معرف معادلات د فرانس ل تصادف و روشها عدد حل نها

قاسم بر د لقمانی

دانشکده ر ا دانشگاه زد

چک ده معمولا مدل سازی پد ده‌های د نام کی توس معادلات د فرانس ل صورت می‌گ رد در س اری از پد ده‌های ب عی عنصری تصادفی وجود دارد که اعث می‌شود رای مدل سازی ا ن پد ده‌ها از معادلات د فرانس ل تصادفی استفاده گردد معمولا ا ن عامل تصادفی اغل ه شکل نوفه سف د[1] اهر می‌گردد و اعث می‌شود تا نتوان م از انتگرالهای ر مان و لبگ رای معادلات انتگرالی ن راستفاده کن م رای رف ا ن مشکل ن از ه انتگرال ا تو ا استراتونو چ می اشد در ا ن مقاله عد از معرفی معادلات د فرانس ل تصادفی و وردن مقدمات لازم ه ذکر ع ی از روشهای عددی حل نها می‌پرداز م از نجا ی که جوا ا ن دسته از معادلات ه شکل ک فر ند تصادفی فر ند و نر می اشد و ه شکل تا مشخصی از زمان موجود ن ست مجبور م مس ر جوا نها را شب ه‌سازی کن م و رای ا ن کار ن از ه تول د اعداد تصادفی است و رای ا ن من ور از مولدهای تول د اعداد شبه تصادفی استفاده می‌کن م

واژه‌ها کل د معادلات د فرانس ل تصادفی اعداد شبه تصادفی نوفه سف د

مقدمه

تا چند دهه قبل رای مدل سازی پد ده‌های ف ز کی دانشمندان مجبور ودند از اثرهای تصادفی موجود ه دو دل ل عدم وجود کامپ وترهای قوی و مشکل ودن حل و حث اثرهای تصادفی چشم پوشی کنند

مس له مقدار اول ه ز ر را در ن ر گ ر د

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(t_\circ) = y_\circ, \quad y \in R^m. \qquad (\ )$$

دو کلاس اصلی از روشهای عددی نام روشهای تک گامی و چند گامی رای حل مس له مقدار اول ه فوق وجود دارد ک روش تک گامی ن از ه ک مقدار اول ه رای شرو دارد که در تعر ف مس له مقدار اول ه داده می‌شود و سپس در هر گام جوا مس له ا توجه ه گام قبلی دست می د اما ک روش چند گامی ن از ه چند ن مقدار شرو دارد که معمولا توس ک روش تک گامی محاسبه می‌شوند و سپس جوا مس له در گامهای عدی محاسبه می‌گردد

1) White noise

می‌دان م که روشهای تک گامی چون او لر ه ون ت لور و روشهای رانگ کوتا خصوصا مشهورتر ن نها عنی روشهای رانگ کوتای مرحله‌ای رای حل ک مس له مقدار اول ه از نو وجود دارد در ا ن مقاله پس از معرفی معادلات د فرانس ل تصادفی ه معرفی تعم م روشهای فوق در را ه ا ا ن دسته از معادلات می‌پرداز م

معادلات د فرانس ل تصادفی

نت جه اثرهای تصادفی در معادلات د فرانس ل ه دوکلاس مجزا از معادلات منجر می‌شود معادلاتی که فر ند جوا نها مس رهای نمونه مشتق پذ ر ا مشتق ناپذ ر دارند دسته اول معادلات د فرانس ل معمولی هستند که دارای را تصادفی ا ک مقدار اول ه تصادفی ا ک اعمال شده وس له ک فر ند تصادفی من م ا ترک بی از نها می اشد ا ن دسته از معادلات را معادلات د فرانس ل تصادفی نو اول[2] می‌نام م که توس مس رهای نمونه معادلات د فرانس ل معمولی حل پذ رند و مس ر نمونه فر ند جوا در ا ن حالت توا عی مشتق پذ ر می اشند که مورد حث ما ن ستند عنوان مثال معادله د فرانس ل تصادفی خ ی

$$x' = \frac{dx}{dt} = a(\omega)x + b(t,\omega)\cdot$$

که فر ند اعمال شده b نسبت ه t رای هر ω پ وسته می اشد را در ن ر گ ر د رای ک مقدار اول ه $x_\circ(\omega)$ در $t = \circ$ جوا توس

$$x(t,\omega) = \exp(a(\omega)t)(x_\circ(\omega)) + \int_\circ^t \exp(-a(\omega)s)b(s,\omega)ds\cdot$$

داده می‌شود که مس رهای نمونه ن و وح توا عی مشتق پذ ر از t می اشند

دسته دوم معادلاتی هستند که عامل اعمال شده ک فر ند تصادفی نامن م مثلا نوفه سف د گوسی[3] می اشد که معادلات در ا ن حالت توس د فرانس لهای تصادفی ور نماد ن نوشته می‌شوند و توس معادلات انتگرالی ا انتگرالهای تصادفی ا تو ا استراتونو چ تفس ر می‌گردند که نها را معادلات د فرانس ل تصادفی نو دوم[4] می‌نام م که در حالت کلی مشتق‌ناپذ ری را از مس رهای نمونه فر ند و نر در انتگرالهای تصادفی ه ارث می رند و مورد حث ما می اشند

نسخه (version) تصادفی ا تو توس فرم د فرانس لی ز ر ان می‌شود

$$dy = f(y)dt + g(y)dW, \quad y(t_\circ) = y_\circ, \quad y \in R^m \qquad (\ )$$

2) random differential equations 3) Gaussian white noise 4) stochastic differential equations

که در اینجا f یک تابع برداری m بعدی g یک تابع ماتریسی $m \times p$ بعدی و $W(t)$ یک فرایند تصادفی p بعدی می‌باشد که مولفه‌های آن فرایندهای وینر اسکالر و مستقل می‌باشند. جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو یک فرایند تصادفی برداری m بعدی می‌باشد که بصورت انتگرالی زیر بیان می‌شود

$$y(t) = y_{\circ} + \int_{t_{\circ}}^{t} f(y(s))ds + \int_{t_{\circ}}^{t} g(y(s))dW(s) \qquad ( )$$

دومین انتگرال در رابطه یک انتگرال تصادفی ایتو با فرایند $W(t)$ می‌باشد. همچنین نسخه تصادفی استراتونویچ وابسته به توسط رابطه دیفرانسیلی زیر داده می‌شود

$$dy = \bar{f}(y)dt + g(y)odW, \quad y(t_{\circ}) = y_{\circ}, \quad y \in R^{m} \qquad ( )$$

که در آن

$$\bar{f}(y) = f(y) - -g'(y)g(y)$$

دو معادله دیفرانسیل تصادفی و تحت حسابان مختلف ایتو و استراتونویچ دارای جوابهای یکسان می‌باشند. از طرفی چون حسابان استراتونویچ به حسابان معمولی نزدیکتر می‌باشد معمولا از شکل معادله دیفرانسیل تصادفی استراتونویچ استفاده می‌کنیم و همانطور که دیدیم یک معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو را می‌توان توسط رابطه به شکل استراتونویچ نیز تبدیل کرد

تولید اعداد شبه تصادفی

این اعداد توسط رابطه بازگشتی

$$X_{n+1} = aX_n + b(mod \quad c)$$

تولید می‌شوند که a و c اعداد صحیح مثبت و b یک عدد صحیح غیر منفی است. برای یک مقدار اولیه صحیح $X_{\circ}$ الگوریتم یک دنباله شفته صحیح مقادیر از صفر تا $c-$ تولید می‌کند. وقتی a b و c به طور مناسب انتخاب شوند اعداد $u_n = \frac{X_n}{c}$ تقریبا بطور یکنواخت روی بازه [,] توزیع می‌شوند. هرچه پیمانه c بزرگتر انتخاب شود تعداد این اعداد بیشتر است و معمولا برای جلوگیری از وجود مدین سیکل با پریود کمتر از c a باید نسبت به c اول انتخاب شود.

بعنوان مثال سیستم IBM از ^{5} a $b =$ و $c = ^{31} -$ که یک عدد اول است برای تولید اعداد تصادفی استفاده می‌کند

ورکلی می‌خواه م الگور تمی را رای تول د اعداد تصادفی ا توز عهای مختلف ارا ه ده م رای ک عدد $< U <$ $x(U)$ را توس $U = F_X(x(U))$ تعر ف می‌کن م اگر F_X معکوس پذ ر اشد دار م

$$x(U) = F_X^{-1}(U)$$

ا ورکلی دار م

$$x(U) = \inf\{x : U <= F_X(x)\}$$

رای مثال متغ ر تصادفی نما ی ا پارامتر $< \lambda$ دارای توز معکوس پذ ر ا معکوس

$$x(U) = F_X^{-1}(U) = -\ln(\quad - U)/\lambda$$

رای $< U <$ می اشد

اما هم شه کار ه ا ن سادگی ن ست مثلا در مورد متغ رهای تصادفی گوسی استاندارد نرمال انتگرالها رای محاسبه تا توز روشهای عددی محاسبه می‌گردند و ا ن کار را دشوار می‌کند

روش اکس مولر رای تول د متغ رهای تصادفی نرمال از ا ن مس له اجتنا می‌کند ه ا ن ترت که اگر U_1 و U_2 دو متغ ر مستقل کنواخت $U(\, , \,)$ اشند می‌توان نشان داد که N_1 و N_2 ا تعر ف

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{- \ln(V_1)}cos(\pi U_2) \\ N_2 &= \sqrt{- \ln(V_1)}sin(\pi U_2) \end{aligned}$$

دو متغ ر تصادفی استاندارد و مستقل می اشند

فرمول ا تو

فرمول ا تو در واق همان قاعده زنج ره‌ای در حسا ان کلاس ک است

فرض کن م $F : [\, ,T] \times R \to R^m$ دارای مشتقات جزی مرتبه دوم پ وسته اشند رای هر $t \geq t_0$ فر ند تصادفی Y_t را چن ن تعر ف می‌کن م

$$Y_t(\omega) = F(t, X_t(\omega))$$

اگر X_t ور پ وسته مشتق پذ ر اشد از قاعده زنج ره‌ای حسا ان کلاس ک رای د فرانس ل Y_t دار م

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)dX_t$$

که از سط تلور U ا صرفنظر رکردن از جملات دوم به عد حاصل می‌شود اما اگر X_t توسط

$$X_t(\omega) = \int_{t_۰}^{t_۱} g(s,\omega)dW_s(\omega)$$

امعادلا توسط دفرانسل تصادفی $dX_t = gdW_t$ مشخص شود دار م

$$(dX_t)^۲ = g^۲(dW_t)^۲$$

و در نتجه

$$E((dX_t)^۲) = E(g^۲)dt \qquad (\;)$$

اکنون ا استفاده از سط تلور

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= F(t+\Delta_t, X_t+\Delta X_t) - F(t,X_t) = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right\} \\ &+ -\left\{\frac{\partial^۲ F}{\partial t^۲}(\Delta t)^۲ + \frac{\partial^۲ F}{\partial t \partial x}\Delta t \Delta x + \frac{\partial^۲ F}{\partial x^۲}(\Delta x)^۲\right\} + \dots \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که

$$dY_t = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + -g^۲\frac{\partial^۲ F}{\partial x^۲}(t,X_t)\right\}dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)dX_t$$

که تساوی در حالت مر م انگن تفسر می‌گردد عنی جمله مرتبه اول dt را از قسمت مرتبه دوم سط تلور دست می‌دهد که ان قاعده زنجره‌ای تصادفی است که توسط فرمول اتو شناخته می‌شود

معمولا فرمول اتو را در جملاتی از دفرانسلهای dt و dW_t ان می‌کنم عنی در فرمول اتو جای dX_t مساوی ن عنی gdW_t را قرار می‌دهم اما در حالت کلی ک دفرانسل تصادفی می‌تواند همچنن شامل جمله dt اشد عنی می‌توان شکل

$$dX_t(\omega) = f(t,\omega)dt + g(t,\omega)dW_t(\omega)$$

را داشته اشد ناران فرمول اتو شکل

$$dY_t = \left\{\frac{\partial F}{\partial t} + f\frac{\partial F}{\partial x} + -f^۲\frac{\partial^۲ F}{\partial x^۲}\right\}dt + g\frac{\partial F}{\partial x}dW_t \qquad (\;)$$

خلاصه می‌گردد که مشتقات جزی F در (t,X_t) محاسبه می‌گردند

سہ ت لور تصادف

چند ن حالت رای ک فرمول ت لور تصادفی ممکن است کی از نها راساس کار ردن تکرارهای فرمول ا تو نا می‌شود که ن را سہ ا تو ت لور می‌نام م فرض کن م

$$dX_t = f(t,X_t)dt + g(t,X_t)dW_t$$

ک معادله د فرانس ل تصادفی اشد رای هر تا $F : R^+ \times R \rightarrow R$ که دارای مشتقات جزی پ وسته می اشد ا فرمول ا تو دار م

$$\begin{aligned} F(t,X_t) &= F(t_0,X_{t_0}) \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + f\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + -g^2(s,X_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s) \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} g(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)dW_s \\ &= F(t_0,X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} L^0 F(s,X_s)ds + \int_{t_0}^{t} L^1 F(s,X_s)dW_s \qquad (\ ) \end{aligned}$$

رای هر $t[t_0,t]$ که در ن

$$\begin{aligned} L^0 &= \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x} + -g^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L^1 &= g\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

و وح رای $F(t,x) = x$ دار م $L^0 F = f$ و $L^1 F = g$ و ه شکل ز ر خلاصه می‌شود

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} f(s,X_s)ds + \int_{t_0}^{t} g(s,X_s)dW_s \qquad (\ )$$

اکنون اگر فرمول را رای توا $F = f$ و $F = g$ در کار ر م خواه م داشت

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \left(f(t_0,X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s} L^0 f(z,X_z)dz + \int_{t_0}^{s} L^1 f(z,X_z)dW_s \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left(g(t_0,X_{t_0}) + \int_{t_0}^{s} L^0 g(z,X_z)dz + \int_{t_0}^{s} L^1 g(z,X_z)dW_z \right) dW_s \\ &= X_{t_0} + f(t_0,X_{t_0})\int_{t_0}^{t} ds + g(t_0,X_{t_0})\int_{t_o}^{t} dW_s + R \qquad (9) \end{aligned}$$

ا اق مانده

$$
\begin{aligned}
R &= \int_{t_\circ}^{t}\int_{t_\circ}^{s} L^{\circ} f(z,X_z)dzds + \int_{t_\circ}^{t}\int_{t_\circ}^{s} L^{\backprime} f(z,X_z)dW_zds \\
&+ \int_{t_\circ}^{t}\int_{t_\circ}^{s} L^{\circ} g(z,X_z)dzdW_s + \int_{t_\circ}^{t}\int_{t_\circ}^{s} L^{\backprime} g(z,X_z)dW_zdW_z
\end{aligned}
$$

که می‌توان فرمول را مجددا در رای توا $F = L^{\circ}f$ و $F = L^{\backprime}f$ و $F = L^{\circ}g$ و $F = L^{\backprime}g$ ه کار رد

روشها عدد حل معادلات د فرانس ل تصادف

کی از ساده‌تر ن تقر بهای گسسته زمان از ک فر ند ا تو

$$X_t = X_{t_\circ} + \int_{t_\circ}^{t} f(s,X_s)ds + \int_{t_\circ}^{t} g(s,X_s)dW_s$$

تقر او لر مار اما می اشد فرض کن م فر ند ا تو $X = \{X_t, t_\circ \le t \le T\}$ در معادله د فرانس ل تصادفی

$$dX_t = f(t,X_t)dt + g(t,X_t)dW_t$$

روی ازه $t_\circ \le t \le T$ ا ک مقدار اول ه $X_{t_\circ} = X_\circ$ صدق کند رای ک افراز

$$t_\circ = h_\circ < h_\backprime < \cdots < h_n < \cdots < h_N = T$$

از ک ازه زمانی $[t_\circ, T]$ ک تقر او لر ک فر ند تصادفی پ وسته زمان $Y = \{Y(t), t_\circ \le t \le T\}$ می اشد که در شکل تکراری

$$Y_{n+\backprime} = Y_n + f(h_n,Y_n)(h_{n+\backprime} - h_n) + g(h_n,Y_n)(W_{n+\backprime} - W_n)$$

رای $n = \ , \ , \cdots, N -$ ا مقدار اول ه $Y_\circ = X_\circ$ صادق می اشد که من ور از $Y_n = Y(h_n)$ است معمولا قرار می‌ده م $\Delta_n = h_{n+\backprime} - h_n$ رای n ام ن نمو زمان و $\delta = \max_n \Delta_n$ را ماکز مم ول گام می‌نام م اگر ول گامها مساوی اشد دار م $h_n = t_\circ + n\delta$ جا ی که $\delta = \Delta_n = \Delta = \frac{T-t_\circ}{N}$ می اشد

دنباله $\{Y_n, n = \ , \ , \cdots, N\}$ از مقاد ر تقر او لر در زمانهای متساوی الفاصله $(h)_\delta = \{h_n, n = \ , \ , \cdots, N\}$ می تواند مشا ه روش او لر محاسبه گردد ا ا ن تفاوت که

درا نجا ز از ه تول د نموهای تصادفی $\Delta W_n = W_{h_{n+1}} - W_{h_n}$ رای $n = \ , \ , \cdots , N-$ از فرا ند و نر $W = \{W_t, t \geq \ \}$ هست م

اما ا ن نموها متغ رهای تصادفی گوسی مستقل ا م انگ ن $E(\Delta W_n) = $ و وار انس $E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$ می اشند که می‌توان نها را از ک دنباله اعداد گوسی مستقل شبه تصادفی مثلا از روش اکس مولر تول د کرد

د ن ترت مقاد ر تقر بی فر ند را در زمانهای گسسته تع ن می‌کن م و از ک روش درون ا ی مناس مثلا خ ی می‌توان استفاده کرد و مقاد ر تقر بی فر ند در ن ازه ها را دست ورد

مث ل ۱ فرض کن م فر ند ا تو $X = \{X_t, t \geq \ \}$ در مع دله د فرانس ل تص دف خ

$$dX_t = fX_t dt + gX_t dW_t$$

برا $t \in [\ , T]$ و فر ند و نر داده شده $W = \{W_t, t \geq \ \}$ ، با مقدار اول ه $X_0 \in R$ صدق کند م دان م که برا $t \in [\ , T]$ جوا صر ح مع دله بشکل $X_t = X_0 + \exp((f - \frac{1}{2}g^2)t + bW_t)$ م شد از رف د گر شکل او لر جوا ع رت است از

$$Y_{n+1} = Y_n + fY_n\Delta_n + gY_n\Delta W_n$$

برا $X_0 = $ و $f = \ / \ $ و $g = $ و $\Delta = ^{-2}$ و $\Delta = ^{-4}$ مس ر واقع و تقر جوا چن ن است

از نجا ی که روش او لر مار اما دقت ز ادی ندارد لازم است که ول گام را هنگام استفاده از روش او لر مار اما کوچک انتخا کن م ا از روش او لر مار امای اصلاح شده نام روش ه ون شکل

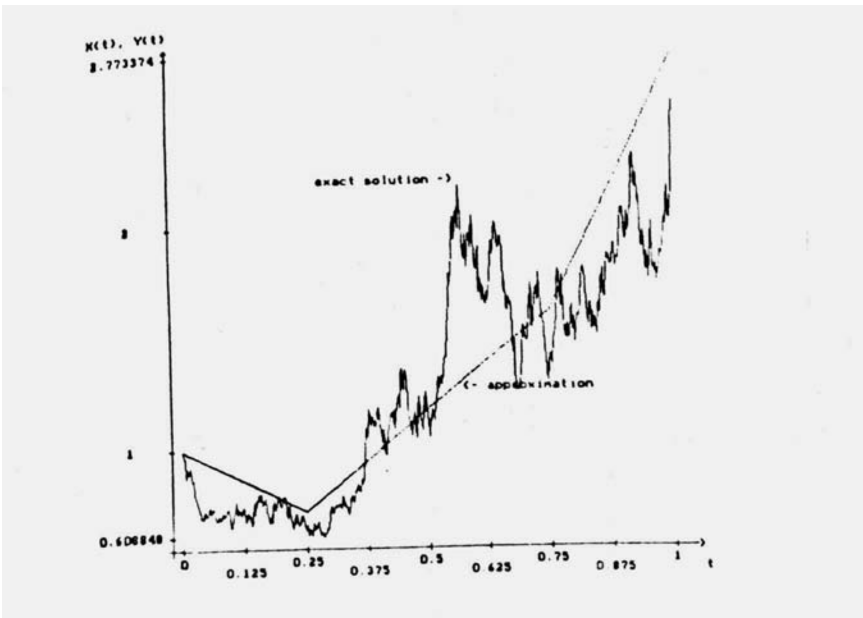
$$\begin{aligned} Y_1 &= y_n + hf(y_n) + g(y_n)\Delta W_n \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{\ }(f(y_n) + f(Y_1)) + \frac{\ }{\ }(g(y_n) + g(Y_1))\Delta W_n \quad (\ ) \end{aligned}$$

استفاده کن م پ شنهاد د گر ا ن است که جمله $L^1 g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} dW_z dW_s$ از سر ت لور تصادفی را ه تقر او لر مار اما ا افه کرده تا روش م لشتا ن ه شکل

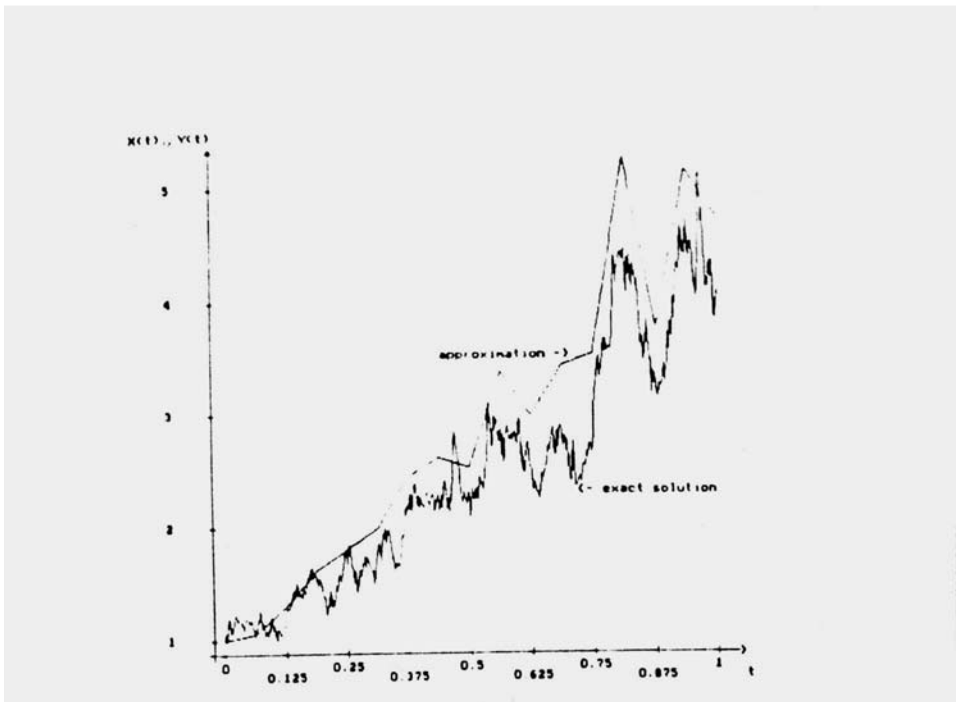
$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + g(y_n)\Delta_n + \frac{\ }{\ }g(y_n)g'(y_n)((\Delta W_n)^2 - h)$$

حاصل گردد

ه ن ر می‌رسد که استفاده از جملات شتر سر ت لور تصادفی رای تقر مناس تر اشد اما دو اشکال اساسی محاسبه انتگرالهای تصادفی چند گانه موجود در سر ت لور تصادفی و محاسبه مشتقات مرات الاتر توا f و g اعث می‌شود تا از روشهای مشتمل ر استفاده از جملات شتر سر ت لور تصادفی استفاده نشود


X(t), Y(t)
exact solution ->
<- approximation
0.125
0.25
0.375
0.5
0.625
0.75
0.875
t

شکل


x(t), y(t)
5
4
3
2
1
approximation ->
<- exact solution
0
0.125
0.25
0.375
0.5
0.625
0.75
0.875
1
t

شكل

ا توجه ه دلا ل فوق سعی می‌شود از روشها ی استفاده گردد که مستقل از مشتق اشند
کی از ا ن روشها ا ن است که از تقر بهای تفا لی جای مشتق استفاده گردد شکل مستقل
از مشتق روش م لشتا ن توس پلاتن ه شرح ز ر م رح گرد د

$$Y_۱ = y_n + \sqrt{h}_n g(y_n)$$

$$y_{n+۱} = y_n + h_n f(y_n) + h_n \Delta W_n g(y_n) + \frac{\sqrt{h_n}}{۲}\left((\frac{\Delta W_n}{\sqrt{h_n}})^۲ - ۱ \right) (g(Y_۱) - g(y_n)) \quad (۱۱)$$

روما ن نشان داد که روشها ی چون و و حتی روشهای عمومی تر رانگ کوتا

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h\sum_{j=۱}^{s} a_{ij} f(Y_j) + J_۱ \sum_{j=۱}^{s} b_{ij} g(Y_j) \quad i = \ , \ , \ldots, s \\ y_{n+۱} &= y_n + h\sum_{j=۱}^{s} \alpha_j f(Y_j) + J_۱ \sum_{j=۱}^{s} \gamma_j g(Y_j), \qquad (\quad) \end{aligned}$$

که از تنها ک نمو فر ند و نر ΔW_n استفاده می‌کنند نمی‌توانند مرتبه همگرا ی قوی
شتر از داشته اشند

کو ن وراگ و پامالا مار ن وراگ در ا استفاده از شکل استراتونو چ معادله تصادفی
و فرمولهای ا تو: ر سه تا لور تصادفی از نو استراتونو چ را رای معادله د فرانس ل تصادفی

$$dy(t) = f(y(t))dt + g(y(t)) o dW_t$$

صورت ز ر استخراج کردند

$$\begin{aligned} y(t) &= y_۰ + f(y_۰)J_۰ + g(y_۰)J_۱ + f'(y_۰)(f(y_۰))J_{۰۰} + f'(y_۰)(g(y_۰))J_{۱۰} \\ &+ g'(y_۰)(f(y_۰))J_{۰۱} + g'(y_۰)(g(y_۰))J_{۱۱} + f''(y_۰)(f(y_۰), f(y_۰))J_{۰۰۰} \\ &+ f'(y_۰)(f'(y_۰)(f(y_۰)))J_{۰۰۰} + f''(y_۰)(f(y_۰), g(y_۰))J_{۱۰۰} \\ &+ f'(y_۰)(f'(y_۰)(g(y_۰)))J_{۱۰۰} + f''(y_۰)(g(y_۰), f(y_۰))J_{۰۱۰} \\ &+ f'(y_۰)(g'(y_۰)(f(y_۰)))J_{۰۱۰} + f''(y_۰)(g(y_۰), g(y_۰))J_{۱۱۰} \\ &+ f'(y_۰)(g'(y_۰)(g(y_۰)))J_{۱۱۰} + g''(y_۰)(f(y_۰), f(y_۰))J_{۰۰۱} \\ &+ g'(y_۰)(f'(y_۰)(f(y_۰)))J_{۰۰۱} + g''(y_۰)(f(y_۰), g(y_۰))J_{۱۰۱} \\ &+ g'(y_۰)(f'(y_۰)(g(y_۰)))J_{۱۰۱} + g''(y_۰)(g(y_۰), f(y_۰))J_{۰۱۱} \\ &+ g'(y_۰)(g'(y_۰)(f(y_۰)))J_{۰۱۱} + g''(y_۰)(g(y_۰), g(y_۰))J_{۱۱۱} \\ &+ g'(y_۰)(g'(y_۰)(g(y_۰)))J_{۱۱۱} + R \qquad (\quad) \end{aligned}$$

که در ا نجا R جمله اق مانده و $J_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ نما ش دهنده انتگرالهای تصادفی استراتونو چ چندگانه می اشد اگر انتگرالگ ری نسبت ه ds اشد $j_i =$ و اگر نسبت ه dW_s اشد $j_i =$ عنوان مثال رای J_{101} دار م

$$J_{101} = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_2} \int_{t_0}^{s} o dW(s_1) ds o dW(s_2)$$

 ه ا ن ترت   کو ن وراگ و پامالا مار ن وراگ ا استفاده از و اعمال ک تغ ر در روش رانگ کوتا از نو توانستند ک کلاس از روشهای رانگ کوتا از مرتبه همگرا ی قوی شرح ز ر استخراج کنند

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^{i-1} (b_{ij}^{(1)} J_1 + b_{ij}^{(2)} \frac{J_{10}}{h}) g(Y_j) \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{j=1}^{s} \alpha_j f(Y_j) + \sum_{j=1}^{s} (\gamma_j^{(1)} J_1 + \gamma_j^{(2)} \frac{J_{10}}{h}) g(Y_j), \qquad (14) \end{aligned}$$

که را a_{ij} $b_{ij}^{(1)}$ $b_{ij}^{(2)}$ α_j $\gamma_j^{(1)}$ و $\gamma_j^{(2)}$ رای ک روش چهار مرحله‌ای $s =$ از نو عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} & & & \\ - & & & \\ & - & & \\ - & & & \end{bmatrix}$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ - & & & \end{bmatrix}$$

$$\alpha^T = (-, -, -, -)$$

$$\gamma^{(1)T} = (- \quad , \quad , \quad , \quad)$$

$$\gamma^{(2)T} = (\quad , \quad , - \quad , - \quad)$$

در ا نجا دو مثال را ا روشهای عددی پلاتن PL و رانگ کوتای چهار مرحله‌ای RK حل خواه م کرد رای هر دو مثال و هر دو روش مسـ ر شبـ ه‌سازی شده رای هر ول گام تهـ ه می‌شود و در نها ت مقدار متوسـ خـ ا در انتهای ازه محاسبه می‌گردد همچنـ ن توجه می‌کنـ م که اگر $z_۱ \sim N(\, , \,)$ و $z_۲ \sim N(\, , \,)$ نگاه رای ک ول گام h $J_۱ = \sqrt{h} z_۱$ و $\frac{J_{۱۰}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{۲}(z_۱ + \frac{z_۲}{\sqrt{۳}})$

مثال

$$dy = -a^۲ y(\; - y^۲)dt + a(\; - y^۲)dW, \quad y(\;) = y_۰, \quad t \in [\; , \;],$$

ب جوا واقع

$$y(t) = tanh(aW(t) + arctanh(y_۰)),$$

و شکل استراتونو چ

$$dy = a(\; - y^۲) o dW \cdot$$

جدول خـ ا رای مثال رای مسـ ر ا $a =$

h	PL	RK

مثال

$$dy = -(\alpha + \beta^۲ y)(\; - y^۲)dt + \beta(\; - y^۲)dW, \quad y(\;) = y_۰, \quad t \in [\; , \;],$$

ب جوا واقع

$$y(t) = \frac{(\; + y_۰)exp(- \; \alpha t + \; \beta W(t)) + y_۰ - }{(\; + y_۰)exp(- \; \alpha t + \; \beta W(t)) + \; - y_۰},$$

و شکل استراتونو چ

$$dy = -\alpha(\; - y^۲)dt + \beta(\; - y^۲) o dW \cdot$$

جدول خـ ا رای مثال رای مسـ ر ا / $\alpha = \; / \; , \beta = \; /$

h	PL	RK

مراج

[1] Barid Loghmani, G. and Mohseni, M.(2000). On the Implicit and Semi-Implicit Runge-Kutta Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations. Italian J.Pure and Applied Maths,(to appear).

[2] Burrage, k. and Burrage, P.M. (1996). High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. Applied Numer. Mathematics 22, 81-101.

[3] Burrage, k. and Platen, E. (1994).Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. Annals of Numer. Mathematics, 1, 63-78.

[4] Burrage, P.M. (1999).Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. Ph.D thesis, Dept. Maths., Univ. Queensland, Australia.

[5] Butcher, J.C. (1963).Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. J. Austral. Math. soc., 3, 185-201.

[6] Butcher, J.C. (1964).On Runge-Kutta processes of high order. J.Austral. Math. soc., 4, 179-194.

[7] Butcher, J.C. (1987).The numerical analysis of ordinary differential equation. J. Wiley, U.K.

[8] Kloeden, P.E. and Platen, E. (1991).Stratonovich and *Itô* Taylor expansions. Math. Nachr. 151, 33-50.

[9] Kloeden, P.E. and Platen, E. (1995).Numerical solution of stochastic differential equations, Springer. Berlin.

[10] Kloeden, P.E. and Platen, E. and Schurz, H. (1994).Numerical solution of stochastic differential equations throuth computer experiments. Spring-Verlag.

[11] Mohseni, M.M. and Barid Loghamani, G. (2001).Hybrid Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations.Int. J. Appl. Math, Vol 8,4, 395-416.

[12] Mohseni, M. and Barid Loghamani, G. (2000).On the Euler-Maruyama and Milstein methods for approximation of stochastic differential equations. Thirty first Iranian mathematics conference, Tehran, Univ. (accepted).