روش وت استرپ را روردگرها فاز

ع ن‌الله پاشا[۱] اشکان شباک[۲]

[۱] دانشگاه تر ب ت معلم
[۲] دانشگاه زاد واحد تهران شمال مرکز مار ا ران

چک ده در تجز ه و استنبا ماری هم شه روردگرها و فواصل ا م نان نها از اهم ت خاصی رخوردار وده‌اند در ا ن زم نه روش وت استرپ معرفی شده توس EFRON در سال ک روش ساده از روشهای از نمونه‌گ ری است که رای محاسبه ار بی انحراف استاندارد فواصل ا م نان و مانند ا نها استفاده می‌شود در ا ن مقاله من اد وری اجمالی روش وت استرپ و شنا ی کلی ا مجموعه‌ها و داده‌های فازی ه معرفی روردگر حداقل عدم درستی minimum inaccuracy estimator معرفی شده توس Corral and Gil در سال می‌پرداز م و ا استفاده از روش وت استرپ سعی می‌کن م ه سوالات ز ر پاسخ ده م

خ ای استاندارد ا ن روردگر چ ست
فاصله ا م نان ا ن روردگر چ ست

Corral and Gil ا استفاده از اصل درست‌نما ی ماکز مم روردگر حداقل عدم درستی را رای داده‌های فازی معرفی کرده‌اند استفاده از روش وت استرپ در مورد روردگر ذکر شده می‌تواند معا ن را در تخم ن درستی ماری مورد اشاره کاهش داد که ا ن مو و همراه ا ارا ه مثالی در مقاله تحق ق شده است

واژه‌ها کل د وت استرپ فاصله ا م نان وت استرپ اعداد فازی روردگر حداقل عدم درستی روردگرهای فاصله‌ای فازی اصل درستنما ی ماکز مم

مقدمه

معمولا در ر ا ات هرگاه سخن از عدم ا م نان[۱] می‌کن م ا دو جنبه تصادفی[۲] و مبهم ودن[۳] ن سر وکار دار م عدم ا م نان ناشی از تصادفی ودن ما را ه رمدهای ک زما ش و ن ر ه احتمال رهنمون می‌کند در حال که عدم ا م نان ناشی از ا هام ما را ه عدم ا لا از مفهوم داده‌ها ن ر ه امکان و مجموعه‌های فازی می‌رساند

ت وری فازی که امروزه کار رد ز ادی در علوم مختلف ه و ژه علوم مهندسی و هوش مصنوعی افته رای اول ن ار در سال توس پروفسور زاده ی مقاله‌ای ه نام مجموعه‌های

1) Uncertainty 2) Randomness 3) Vaguness

فازی ه عنوان ا زاری نو ن رای مدلسازی عدم ا م نان از جنبه ا هام معرفی شد   اساس کار مجموعه‌های فازی معرفی ک تا   ع   وت ا حوزه مقادر $\{\ ,\ \}$ ه جای تا   نشانگر ا حوزه مقادر $\{\ ,\ \}$ می اشد   مثلا اگر $X = \{x_i|i = \ ,\ldots,n\}$ مجموعه‌ای نشان دهنده عمر درختان ک جنگل ه سال اشد ز ر مجموعه $A = \{x \leq \ |x \in X\}$ ک ز ر مجموعه دق ق شامل درختانی است که عمر کمتر ا مساوی   سال دارند   نا را ن درختان   ساله ع و A نمی اشند و تا   نشانگر مجموعه A رای ا ن درختان صفر می اشد   اما اگر ز ر مجموعه $\widetilde{A}$ از X را ه صورت   درختان جوان   تعر ف کن م   در ا ن صورت $\widetilde{A}$ ک ز ر مجموعه فازی است که در ن درختان   ساله ا ک درجه ع   وت مع ن شامل $\widetilde{A}$ می اشند و تا   ع   وت رای ن نقا   عددی در فاصله $[\ ,\ ]$ مثلا   می اشد

در ا ن مقاله   من شنا ی مقدماتی ا مفاه م و تعار ف فازی در خش   روردگر کم نه عدم دقت فازی را معرفی می‌کن م   سپس ا کمک الگور تم وت استرپ ا ک مثال عملی تاث ر وت استرپ را در افزا ش اندازه‌های دقت و ه دست وردن فواصل ا م نان مناس   رای داده‌های فازی نشان می‌ده م

تعار ف اول ه

زما ش X ا ف ای احتمال (X,β_X,P_θ) را در نظر گ ر د که در ن (X,β_X) ک ف ای اندازه‌پذ ر و $\{P_\theta|\theta \in \Theta\}$ متعلق ه ک خانواده پارامتری اندازه‌های احتمال می اشند X مجموعه‌ای از ف ای n عدی اقل دسی R^n و β_X کوچکتر ن $\sigma-$ م دان روی X می اشد

تعر ف ۱ پ شامد فازی χ در X عبارتست از ک مجموعه فازی در X که تا   ع   وت ن تا   اندازه‌پذ ر ورل از $[\ ,\ ]$ $\mu_\chi(x) = X \to [\ ,\ ]$ اشد   در ا ن صورت احتمال پ شامد فازی[۴] ر اساس تعر ف زاده   ه صورت ز ر است

$$P_\theta(x) = \int_\chi \mu_\chi(x)dP \qquad \forall x \in X$$

تعر ف   ک س ستم ا لاعات فازی[5] χ متنا   ر ا X ک افراز فازی X وس له پ شامدهای فازی ر X می اشد   ه ور که شر   ز ر نام شر   تعامد رقرار اشد تاناکاوادکارا

$$\sum_\chi \mu_\chi(x) = \qquad \forall x \in X$$

4) Fuzzy event   5) Fuzzy Information System

معمولا س ستم ا لاعات فازی را با $f.i.s$ نشان می‌دهند

تعر ف ۳ ک nتای از اع ا χ ک fis ا تا ع و ت

$$\mu_{\chi_1,\ldots,\chi_n}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu_{\chi_i}(x_i)$$

که $\chi \in (\chi_1,\ldots,\chi_n)$ ا لاعات فازی نمونه‌ای[6] ا عد n از X ر روی χ نام ده می‌شود کورال وج ل

تعر ف ک نمونه تصادفی فازی[7] از عد n ر χ متنا ر ا نمونه تصادفی $X^{(n)}$ $X^{(n)}$ نمونه تصادفی ا ف ای احتمال (X^n,β_X,P_θ) می اشد توس نماد $\chi^{(n)}$ نما ش داده می‌شود و شامل تمام ا لاعات فازی نمونه‌ای ا عد n از X ر روی χ می اشد معمولا نمونه تصادفی فازی را ا نماد $f.r.s$ نما ش می‌ده م

حال ا ا ن مفاه م ه معرفی روردگر کم نه عدم دقت کورال وج ل می‌پرداز م

روردگر کم نه عدم دقت فاز [8]

از نجا ی که مساله رورد نق ه‌ای ا داده‌های دق ق می‌تواند ه عنوان ک حالت و ژه در مساله رورد فازی در ن ر گرفته شود تعم م روشهای مورد استفاده در ا ن مورد می‌تواند ک روش مناس رای رورد کردن پارامترها زمانی که ماه ت داده‌ها فازی است اشد ر ا ن اساس کورال وج ل ا تعم م اصل درستنما ی ماکز مم[9] رای زمانی که داده‌ها فازی هستند روردگر کم نه عدم دقت را معرفی کردند

فرض کن د $j(\chi^{(n)})$ مجموعه تمام ا لاعات فازی نمونه‌ای ه حجم n از X ر روی χ اشد در ا ن صورت رورد نق ه‌ای فازی را ک نگاشت از $j(\chi^{(n)})$ ه Θ نام ده ه شر ی که تا عی از Θ $\theta \in \Theta$ نبوده و ه ازا هر $\chi^{(n)}=j(\chi^{(n)})$ مقداری در Θ تخص ص می‌دهد که رای رورد پارامتر θ وقتی $\chi^{(n)}=\{\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n\}$ مشاهده شده اشد کار می‌رود مقدار روردگر وقتی نمونه فازی $\chi^{(n)}$ مشاهده شده است ک رورد فازی از θ رای $\chi^{(n)}$ می اشد شا ان ذکر است از نجا ی که روردکننده نق ه‌ای فازی مقداری دق ق می اشد روردکننده فازی ک نگاشت فازی ن ست فازی ودن تنها ه عت ا لاعات و داده‌ها را نشان می‌دهد

6) Sample Fuzzy Information 7) Fuzzy Random Sample 8) Minimum Inaccuracy Fuzzy Estimator 9) Maximum likelihood

ا توجه ه مفرو ات ذکر شده تا ز ر را در ن ر گ ر د

$$L^* = j(\chi^{(n)}) \times \Theta \to [\ ,\ ]$$
$$L^* = (\chi^{(n)}, \theta) = \prod_{x_1,\ldots,x_n \in X^{(n)}} L[x_1,\ldots,x_n,\theta]^{\mu_{\chi^{(n)}}(x_1,\ldots,x_n)} \qquad (\ )$$

که در ن $L[x_1,\ldots,x_n,\theta]$ تا درستنما ی رای داده‌های دق ق نمونه مشاهده شده عنی $x^{(n)} = (x_1,\ldots,x_n)$ می اشد

ه ازا هر پ شامد فازی $\chi^{(n)}$ ش نه کردن $L^*(|\chi^{(n)}|,\theta)$ نسبت ه θ می اشد که در ن $|\chi^{(n)}|$استاندارد شده $\chi^{(n)}$ می اشد که تا ع و ت ن توس را ه ز ر معرفی می‌شود

$$\mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\mu_{\chi^{(n)}}(x_1,\ldots,x_n)}{\int_{X^{(n)}} \mu_{\chi^{(n)}}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\chi_i}(\chi_i)}{\int_X \mu_{\chi_i}(\chi_i)dx_i} \qquad (۲)$$

در ا نجا فرض شده است که P_θ پ وسته است د هی است اگر P_θ گسسته اشد انتگرال ه س گما تبد ل می‌شود

حال ه ازا هر پ شامد فازی $\chi^{(n)}$ ش نه سازی $L^*(|\chi^{(n)}|,\theta)$ نسبت ه θ را ر ا کم نه کردن تا

$$\ln L^*(|X^{(n)}|,\theta) = -\sum \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n) \ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) \qquad (\ )$$

عبارت سمت راست معادله اندازه عدم دقت [۱۰] م ان $L(.,\theta)$ و $\mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n)$ نام ده می‌شود که ا $I(\mu_{|\chi^{(n)}|}, L_\theta)$ نشان می‌ده م حال ا توجه ه اصل رورد کم نه عدم دقت فازی رورد کننده نق ه‌ای فازی پارامتر θ عنوان نگاشتی از $\hat{\theta} : j(\chi^{(n)}) \to \Theta$ می اشد که ه ازا $\chi^{(n)} \in j(\chi^{(n)})$ مقدار $\hat{\theta}(\chi^{(n)})$ را در Θ تخص ص می‌دهد ه ور که

$$I(\mu_{|\chi^{(n)}|}, L_{\hat{\theta}(\chi^{(n)})}) = \min I(\mu_{|\chi^{(n)}|}, L_\theta) \qquad (\ )$$

ه راحتی اثبات می‌شود رورد‌گر عدم دقت کم نه فازی در صورت وجود نسبت ه تا ع و ت ا لاعات فازی نمونه ناوردای مق اس است کورال وج ل

ق ه ۱ ۳ فرض کن د $g : \Theta \to \wedge$ ک نگاشت ک ه ک اشد که $g(\Theta) = \wedge$ ک مجموعه در ف ای اقل دسی تعر ف می‌شود در ا ن صورت اگر $\hat{\theta}$ ک رورد‌گر کم نه عدم دقت رای θ از ک ا لاعات فازی نمونه‌ای اشد در ن صورت $g(\hat{\theta})$ ک رورد‌گر کم نه عدم دقت رای $g(\theta)$ در $\wedge$ می اشد

10) Inaccuracy Measure

اث ات می‌دان م ا توجه ه ک ه ک ودن نگاشت $g:\Theta\to\wedge$ ه ازا هر $\lambda\in\wedge$ $\theta\in\Theta$ کتا ی وجود دارد که $\lambda=g(\theta)$

فرض کن د $I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\lambda)=I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\theta)$ اگر $\hat{\theta}$ رورد کم نه عدم دقت رای $\chi^{(n)}$ اشد و اگر $\hat{\lambda}$ را ه صورت $\hat{\lambda}=g(\hat{\theta})$ تعر ف کن م ه ازا $\theta\in\Theta$ دار م

$$I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_{\hat{\lambda}})=I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_{\hat{\theta}})\leq I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\theta)=I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\lambda)\qquad(\ )$$

$$\Rightarrow I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_{\hat{\lambda}})\leq I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\lambda)\qquad(\ )$$

و ق ه اثبات است □

هما ورکه در حالت غ ر فازی تا درستنما ی الزاما نسبت ه پارامتر θ مشتق‌پذ ر ن ست تا عدم دقت ن ز نسبت ه θ ممکن است مشتق‌پذ ر نباشد ه هر حال رای محاسبه روردگر کم نه عدم دقت رای پارامتر θ ا د از تا عدم دقت نسبت ه θ مشتق گرفت ا ن کار تحت شرا ز ر صورت می‌پذ رد

اگر $\chi^{(n)}$ ک ا لاعات فازی نمونه‌ای ا عد n از X ر روی χ اشد و تا درستنما ی L دارای مشتق جز ی پ وسته و مشتق مرتبه دوم جز ی در $\theta\in\Theta$ رای کا ه نقا نمونه در $X^{(n)}$ اشد نگاه رورد‌گر کم نه عدم دقت از معادله ز ر تحت عنوان معادله عدم دقت دست می د

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{X^{(n)}}\mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n)\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)dx_1\ldots dx_n$$
$$=\int\limits_{X^{(n)}}\mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)dx_1\ldots dx_n\qquad(\ )$$

ب عی است رورد‌گر کم نه عدم دقت در صورت وجود از مساوی صفر قرار دادن معادله عدم دقت ه ازا نقا ی که $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\theta)>$ ه دست می د د هی است در حالتی که ا رداری از پارامترهای نامعلوم θ سر و کار داشته اش م مانند حالت غ رفازی رورد‌گر کم نه عدم دقت در صورت وجود از را ه ز ر دست می د

$$\frac{\partial I(\mu_{|\chi^{(n)}|},L_\theta)}{\partial\theta_i}=\qquad i=\ ,\ldots,k\qquad(\ )$$

حال ک ق ه مف د در محاسبه رورد‌گر عدم دقت را ان می‌کن م

ق ه ۳ ا فرض وجود رورد‌گر کم نه عدم دقت تحت شرا ذکر شده اگر ک رورد‌گر غ رفازی θ مثل T درکران پا ن نامساوی کرامر را و صدق کند نگاه رورد‌گر کم نه عدم دقت از را ه ز ر دست می د

$$\int\limits_{X^{(n)}}\mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n)T(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\qquad(\ )$$

اث ات ق ه را تنها رای حالت پ وسته و زمانی که پارامتر θ مقدار است رسی می‌کن م اثبات در حالت گسسته و زمانی که پارامتر ردار- مقدار است ه ور مشا ه است اگر T روردگر نق ه‌ای اشد که درکران پا ن کرامر - را و صدق کند در ا ن صورت خواه م داشت

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) \overset{a.s}{=} \lambda(\theta)[T(x_1,\ldots,x_n)-h(\theta)] \qquad (\quad)$$

که در ن $h(\theta)=E_\theta(T)$ و $\lambda(\theta).h'(\theta)=Var_\theta(T)$ در نت جه ا فرض مشتق‌پذ ری و وجود روردگر کم نه عدم دقت خواه م داشت

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{X^{(n)}} \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}lnL(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\\
&=\int\limits_{X^{(n)}} \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n).\lambda(\theta)[T(x_1,\ldots,x_n)-h(\theta)]dx_1\ldots dx_n\\
&=\int\limits_{X^{(n)}} \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n).\lambda(\theta).T(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n-\\
&\quad\int\limits_{X^{(n)}} \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n).\lambda(\theta)h(\theta)dx_1\ldots dx_n\\
&=\lambda(\theta)\int \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n).T(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n-\lambda(\theta)h(\theta) \quad (\quad)
\end{aligned}$$

حال ا توجه ه معادله عدم دقت در را ه و را ه روردگر عدم دقت ه صورت ز ر محاسبه می‌شود

$$\int_{X^{(n)}} \mu_{|\chi^{(n)}|}(x_1,\ldots,x_n).T(x_1,\ldots,x_2)dx_1\ldots dx_n = h(\hat\theta(\chi^{(n)}) \qquad (\quad)$$

چرا که ا توجه ه را ه

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)=\lambda'(\theta)[T(x_1,\ldots,x_n)-h(\theta)]-\lambda(\theta).h'(\theta) \quad (\quad)$$

و از نجا که هر ر شه از معادله $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) =$ در صورت وجود روردگر درستنما ی ماکز مم $\hat\theta(x_1,\ldots,x_n)\in\Theta$ را خواهد داد که $T(x_1,\ldots,x_n)=h(\hat\theta)$ خواه م داشت

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\hat\theta)=-\lambda(\hat\theta)h'(\hat\theta)=-Var_{\hat\theta}(T)< \qquad (\quad)$$

پس

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}I(\mu_{|\chi^{(n)}|}, L_{\hat{\theta}(\chi^{(n)})}) = -[-\lambda(\hat{\theta}(\chi^{(n)})h'(\hat{\theta}\chi^{(n)})$$
$$= -[-Var_{\hat{\theta}(\chi^{(n)})}(T)] > \qquad (\quad)$$

و اثبات تمام است □

مثال جمع ت زرگی از حشرات را در ن ر می گ ر م P نسبت ا تلا ه و روس خاصی است رای رورد P نمونه‌ای شامل سه حشره ته ه و ه ور جداگانه می زما م تا وجود و روس را ررسی کن م فرض کن د روش ق عی رای تع ن وجود ا عدم وجود و روس ندار م ولی کم و ش می‌توان م وجود عفونت ا ق ع ت ز اد ا عدم وجود عفونت ا ق ع ت ز اد را تع ن نما م ک مدل ر ا ی مناس رای ا ن مساله رورد ا ن است که زما ش رنولی X صورت $B(\ ,P)$ $\leq P \leq$ را در ن ر گرفته و پ شامد فازی $\chi_۱$ را ه صورت وجود عفونت ا ق ع ت ز اد ا تا ع و ت $\mu_{\chi_۱}(\ ) =$ و $\mu_{\chi_۱}(\ ) =$ و پ شامد فازی $\chi_۲$ را ه صورت عدم وجود عفونت ا ق ع ت ز اد ا تا ع و ت $\mu_{\chi_۲}(\ ) =$ و $\mu_{\chi_۲}(\ ) =$ روی $X = \{\ ,\ \}$ تعر ف می‌کن م حال اگر ا لاعات فازی نمونه‌ای $\chi^{(۳)} = \{\chi_۲, \chi_۱, \chi_۲\}$ را دست ورده اش م رورد کم نه عدم دقت ه صورت ز ر دست می د

$$\hat{P}(\chi_۲,\chi_۱,\chi_۲) = \sum_{x_۱=۰,۱}\sum_{x_۲=۰,۱}\sum_{x_۳=۰,۱}\mu_{\chi_۲,\chi_۱,\chi_۲}(x_۱,x_۲,x_۳).\sum_{i=۱}^{۳}\frac{x_i}{\ }$$

از نجا ی که

$$\sum_{x_۱=۰,۱}\sum_{x_۲=۰,۱}\sum_{x_۳=۰,۱}\mu_{\chi_۲,\chi_۱,\chi_۲}(x_۱,x_۲,x_۳) =$$

خواه م داشت

$$\Rightarrow \hat{P}(\chi_۲,\chi_۱,\chi_۲) = \sum_{x_۱=۰,۱}\sum_{x_۲=۰,۱}\sum_{x_۳=۰,۱}\mu_{\chi_۲}(x_۱)\mu_{\chi_۱}(x_۲)\mu_{\chi_۲}(x_۳)\times\frac{\sum_{i=۱}^{۳}x_i}{\ }$$
$$\Rightarrow \hat{P}(\chi_۲,\chi_۱,\chi_۲) =$$

الگور تم وت استرپ[11]

روش وت استرپ توس افرون معرفی شد ا ن روش ا استفاده از روشهای از نمونه‌گ ری[12] توانست دقت شتری را رای رورد‌گر پارامتر θ ارا ه دهد و در نت جه فواصل

11) Bootstrap Algoritm 12) Resampling Methods

اطمینانی که برای آماره مورد نظر توسط روش بوت استرپ ساخته می‌شود فواصل اطمینان صحیح‌تری می‌باشند. افرون و دیسیکو در اینجا برای یادآوری اشاره مختصری بر این روش می‌نمائیم. فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ از F هستند و $\hat{F}$ با F برآورد می‌شود. $\hat{F}$ توزیع تجربی[13] می‌باشد. اگر $T(x)$ برآوردگر پارامتر θ باشد هدف از روش بوت استرپ برآورد امید $T(x)$ یا اندازه دقت $T(x)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{e} = E_{\hat{F}}(T(x^*))$$

که در آن $x^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ یک نمونه تصادفی $i.i.d$ از $\hat{F}$ می‌باشد و که با نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری از نمونه اولیه بدست آمده است. با توجه به اینکه معمولا محاسبه $\hat{e}$ کار ساده‌ای نیست افرون استفاده از روش مونت کارلو[14] را برای محاسبه $\hat{e}$ پیشنهاد می‌کند. در این روش اگر B نمونه بوت استرپ $\{x_{1b}^*, \ldots, x_{nb}^*\}$ $b = 1, \ldots, B,$ از $\hat{F}$ بدست آورده سپس آماره‌های بوت استرپ $\{x_{1b}^*, \ldots, x_{nb}^*\}$ $T(x^{*b}) = T$ را تولید کنیم. نگاه $\hat{e}_B = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T(x^{*b})$ برآورد آماره مورد نظر ما می‌باشد. همانطور که گفته شد به کمک روش بوت استرپ می‌توان اندازه‌های دقت را برای آماره مورد نظر برآورد کرد. اندازه دقت می‌تواند واریانس آماره، توزیع نمونه‌ای آماره و ... باشند.

یکی از مهمترین کاربردهای بوت استرپ ایجاد فواصل اطمینان مناسبتر برای برآوردگر مورد نظر می‌باشد. افرون و دیکیسیو روشهای متعددی را برای محاسبه فاصله اطمینان بوت استرپ ارائه داده‌اند از جمله فاصله اطمینان tی بوت استرپ، BCA ، ABC و ... .
یکی از معمول‌ترین روشهای ساختن فاصله اطمینان بوت استرپ استفاده از صدکهای یافت نگار بوت استرپ برای تعریف حدود اطمینان می‌باشد که به فاصله اطمینان صدکی[15] معروف است. در این روش فاصله اطمینان $(1 - \alpha)$ برای θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta \in [\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1 - \alpha)] \qquad (1)$$

که در آن $\hat{G}$ تابع توزیع تجمعی $T(x^*)$ آماره بوت استرپ می‌باشد. از طرفی چون طبق تعریف $\hat{G}^{-1}(\alpha)$ صدک (α)ام توزیع آماره بوت استرپ است پس $\hat{G}^{-1}(\alpha) = T^{\alpha}(x^*)$ که $T^{\alpha}(x^*)$ صدک (α)ام توزیع $T(x^*)$ است.
حال رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\theta \in [T^{\alpha}(x^*), T^{1-\alpha}(x^*)] \qquad (2)$$

روابط و به حالت ایده‌ال بوت استرپ که در آن تعداد تکرارها بی‌نهایت است اشاره دارند. در حالیکه در عمل از تعداد تکرار متناهی B استفاده می‌کنیم یعنی پس از بدست آوردن B

13) Empirical Distribution 14) Monte Carlo 15) Interral Percentile Bootstrap Confidence

نمونه مستقل وت استرپ و محاسبه مارەهای وت استرپ $T(x^{*b})$ رای نها $b = \quad ,\dots,B$ ماره دست مده را مرتـ کرده و ر اساس نها $T_B^{\alpha}(x^*)$ صدک $(\alpha \quad)$ام توز تجر ی β $T(x^{*b})$ عنی مقدار $B.\alpha$ام مارەهای مرتـ شده $T(x^{*b})$ را دست می ور م در نتـجه فاصله ا مـنان صدکی $(\alpha \ - \ )$ رای θ ه صورت ز ر تقر می‌شود

$$\theta \in [T_B^{\alpha}(x^*), T_B^{1-\alpha}(x^*)] \qquad (\quad)$$

توجه اگر $B.\alpha$ام عدد صحـح نباشد ه ر ق ز ر عمل می‌کنـم اگر $< \alpha \leq \quad <$ اشد قرار می‌دهـم $k = [(B + \quad)\alpha]$ نگاه چندکهای α $\alpha -$ را ه ترتـ توسـ kامـن و $(B + \quad - k)$امـن مقدار مرتـ شده $T(x^{*b})$ دست می ور م

تعمـم الگورتم وت استرپ ه حالت فازی ا توجه ه مفاهـم گفته شده در مورد مشاهدات فازی کار سـار ساده‌ای است

مرحله اول نمونه تصادفی وت استرپ فازی $\chi^{*(n)} = \{\chi_1^*, \dots, \chi_n^*\}$ را ه روش نمونه‌گـری تصادفی ساده ا جا‌گذاری از نمونه تصادفی فازی $\chi^{(n)} = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ دست می ور م

مرحله دوم ماره وت استرپ فازی $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(\chi_1^*, \dots, \chi_n^*)$ را رای نمونه وت استرپ $\chi^{*(n)}$ محاسبه می‌کنـم

مرحله سوم مراحل و را B ار تکرارکرده و B ماره وت استرپ $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ را محاسبه می‌کنـم

مرحله چهارم $\hat{\theta}_B^{*(\alpha)}$, $< \alpha <$,(α) امـن صدک توز نمونه‌ای $\hat{\theta}^*(b)$ عنی مقدار $B.\alpha$ام مارەهای مرتـ شده $\hat{\theta}^*(b)$ که $b = \quad ,\dots,B$ را دست می ور م در نتـجه ـک فاصله ا مـنان $(\alpha \ - \ )$ رای θ ا داده‌های فازی عبارت خواهد ود از

$$\theta \in [(\hat{\theta}_B^{*(\alpha)}, \hat{\theta}_B^{*(1-\alpha)}] \qquad (\quad)$$

مثال کار رد

فرض کنـد X زما ش تصادفی از ـک توز نرمال ا مـانگـن α و وار انس σ^2 اشد σ^2, α هر دو نامعلوم هستند تا ع وت نرمال را رای مشاهدات فازی از X ه صورت ز ر معرفی می‌کنـم

$$\mu_{\chi}(x) = \frac{\exp(-(x-a)^2)}{\lambda^2} \qquad (\quad)$$

حال رای رورد پارامترهای σ^2, α از توز $X \sim N(\sigma^2, \alpha)$ X ـک نمونه تصادفی فازی $f.r.s$ ه حجم n از X دست می ور م فرض کنـد سـستم ا لاعات فازی نمونه‌ای

$\chi^{(n)} = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ نمونه مشاهده شده اشد ر اساس روش کم نه عدم دقت روردگر فازی کم نه عدم دقت رای σ^2, α ه صورت ز ر خواهد ود

$$(\hat{\alpha}, \hat{\sigma}) = (\overline{a}, \sqrt{S^2 + \lambda^2}) \qquad (\ )$$

جا ی که $\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2$ $\lambda^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$

جی - زد - جرتنر و اچ - جا و در سال از تا ع و ت نرمال را ه رای روردِ شاخص D. B. H[16] ق ر س نه ارتفا درختان [17] درختان جنگل استفاده کردند نها ر اساس داده‌های تحق قی که توس دانشگاه ناکو ا ژاپن روی درختان کاج پا گاهی واق در شمال کانادا ه سال انجام شده ود پ شامد فازی را تعر ف کرده و مشاهده را ر اساس نها بقه ندی کردند داده‌ها و مشخصات نها در جدول مده است

در جدول a_i متوس مقاد ر DBH ه دست مده رای هر بقه و ω_i انحراف استاندارد نها می اشد ا توجه ه ا نکه تا ع و ت نرمال رای نمونه تصادفی فازی تا ی ه صورت ز ر است

$$\mu_{\chi_i}(x_i) = \frac{\exp(-(x_i - a_i)^2)}{\lambda_i^2} \qquad (\ )$$

می‌توان م روردگر کم نه عدم دقت فازی را راساس را ه رای α و σ محاسبه نما م در را ه $\lambda_i^2 = k\alpha_i\omega_i^2$ می اشد که در ن k را ر فازی نام ده ω_i انحراف استاندارد و α_i ر نرمال کردن است شکل روردهای کم نه عدم دقت فازی رای α م انگ ن D.B.H و σ انحراف استاندارد را رای مقاد ر مختلف k و α_i نشان می‌دهد

حال ا استفاده از الگور تم وت استرپ و تکرار $B =$ فواصل ا م نان رای α و σ دست می ور م نتا ج رای انحراف استاندارد D.B.H رای مقاد ر مختلف α_i و k در جدول ورده شده است ا ن نتا ج ا استفاده از نرم‌افزار S-PLUS و را ش 2000 گرفته شده‌اند

فاصله ا م نان رای وت استرپ م انگ ن D.B.H ا استفاده از نرم افزار S PLUS و را ش 2000 ه صورت (,) ه دست می د ا ن در حالی است که هتر ن فاصله ا م نان دست مده توس روشهای د گر رای رورد کم نه عدم دقت رجو کن د ه کورال و ج ل و جرتنر و جا و را ر (,) می اشد

16) Diameter at Breast Height of Individual Tress

D.B.H ک شاخص است که از مقدار ن ه سانت متر را اندازه‌گ ر عمر و م زان رشد درختان استفاده م شود

جدول   مشخصات داده‌ها و نمونه فازی

شماره نمونه	فراوانی مشاهدات	درجه رشد	متوسط مقادیر DBH و انحراف استاندارد فازی	
		درجه رشد	$a_i(cm)$	$w_i(cm)$
		χ_1 رشد ناقص		
		χ_2 رشد کامل		
		χ_3 رشد کم نهال		
		χ_4 در حال رشد		
		χ_5 رشد نافته		

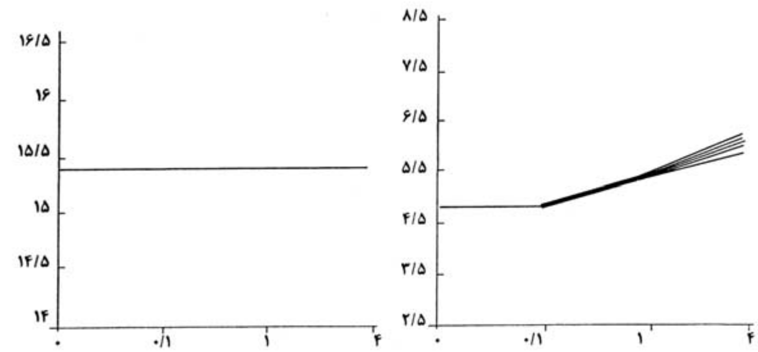
جدول

α	$k=$		$k=$		$k=$	
	C. I	ول فاصله	C. I	ول فاصله	C. I	ول فاصله
α_1	( )		( )		( )	
α_2	( )		( )		( )	
α_3	( )		( )		( )	
α_4	( )		( )		( )	
α_5	( )		( )		( )	

$\alpha_1 = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad) \quad \alpha_2 = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$\alpha_3 = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$\alpha_4 = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad) \quad \alpha_5 = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$



$\alpha_{۲} = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$ $\alpha_{۱} = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$\alpha_{۳} = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$\alpha_{۵} = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$ $\alpha_{۴} = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

شکل

نت جه‌گ ر

نا ر نچه که گفته شد ا استفاده از روش وت استرپ می‌توان م دقت روردگر کم نه عدم دقت فازی $\hat{\theta}(\chi^{(n)})$ را افزا ش ده م ا ن دق قا همان خاص ت کلی وت استرپ و افزا ش اندازه دقت روردگرها در حالتی که داده‌ها غ رفازی هستند می اشد

مراج

[1] Corral, N., Gil, M. A., 1984, The Minimum Inaccuracy Fuzzy Estimation, Stochastica, 8, pp. 63-81

[2] Corral, N., Gil, M. A., 1988, A Note on Interval Estimation With Fuzzy Data, F. S. S. 28, pp. 209-215.

[3] Corral, N., Gil, M. A., 1989, The Likelihood Rotio for Goodness of Fit with Fuzzy Experimental Observations, IEEE Trans System Man Cybernet, 19, No. 24, pp. 771-779

[4] Diciccio, T. J., Efron, B., 1996, Bootstrap Confidence Intervals, Statist. Sci, 11, pp. 189-228

[5] Efron, B., 1979, Bootstrap Methods Another Look at the Jacknife, Ann. Statist, 7, pp. 1-29

[6] Efron, B., Tibshirani, R., 1993, An Introduction to Bootstrap, Chapman & Hall, New York

[7] Gertner, G. 2., Zhu, H., 1996, Bayesian Estimation in Forest Surveys When Samples or prior Information are Fuzzy, F. S. S., 77, pp. 277-290

[8] Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, 1965, Inform Control, 8, pp. 338-353

[9] Zadeh, L. A., 1965, Probability Measures of Fuzy Events, J. math. Anal, 23, pp. 421-427.