباله اشد هدف از ا ن خش تع ن م زان ا لا ف شر نهفته در $X_{(\text{۱})}^{w}, \cdots , X_{(n)}^{w}$ در اره پارامتر θ می اشد ا توجه ه تعر ف د هی است که $\eta_i^{(m)}$ها هندسی نـ ستند ز را $\eta_i^{(m)} \leq m$ و از نجا که

$$P\left(\eta_\circ^{(m)} = \ldots = \eta_m^{(m)} = \ \right) = \ \neq \prod_{i=\circ}^{m} P\left(\eta_i^{(m)} = \ \right)$$

مستقل نـ ز نـ ستند البته ا شر ی کردن روی $S^{(m)}(k - \ )$ $\eta_k^{(m)}$ تقر با هندسی است ا ا ن تفاوت که تمام احتمال دم ن در خر ن نق ه تکـ ه‌گاه متمرکز شده است عنی

$$P\left(\eta_k^{(m)} = l | S^{(m)}(k - \ ) < m\right) = \begin{cases} p_k q_k^l; & l < m - S^{(m)}(k - \ ) \\ q_k^{m - S^{(m)}}; & l < m - S^{(m)}(k - \ ) \end{cases} \qquad (\ )$$

که در ن $\ \leq l \leq m - S^{(m)}(k - \ )$ $k \geq$ و q_iها در را ه تعر ف شده‌اند وا ح است که نا ه تعر ف $S^{(m)}(k - \ ) = m$ دلالت ر ا ن دارد که

$$\eta_k^{(m)} = \eta_{k+\text{۱}}^{(m)} = \cdots = \eta_N^{(m)} =$$

همچن ن فرض $S^{(m)}(k) < m$ انگرا ن مو و است که مجمو رکوردهای   عـ ف اتفاق افتاده تا نق ه kام تک ه‌گاه کمتر از m می اشد اما از نجا ی که در مورد نخست ن m رکورد   عـ ف حث می‌کن م پس ا د عد از نق ه kام تک ه‌گاه ن ز تعدادی رکورد رخ دهد   نا را ن تحت شر $S^{(m)}(k) < m$ احتمال ا نکه در نق ه kام تک ه‌گاه مثلا δ_k رکورد رخ دهد را ر است ا احتمال غ رشر ی ا نکه در نق ه kام تک ه‌گاه دق قا δ_k رکورد و عد از نق ه kام ن ز حداقل ک رکورد رخ دهد   عنی دار م

$$P\left(\eta_k = \delta_k | S^{(m)}(k) < m\right) = \left(\frac{P(X=k)}{P(X \geq k)}\right)^{\delta_k} \frac{P(X>k)}{P(X \geq k)} = p_k q_k^{\delta_k}$$

و از رفی شر $S^{(m)}(k) < m$ معادل است ا ا نکه روی نقا kام تک ه‌گاه محدود تی از لحا   تعداد رکوردها نداشته اش م   نا را ن تحت ا ن شر   متغ رهای $\eta_{\circ}^{(m)}, \eta_{1}^{(m)}, ..., \eta_k^{(m)}$ مستقل از کد گر هستند و توز   توام نها ا توز   توام $\eta_{\circ}, \eta_{1}, ..., \eta_k$ کی است   در نت جه

$$P\left(\eta_{\circ}^{(m)} = \delta_{\circ}, \eta_{1}^{(m)} = \delta_{1}, ..., \eta_k^{(m)} = \delta_k | S^{(m)}(k) < m\right) = \prod_{i=\circ}^{k} p_i q_i^{\delta_i} \quad (\ )$$

و همچن ن

$$P\left(S^{(m)}(j) < m\right) = p\left(S(j) < m\right), \quad j = \ \ ,\ \ ,\cdots,k. \qquad (\ )$$

لم ۳   م زان ا لا   ف شر نهفته در نخست ن m رکورد   عـ ف در مورد پارامتر θ از جامعه $F(x,\theta)$ ه قرار ز ر است

$$\begin{aligned} I_R^w(\theta) &= \sum_{k=\circ}^{N} \sum_{i=\circ}^{m-1} P\left(S(k-\ ) = i\right) \left\{ -\frac{\partial^2 \log p_k}{\partial \theta^2} \left(\ -q_k^{m-i}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \log q_k}{\partial \theta^2} \left[(m-i) q_k^{2m-2i} + \frac{q_k}{p_k}\left(\ -q_k^{m-i}\right)^2\right] \right\}. \qquad (\ ) \end{aligned}$$

برهان   رای ملاح ه جز ات اثبات مراجعه شود ه $Stepanov$ $Balakrishnan$ و $Hafmann$ در سال   ■

ا لا   ف شر در رکوردها   قو

فرض کن د $F(x;\theta)$ دارای تک ه‌گاه $\{\ ,\ ,\ ,\ ,\cdots,N\}$ اشد که $N \leq \infty$ می‌خواه م ا لا   ف شر نهفته در $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(m)}$ را تع ن کن م   ا توجه ه تعر ف $\eta_i'^{(m)}$ها توز

رنولی دارند اما در ا ن حالت ن ز مانند خش قبل مستقل نستند توز شر ی $\eta_i'^{(m)}$ ا شر ($S'^{(m)}(k-\ )$ ه صورت ز ر است

$$P\left(\eta_k'^{(m)} = \ |S'^{(m)}(k-\ )\right) = \begin{cases} q_k; & S'^{(m)}(k-\ ) < m \\ \ ; & S'^{(m)}(k-\ ) = m \end{cases}$$

نا را ن

$$P\left(\eta_k'^{(m)} = \ |S'^{(m)}(k-\ )\right) = \begin{cases} p_k; & S'^{(m)}(k-\ ) < m \\ \ ; & S'^{(m)}(k-\ ) = m \end{cases}$$

در نت جه دار م

$$P\left(\eta_k'^{(m)} = \delta_k|S'^{(m)}(k-\ )\right) = \begin{cases} q_k^{\delta_k} p_k^{1-\delta_k}; & S'^{(m)}(k-\ ) < m \\ \ ; & S'^{(m)}(k-\ ) = m, \delta_k = \\ \ ; & S'^{(m)}(k-\ ) = m, \delta_k = \end{cases} \qquad (\ )$$

ا توجه ه ملاحـ ه می‌شود که تحت شر $S'^{(m)}(k) < m$ متغـ رهای $\left(\eta_\circ'^{(m)}, \cdots, \eta_k'^{(m)}\right)$ و $(\eta_\circ, \cdots, \eta_k)$ همتوز هستند نا را ن

$$P\left(\eta_\circ'^{(m)} = \delta_\circ, \cdots, \eta_k'^{(m)} = \delta_k|S'^{(m)}(k) < m\right) = \prod_{i=\circ}^{k} q_i^{\delta_i} p_i^{1-\delta_i}$$

و همچن ن

$$P\left(S'^{(m)}(j) < m\right) = P\left(S'(j) < m\right), \quad j = \ ,\ , \cdots, k. \qquad (\ )$$

لم م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد قوی در مورد پارامتر θ از جامعه $F(x,\theta)$ ه قرار ز ر است

$$I_R(\theta) = \sum_{k=\circ}^{N} P\left(S'(k-\ ) < m\right) \frac{}{q_k(\ - q_k)} \left(\frac{\partial q_k}{\partial \theta}\right)^2. \qquad (\ )$$

برهان رای ملاحـ ه جز ات اثبات مراجعه شود ه $Balakrishnan\ \ Stepanov$ و $Hafmann$ در سال ■

توز زتا

Balakrishnan Stepanov و Hafmann سال م زان ا لا ف شر نهفته در رکوردهای استخراج شده از توز هندسی را محاسبه کرده‌اند در ا ن خش ما فرض نموده ا م توز جامعه زتا اشد ا تدا توز رکوردهای ع ف سپس ا لا ف شر نهفته در رکوردهای ع ف و قوی از ا ن توز را ررسی می‌کن م و در پا ان ه مقا سه ا حالت $i.i.d.$ می‌پرداز م
گو م متغ ر تصادفی X دارای توز زتا است هرگاه تا جرم احتمال ن ه صورت ز ر اشد

$$P(X=n)=\frac{\zeta^{-1}(\theta)}{(n+\ )^{\theta}},\qquad n=\ ,\ ,\ ,\cdots,\qquad \theta>\qquad\qquad (\ )$$

که در ن $\zeta(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\theta}}$ توز زتا عنوان ک توز توانی رای رازش داده‌های تجر ی مر و ه پد ده‌های ف ز کی و اجتماعی مورد استفاده قرار می‌گ رد رخی از ا ن پد ده‌ها عبارتند از و های گسترده جهانی شبکه‌های سوخت و سازی در ز ست‌شناسی ارتبا ات حکاک ا نترنتی و شبکه‌های ارجاعی مجلات در سالهای اخ ر م العاتی روی ا ن توز انجام شده است که از ن جمله می‌توان ه Morris Goldstein و Yen سال اشاره نمود

۱ ا لا ف شر در مشاهدات $i.i.d.$

در ا ن خش م زان ا لا ف شر نهفته در m مشاهده $i.i.d.$ از توز زتا را محاسبه می‌کن م و در پا ان ه مقا سه م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد ع ف و قوی ا همان تعداد مشاهده مستقل و همتوز از توز زتا می‌پرداز م

لم م زان ا لا ف شر نهفته در ک مشاهده از توز زتا در مورد پارامتر θ ه قرار ز ر است

$$I_X(\theta)=\frac{\zeta''(\theta)\zeta(\theta)-\zeta'^{2}(\theta)}{\zeta^{2}(\theta)}.$$

برهان ا توجه ه دار م

$$\log P(X=n)=-\theta\log n-\log\zeta(\theta)$$

ملاح ه می‌شود که مشتق دوم تا درستنما ی ه متغ ر ستگی ندارد و نا را ن

$$I_R(\theta)=\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}\log\zeta(\theta)=\frac{\zeta''(\theta)\zeta(\theta)-\zeta'^{2}(\theta)}{\zeta^{2}(\theta)}.$$

■

توز رکوردها ع ف

ا استفاده از دار م

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= \zeta^{-1}(\theta) \textstyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\theta}} \\ &= \zeta^{-1}(\theta)\zeta(\theta, k) \end{aligned}$$

که در ن $\zeta(\theta, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)^{\theta}}$ نا را ن احتمالهای تعر ف‌شده در عبارتند از

$$q_k = \frac{P(X_1 = k)}{P(X_1 \geq k)} = \frac{}{\zeta(\theta, k)(k + \ )^{\theta}} \qquad (\quad)$$

$$p_k = \frac{P(X_1 > k)}{P(X_1 \geq k)} = \frac{\zeta(\theta, k + \ )}{\zeta(\theta, k)}$$

ملاح ه می‌شود که مقاد ر q_k و p_k ه k ستگی دارد در نت جه ا استفاده از و رای $m \geq$ و $n \geq$ دار م

$$P\left(X_{(n)}^{w} \leq m\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \zeta(\theta, i + \ ) \left(\zeta(\theta, i)\right)^{-(k+m+1)} (i + \ )^{-\theta(k+m)} \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i}$$

$m \geq$ و $n \geq$ دار م

$$P\left(X_{(n)}^{w} \leq m\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \zeta(\theta, i + \ ) \left(\zeta(\theta, i)\right)^{-(k+m+1)} (i + \ )^{-\theta(k+m)} \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{p_j}{p_j - p_i}$$

که در ن p_jها در تعر ف شده‌اند

۳ ا لا ف شر در رکوردها ع ف

در ا ن قسمت م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد ع ف از توز زتا را محاسبه می‌کن م

لم م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد ع ف در مورد پارامتر θ از توز زتا ه قرار ز ر است

$$\begin{aligned} I_R^w(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1} P\left(S(k-1)=r\right)\left\{\Big(\alpha(\theta,k)-\alpha(\theta,k+1)\Big)\left(1-\beta(\theta,k)\right)\right. \\ &+ \left.\alpha(\theta,k)\left[(m-r)\beta^2(\theta,k)+\frac{1}{\zeta(\theta,k+1)(k+1)^{\ \theta}}\left(1-\beta(\theta,k)\right)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

که در ن

$$\alpha(\theta,k)=\frac{\zeta''(\theta,k)\zeta(\theta,k)-\zeta'^2(\theta,k)}{\zeta^2(\theta,k)}$$

$$\beta(\theta,k)=\Big(\zeta(\theta,k)(k+\ \ )^{\theta}\Big)^{r-m}$$

برهان ا تدا توجه شود که ا استفاده از دار م

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log q_k}{\partial\theta^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\log(\zeta(\theta,k))+\theta\log(k+\ \ )\right\} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(\zeta(\theta,k)) \\ &= -\frac{\zeta''(\theta,k)\zeta(\theta,k)-\zeta'^2(\theta,k)}{\zeta^2(\theta,k)} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log p_k}{\partial\theta^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\log(\zeta(\theta,k+\ \ ))-\log(\zeta(\theta,k))\right\} \\ &= \frac{\zeta''(\theta,k+1)\zeta(\theta,k+1)-\zeta'^2(\theta,k+1)}{\zeta^2(\theta,k+1)}-\frac{\zeta''(\theta,k)\zeta(\theta,k)-\zeta'^2(\theta,k)}{\zeta^2(\theta,k)} \end{aligned}$$

و ا توجه ه دار م

$$\begin{aligned} P\left(S(k-\ \ )=r\right) &= \sum_{i=0}^{k-1}\zeta(\theta,i+\ \ )\left(\zeta(\theta,i)\right)^{-r-k}(i+\ \ )^{-\theta(r+k-1)} \\ &\times \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k-1}\frac{p_j}{p_j-p_i} \end{aligned}$$

که در ن p_jها در تعر ف شده‌اند ا جا گذاری عبارات فوق در نت جه مورد ن ر عا د می‌گردد ■

ا نک ا استفاده از روشهای عددی نسبت ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد ع ف ه همان تعداد مشاهده $i.i.d.$ از توز زتا را ه ازای mها و θهای مختلف محاسبه می‌کن م نتا ج ا ن محاسبات در جدول مده است لازم ه تو ح است که از نرم‌افزار ر ا ی MAPLE v8 رای دست وردن نتا ج عددی ا ن مقاله استفاده شده است

ا توجه ه جدول ملاح ه می‌گردد که

رای $\theta \le \frac{1}{2}$ ا ز اد شدن تعداد رکوردها سرعت افزا ش ا لا ف شر در مشاهدات $i.i.d$

جدول نسبت $\frac{mI_{X_1}(\theta)}{I_R^w(\theta)}$ از توز زتا به ازای mها و θهای مختلف

θ	$m=$	$m=$	$m=$	$m=$	$m=$

شتر از رکوردها می اشد اما رای θهای زرگتر ا افزا ش تعداد رکوردها سرعت افزا ش م زان ا لا ف شر مشاهدات $i.i.d$ نسبت به رکوردها ا تدا روند کاهشی و سپس روند افزا شی از خود نشان می‌دهد

ه ازای هر تعداد از رکوردها سرعت افزا ش م زان ا لا ف شر مشاهدات $i.i.d$ نسبت به رکوردها تا عی نزولی بر حسب θ است

ه ازای $\theta < \frac{1}{2}$ ا لا ف شر نهفته در رکوردها شتر از مشاهدات $i.i.d$ می اشد

ا لا ف شر در رکوردها قو

در ا ن قسمت م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد قوی از توز زتا را محاسبه می‌کن م

لم م زان ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد قوی در مورد پارامتر θ از توز زتا به قرار ز ر است

$$I_R(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} P\big(S'(k- \quad) = r\big) \frac{\Big(\zeta'(\theta,k) + \zeta(\theta,k)\log(k+ \quad)\Big)^2}{\zeta(\theta,k+ \quad)\zeta^2(\theta,k)(k+ \quad)^\theta}.$$

برهان ا توجه به د هی است که

$$\frac{\partial q_k}{\partial\theta} = -\frac{\zeta'(\theta,k) + \zeta(\theta,k)\log(k+ \quad)}{\zeta^2(\theta,k)(k+ \quad)^\theta}$$

و

$$\frac{}{q_k(\quad - q_k)} = \frac{}{q_k \; p_k} = \frac{\zeta^2(\theta,k)(k+ \quad)^\theta}{\zeta(\theta,k+ \quad)}$$

جدول نسبت $\frac{mI_{X_1}(\theta)}{I_R(\theta)}$ از توز زتا به ازای mها و θهای مختلف

θ	$m=$	$m=$	$m=$	$m=$	$m=$

د هی است که $P\big(S'(k-\ \ )=r\big)$ ر t^r در تا مولد احتمال $S'(k-\ \ )$ می اشد زیرا

$$E\Big(t^{S'(k-1)}\Big)=\sum_{i=0}^{k-1}t^iP\big(S'(k-\ \ )=r\big).$$

از رفی

$$E\Big(t^{S'(k-1)}\Big)=E\Big(t^{\sum_{j=0}^{k-1}\eta'_j}\Big)=\prod_{j=0}^{k-1}E\big(t^{\eta'_j}\big)$$

و

$$E\big(t^{\eta'_j}\big)=\sum_{x=0}^{1}(q_jt)^xp_j^{1-x}=p_j+q_jt$$

نا را ن $P\big(S'(k-\ \ )=r\big)$ ر t^r در سه سری تیلور $\prod_{j=0}^{k-1}(p_j+q_jt)$ می اشد که در ن p_j ها و q_j ها در تعر ف شده‌اند ا جا گذاری روا محاسبه شده در نتیجه مورد : ر عاید می‌گردد ■

ا نک ا استفاده از روشهای عددی نسبت ا لا ف شر نهفته در نخست ن m رکورد عه ف ه همان تعداد مشاهده $i.i.d.$ از توز زتا را به ازای mها و θهای مختلف محاسبه می‌کنیم نتایج ا ن محاسبات در جدول مده است

ا توجه به جدول ملاحظه می‌گردد که

رای $\frac{1}{5}\leq\theta$ و $\theta<$ ا ز اد شدن تعداد رکوردها سرعت افزا ش ا لا ف شر در مشاهدات $i.i.d$ شتر از رکوردها می اشد اما رای $\leq\theta\leq$ سرعت افزا ش م زان ا لا ف شر مشاهدات $i.i.d$ نسبت به رکوردها به ازای تغ ر حجم رکوردها از به روند کاهشی و از به

عد روند افزا شی از خود نشان می‌دهد
ه ازای هر تعداد از رکوردها سرعت افزا ش م زان ا لا ف شر مشاهدات $i.i.d$ نسبت ه رکوردها تا عی نزولی ر حس θ است
ه ازای $\leq \theta \leq$ و $\leq m$ ا لا ف شر نهفته در رکوردها شتر از مشاهدات $i.i.d$ می اشد

مراج

احمدی ج رزمخواه م / لا در توز $BURR\ XII$ مجموعه مقالات ششم ن سم نار ن‌المللی مار جلد اول

احمدی ج رزمخواه م خ / لا ف شر *نهفته در آماره‌های رکوردی* توز $BURR\ XII$ ارسال رای چاپ در اند شه ماری

[3] Ahmadi, J., Arghami, N.R. (2001), On the fisher information in record values, Metrika 53, 195-206.

[4] Ahmadi, J., Arghami, N.R. (2003), Comparing the fisher information in record values and iid observation, Statistics 37(5), 435-441.

[5] Chandler, K. N. (1952), The distribution and ferquency of record values, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 14, 220-228.

[6] Goldestein, M. L., Morris, S. A., Yen, G. G. (2004), Fitting of power-law distribution,

[7] Nagaraja, H. N. (1988), Record value and related statistics-a review Comm. Statist. Theory Methods 17, 2223-2238.

[8] Nevzorov, V. B., (1987), Records Theory Probab. Appl. 32, 201-228.

[9] Sen, A., Balakrishnan, N. (1999), Convolution of geometrics and a reliability problem, Statist. Probab. Lett. 43, 421-426.

[10] Stepanov, A.V. (1992), Limit theorems for weak records, Theory Probab. Appl. 37, 570-574.

[11] Stepanov, A.V., Balakrishnan, N., Hafmann, G. (2003), Exact distribution and fisher information of weak record values, Statist. Probab. Lett. 64, 69-81.