هموارساز هسته‌ا تا. دوره نگار ا استفاده از فاصله کول ک ل لر

غلامعلی پرهام سحر درز انی

گروه مار دانشگاه شه د چمران اهواز

چک ده   در سر های زمانی روش هموار سازی هسته‌ای تا دوره نگار ک روش ناپارامتری را ج رای رورد تا چگالی   فی است نکته س ار مهم در اجرای ا ن روش انتخا ک پهنای نوار رای هموار سازی است و ک صورت ا ده ل از انتخا پهنای نوار انتخا ی است که مقدار فاصله KL ن رورد هموار شده و   ف واقعی را م نمم سازد معهذا ا ن روش در عمل کار رد ندارد   ه دل ل ا نکه فاصله KL ک کم ت نامعلوم است ا ن مقاله ک رورد را رای ا ن فاصله ارا ه کرده و نشان می‌دهد که ا ن رورد سازگار است

واژه‌ها کل د   فاصله کولبک ل بلر هموار سازی تا دوره نگار تا چگالی   فی

مقدمه

هموار سازی هسته‌ای تا دوره نگار ک روش را ج رای رورد کردن تا چگالی   فی ه صورت ناپارامتری است روشهای متعددی رای ا ن من ور شنهاد شده‌اند که شامل هموارسازی هسته‌ای[1] و هموارسازی اسپلا ن[2] و تکن کهای موجکی[3] می اشند در ا ن مقاله ما در اره هموارسازی هسته‌ای حث می‌کن م   کی از مولفه‌های هموارسازی هسته‌ای انتخا   ک پهنای نوار رای هموارسازی است در ا ن مقاله ک روش انتخا پهنای نوار را رای افتن پهنای نواری که مقدار اختلاف نامعلوم KL را ن رورد هموار شده و   ف واقعی م ن مم کند شنهاد می‌شود نشان داده می‌شود که ا ن رورد اختلاف نااار و سازگار است سپس پهنای نواری که ا ن رورد اختلاف را م ن مم کند ه عنوان پهنای نوار نها ی انتخا می‌شود هم چن ن می‌توان نشان داد که اختلاف KL ک اندازه فاصله هتر نسبت ه فاصله‌ای است که معمولا استفاده می‌شود

1) kernel smoothing   2) spline smoothing   3) wavelet techniques

پ شنه

الف هموارساز تابع دوره نگار

فرض کن د $\{x_t\}$ ک مقدار واقعی از ک فر ند مانا ا م انگ ن صفر و تا چگالی فی نامعلوم f و $x_\circ, x_۱, \ldots, x_{۲n-۱}$ مشاهداتی متناهی از فر ند $\{X_t\}$ اشند هدف رورد f ه وس له مشاهدات x_t است تا دوره نگار ه صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$I(\omega) = \frac{}{\pi \times \ n} \mid \sum_{t=\circ}^{۲n-۱} x_t e^{(-i\omega t)} \mid^۲; \quad i = \sqrt{-\ }, \quad \omega \in [\ ,\ \pi)$$

رای ساده کردن نمادگذاری قرار می‌ده م

$$f_j = f(\omega_j), \qquad I_j = I(\omega_j)$$

که در ن $\omega_j = \frac{۲\pi j}{۲n}$ سامدهای فور ه نام ده می‌شوند از نجا که تا چگالی فی حول $\omega = \pi$ متقارن است در دنباله مشاهدات روی f_j ها ی که $j = \ ,\ ,\cdots, n-$ است متمرکز می‌شو م اغل مدل ز ر را رای I_j ها در ن ر می‌گ ر م و

$$I_j = f_j \varepsilon_j, \quad j = \ ,\ ,\ ,\cdots, n- \qquad (\ )$$

که ε_j متغ رهای مستقل نما ی استاندارد هستند پس

$$var(I_j) = f_j^۲ \qquad E(I_j) = f_j$$

هما ن‌ورکه مشاهده می‌شود وار انس I_j ه اندازه نمونه ستگی ندارد و نا را ن‌گرچه رورد ف نااُر است اما ک رورد ر ا ت خش نمی اشد ز را سازگار ن ست نا را ن ه ندرت از I_j رای رورد f_j استفاده می‌شود ک راه ممکن رای دست وردن رورد هتر رای f_j هموار کردن I_j هاست در ا ن مقاله روردگر هسته‌ای ز ر را رای f_j ها فرض می‌کن م

$$\widehat{f_j} = \frac{\sum_{m=-n}^{۲n-۱} K_h(\omega_m - \omega_j) I_m}{\sum_{l=-n}^{۲n-۱} K_h(\omega_l - \omega_j)} \quad j = \ ,\ ,\cdots, n- \qquad (\ )$$

که در ن $K_h(.) = \frac{۱}{h} K_h(\frac{.}{h})$ و K_h ک تا چگالی احتمال متقارن وده و تا هسته‌ای نام ده می‌شود پهنای نوار h ک پارامتر هموار سازی نامنفی است که مقدار هموارسازی را کنترل می‌کند f_j تا عی از h است اما رای سادگی ا ن وا ستگی را در نمادگذاری نشان نمی‌ده م همچن ن در س اری از مسا ل هموارسازی هسته‌ای حدود $\sum$ در را ه مقاد ر $n-\ ,\ $ هستند ا وجود ا ن از نجا که اثر حدود مرزی می‌تواند ه وس له هموارسازی متناو کنترل شود

حدود می‌توانند جای $-n$, $n-$ ه , $n-$ $-n,$ تغ رکنند روردگر $\hat{f}_j$ هم چن ن می‌تواند هصورت ک م انگ ن موزون از I_jها تفس ر شود ز را ن را م توان ه صورت ز ر نوشت

$$W_{m-j} = \frac{\sum_{m=-n}^{2n-1} K_h(\omega_m - \omega_j)}{\sum_{l=-n}^{2n-1} K_h(\omega_l - \omega_j)}, \quad \hat{f}_j = \sum_{m=-n}^{2n-1} W_{m-j} I_m \qquad (\;)$$

توجه کن د که $\sum_{m=-n}^{2n-1} W_m =$ و $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{2n-1} W_m^2 =$

فاصله KL

 ک مقدار رای اندازه‌گ ری م زان خو ی روردگر شنهادی می‌تواند مقدار اختلاف ن رورد هموار شده و مقدار واقعی ف اشد هر چقدر که م زان ا ن اختلاف کمتر اشد می‌توان نت جه گرفت که رورد هموار شده ه ف واقعی نزد کتر است مع ار مورد استفاده ما در ا ن مقاله مقدار اختلاف KL کولبک ل بلر است

تعر ف اختلاف KL رای اندازه گ ری فاصله ن دو تا چگالی احتمال $g_1(x)$ و $g_2(x)$ ه صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$d(g_1, g_2) = \int g_1(x) \log \frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx$$

توجه کن د که $d(g_1, g_2) \neq d(g_2, g_1)$ حال در سامد ω_j تا چگالی احتمال I_j متنا ر ا f_j که تحت مدل است دارای توز نما ی ا م انگ ن f_j خواهد ود عنی

$$g_f(x) = \frac{}{f_j} e^{-\frac{x}{f_j}}, \quad x >$$

پس رای $\hat{f}_j$ ک نامزد ب عی تا چگالی احتمال نما ی ا م انگ ن $\hat{f}_j$ است نا را ن

$$g_{\hat{f}_j}(x) = \frac{}{\hat{f}_j} e^{-\frac{x}{\hat{f}_j}}, \quad x >$$

پس م زان فاصله ن f_j و $\hat{f}_j$ ه صورت ز ر داده می‌شود

$$d(g_{\hat{f}}, g_f) = \int \frac{}{\hat{f}_j} e^{-\frac{x}{\hat{f}_j}} \log \frac{\frac{1}{\hat{f}_j} e^{-\frac{x}{\hat{f}_j}}}{\frac{1}{f_j} e^{-\frac{x}{f_j}}} dx = \frac{\hat{f}_j}{f_j} - \log \frac{\hat{f}_j}{f_j} -$$

 نا را ن مقدار فاصله KL را ه ورکلی می‌توان م ه صورت م انگ ن تمام ا ن فواصل در تمام سامدها در ن ر گ ر م و فاصله ن تا چگالی فی f و مقدار رورد شده ن $\hat{f}$ را ه صورت

ز ر تعر ف می‌کن م

$$\triangle_{KL}(\hat{f},f) = \frac{}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\hat{f}_j}{f_j} - \log\frac{\hat{f}_j}{f_j} - \quad\right)$$

حال چون مقدار کم ت $\triangle_{KL}$ ک کم ت نامعلوم است ن را ه صورت ز ر رورد می‌کن م

$$\hat{\triangle}_{h,k} = \frac{}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{k}{\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}}\left(\hat{f}_j - \sum_{m=-k}^{k} W_{m-j} I_{j+m}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{m=-k}^{k} W_{m-j} - \log\frac{\hat{f}_j}{f_j} + \gamma - \quad\right\}$$

که $\gamma = \ /$ مقدار ثا ت او لر و k ک پارامتر عددی مثبت از قبل تع ن شده است که مقدار ن ستگی ه n انتخا شده دارد ساختار $\hat{\triangle}_{h,k}$ را ه صورت ز ر تشر ح می‌کن م هدف جستجوی ک رورد‌گر ناار رای $\triangle_{KL}$ است رای ا ن من ور دو کم ت $\log\frac{\hat{f}_j}{f_j}$ و $\frac{\hat{f}_j}{f_j}$ را رورد می‌کن م اول ن عبارت را ا $\log\frac{\hat{f}_j}{I_j} - \gamma$ رورد می‌کن م ز را

$$E\left\{\log\frac{\hat{f}_j}{I_j} - \gamma\right\} = E\left\{\log\frac{\hat{f}_j}{f_j}\right\}$$

عبارت دوم را ه علت وجود $\frac{1}{f_j}$ نمی‌توان ا $\frac{\hat{f}_j}{I_j}$ رورد کرد ز را تحت مدل $E\left(\frac{1}{I_j}\right) = \infty$ رای غلبه ر ا ن مشکل ما از ا ن حق قت استفاده می‌کن م که اگر f ه ور مو عی هموار اشد نگاه رای k کوچک $f_{j-k} \approx \cdots \approx f_{j+k}$ ه ا ن ترت $I_{j-k},\cdots,I_{j+k}$ ها ه ور تقر بی مستقل و هم توز ا توز نما ی ا م انگ ن f_j خواهند ود نا را ن دار م

$$E\left\{\frac{}{\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}}\right\} \approx \frac{}{kf_j}$$

پس می‌توان $\frac{1}{f_j}$ را ا $k/\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}$ رورد نمود حال $\frac{\hat{f}_j}{f_j}$ را ه دو قسمت ه صورت ز ر تجز ه می‌کن م

$$\frac{\hat{f}_j}{f_j} = \sum_{m=-k}^{k} W_m \frac{I_{j+m}}{f_j} + \frac{\hat{f}_j - \sum_{m=-k}^{k} W_m I_{j+m}}{f_j}$$

قسمت اول را ه وس له ام دش رورد می‌کن م عنی ا $\sum_{m=-k}^{k} W_m$ از نجا که صورت کسر دوم و $\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}$ از هم مستقلند و چون

$$E\left\{\frac{k}{\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}}\right\} \approx \frac{}{f_j}$$

پس قسمت دوم را ا عبارت ز ر رورد می‌کن م

$$\frac{k\left(\hat{f}_j - \sum_{m=-k}^{k} W_m I_{j+m}\right)}{\sum_{m=-k}^{k} I_{j+m}}$$

حال ا جا گذاری ا ن روردها ساختار $\hat{\triangle}_{h,k}$ دست می د

اکنون رای ررسی خواص روردگر Θ را ه صورت ز ر در ن ر گرفته و ا استفاده از ق   ه نشان خواه م داد که $E(\Theta)$ و $Var(\Theta)$ ه سمت صفر م ل می‌کنند وقتی که $n \to \infty$ چن ن نتا جی ی‌ارزش هستند مگر نکه نشان ده م $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ کندتر از Θ ه سمت صفر م ل می‌کند درق   ه   شرا ی را   ان می‌کن م تا ا ن را نشان دهد ا ن دو ق   ه اهم نشان می‌دهد که $\hat{\triangle}_{h,k}$ رای $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ سازگار است

$$\Theta = \hat{\triangle}_{h,k} - \triangle_{KL}(\hat{f}, f)$$

ق   ه ۱   فرض کن د f ل پ‌ش تس[۴] و ن صفر و   نها ت محدود شده اشد و هسته k فشرده و متقارن و انتگرال توان دوم ن موجود اشد   در ن صورت تحت مدل   دار م

$$|\, E(\Theta) \,| \leq \max_j (f_j)\,\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right) \qquad (\ )$$

$$\begin{aligned} Var(\Theta) \leq & \left\{\max_j (f_j)\,\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right)\right\}^{۲} \\ & + \frac{b-}{n}\left\{\frac{C_۱(f)}{k-} + C_۲(f)\,\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right) + C_۳(f)\right\} \qquad (\ ) \end{aligned}$$

که $C_j(f)$ها ثا تها ی تنها وا سته ه f و b تعداد I_jها در تک ه گاه K_h است و ω ه صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$\omega(g, \varepsilon) = \sup\{\,|\, g(x) - g(y) \,|\, : \,|\, x - y \,| \leq \varepsilon\}$$

4) Lipschitz

علاوه م زان همگرا ی $\hat{\triangle}_{h,K}$ ه مقدار نامعلوم $\triangle_{KL}(\hat{f},f)$ را ر است ا

$$\Theta = \bigcirc_{pr}\left\{\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (\ )$$

که م ت b مشاهده شده در الا که همچن ن تعداد مشاهدات کار رده شده رای رورد هر $\hat{f}_j$ است نقش دوگانه‌ای ا h ازی می‌کند ز را اگر L رد K اشد دار م $b=[\ln h]$ هم چن ن توجه کن د که از روا و مشاهده می‌گردد که اثر k از قبل انتخا شده روی $E(\Theta)$ و $Var(\Theta)$ زمان که $n\to\infty$ از ن می‌رود

اث ات رای سادگی نمادگذاری قرار می‌ده م $\hat{f}_j^k=\sum_{m=-k}^{k}W_mI_{j+m}$ همچن ن Θ را ه صورت ز ر تجز ه می‌کن م $\Theta=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Theta_j$ که در ن

$$\Theta_j = \log I_j - (\log f_j - \gamma) + \frac{k(\hat{f}_j-\hat{f}_j^k)}{\sum_{m=-k}^{k}I_{j+m}} + \sum_{m=-k}^{k}W_m - \frac{\hat{f}_j}{f_j}$$

اث ات ا ام د گرفتن از Θ_j و استفاده از ا ن حق قت که مشاهدات مستقلند دار م

$$E(\Theta_j) = E(\hat{f}_j-\hat{f}_j^k)E\left(\frac{k}{\sum_{m=-k}^{k}I_{j+m}}\right) + \sum_{m=-k}^{k}W_m - \frac{E(\hat{f}_j)}{f_j} \qquad (\ )$$

قرار ده د

$$x_1=\min_j(f_{j-k},\cdots,f_{j+k}), \qquad x_2=\max_j(f_{j-k},\cdots,f_{j+k})$$

ا استفاده از $\frac{1}{x_1}\le E\left\{k/\sum_{m=-k}^{k}I_{j+m}\right\}\le\frac{1}{x_2}$ و را ه خواه م داشت

$$\mid E(\Theta_j)\mid\le E(\hat{f}_j)\omega\left(\frac{}{f},\frac{k\pi}{n}\right)\le\max_j(\hat{f}_j)\omega\left(\frac{}{f},\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (\ )$$

را ه از م انگ ن‌گ ری را ه حاصل می‌شود

اث ات در ا تدا عبارت Θ_j را ه صورت ز ر تجز ه می‌کن م

$$\begin{aligned} V_j &= \log I_j-(\log f_j-\gamma)\\ Z_j &= (\hat{f}_j-\hat{f}_j^k)\left(\frac{k}{\sum_{m=-k}^{k}I_{j+m}}-\frac{}{f_j}\right)\\ X_j &= \sum_{m=-k}^{k}W_m\frac{I_{j-m}-f_j}{f_j}\end{aligned}$$

وا ح است که $E(\Theta_j)^۲ \le \ E(V_j)^۲ + \ E(Z_j)^۲ + \ E(X_j)^۲$ و تحت مدل $E(V_j)^۲ = \frac{\pi^۲}{۶}$ حال

$$E(Z_j)^۲ \le E\left\{(\hat{f}_j - \hat{f}_j^k)^۲\right\}\left(\frac{k}{k-}\frac{}{x_۱^۲} - \frac{}{x_۲ f_j} + \frac{}{f_j^۲}\right)$$

$$\le E\left\{(\hat{f}_j - \hat{f}_j^k)^۲\right\}\left(\frac{}{x_۱^۲(\ k-\ )} + \ \left(\frac{}{x_۱^۲} - \frac{}{x_۲^۲}\right)\right)$$

$$\le \frac{\max_j(f_j)^۲}{(\ k-\ )\min_j(f_j)^۲} + \frac{\max_j(f_j)^۲}{\min_j(f_j)^۲}\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right) \qquad (\ )$$

$$E(X_j)^۲ = \left(\sum_{m=-k}^{k} W_m \frac{f_{j+m} - f_j}{f_j}\right)^۲ + \sum_{m=-k}^{k} W_m^۲ \frac{f_{j+m}^۲}{f_j^۲}$$

$$\le \left\{\max_j(f_j)\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right)\right\}^۲ + \frac{\max_j(f_j)^۲}{\min_j(f_j)^۲} \qquad (\ )$$

از ترک روا و و استفاده از ا ن حق قت که Θ_i و Θ_j رای $b <| i - j |$ از هم مستقلند دار م

$$Var(\Theta) \ \le \ E(\Theta)^۲ = \frac{}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} E(\Theta_i \Theta_j)$$

$$\le \frac{}{n^۲}\sum_{|i-j|>b} E(\Theta_i)E(\Theta_j) + \frac{}{n^۲}\sum_{|i-j|\le b}\left\{E(\Theta_i)^۲ E(\Theta_j)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\le \left\{\max_j(f_j)\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right)\right\}^۲$$

$$+ \ \frac{b-}{n}\left\{\frac{C_۱(f)}{k-} + C_۲(f)\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right) + C_۳(f)\right\}$$

که در ن

$$C_۱(f) = \frac{\max_j(f_j)^۲}{\min_j(f_j)^۲},\ C_۲(f) = \frac{\max_j(f_j)^۲}{\min_j(f_j)},\ C_۳(f) = \frac{\pi^۲}{} + \frac{\max_j(f_j)^۲}{\min_j(f_j)^۲}.$$

اث ات از نجا که f ل پ شتس و از پا ن ه صفر کراندار است وقتی که $n \to \infty$ دار م

$$\omega\left(\frac{}{f}, \frac{k\pi}{n}\right) \le K(\frac{k\pi}{n}) \to \ .$$

ا ن ه معنای ن است که $E(\Theta) \to$ ه سانی ملاح ه می‌شود که اگر b ک مقدار ثا ت وده ا رشدی کمتر از n داشته اشد $Var(\Theta) \to$ نا را ن از روا و نت جه می‌شود که $\Theta = \bigcirc_{pr}\{(\frac{b}{n})^{۱/۲}\}$
ق ه علاوه ر فر ات ق ه فرض می‌کن م که ک دنباله غ ر نزولی b_n وجود دارد که $b_n = o(n^{۱/۳})$ نگاه

$$E\{\triangle_{KL}(\hat{f}, f)\} \geq \frac{C}{b_n} + o(\frac{}{b_n}) \qquad (\quad)$$

که C تنها وا سته ه K و f است علاوه سرعت همگرا ی $\hat{\triangle}_{h,k}$ ه $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ شتر از سرعت همگرا ی $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ ه سمت صفر است
اث ات رای اثبات را ه ه دو نامساوی ن از دار م ا تدا تعر ف می‌کن م $l(y) = (y - \;) - \log y$ و نا را ن $\triangle_{KL}(\hat{f}, f) = n^{-۱}\sum_{j=۰}^{n} l(\hat{f}_j/f_j)$ ا کار ردن تقر ت لور $l(y) \approx \frac{۱}{۲}(y - \;)^{۲}$ رای $l(\hat{f}_j/f_j)$ و استفاده از ا ن فرض که f ن صفر و ی‌نها ت محدود شده است اول ن نامساوی را ه صورت ز ر دست می ور م

$$C = -\frac{\min_j(f_j)}{\max_j(f_j)}, \quad C\left(\frac{\hat{f}_j - f_j}{f_j}\right) \leq l\left(\frac{\hat{f}_j}{f_j}\right) \qquad (\quad)$$

رای دست وردن نامساوی دوم از حل را ه ز ر شرو می‌کن م

$$E\left\{(\hat{f}_j - f_j)^{۲}\right\} = var(\hat{f}_j) + \left\{E(\hat{f}_j) - f_j\right\}^{۲} \qquad (\quad)$$

از نجا که رای $| m |> \frac{b_n}{۲}$ وزنهای W_mها را ر صفر هستند دار م

$$\left\{E(\hat{f}_j) - f_j\right\}^{۲} = \left\{\sum_{m=-n}^{۲n-۱} W_{m-j}E(I_m) - f_j\right\}^{۲} \leq \omega^{۲}\left(f, \frac{\pi b_n}{n}\right) \qquad (\quad)$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{f}_j) &= \sum_{m=-n}^{۲n-۱} W_{m-j}^{۲} Var(I_m) \\ &= \sum_{m=-n}^{۲n-۱} W_{m-j}^{۲} f_j^{۲} + \sum_{m=-n}^{۲n-۱} W_{m-j}^{۲}(f_m^{۲} - f_j^{۲}) \\ &\geq \sum_{m=-n}^{۲n-۱} W_{m-j}^{۲}\left\{f_j^{۲} - \;\max_j(f_j)\omega\left(f, \frac{\pi b_n}{n}\right)\right\} \qquad (\quad) \end{aligned}$$

همچنین توجه کنید که

$$\sum_{m=-n}^{2n-1} W_{m-j}^{2} \approx \frac{L \int K^{2}(\omega)d\omega}{b_n} \qquad (\ )$$

که L برد تابع هسته‌ای K است. از ترکیب روابط تا می‌توان به این نتیجه رسید که یک ثابت مثبت $D_1 >$ وابسته به K و ثابت دوم D_2 وابسته به K و f وجود دارد به طوری که

$$E\left\{\frac{\hat{f}_j - f_j}{f_j}\right\}^{2} \geq \frac{D_1}{b_n} - \frac{D_2}{n} + \bigcirc\left\{(\frac{b_n}{n})^{2}\right\}$$

برای برقراری آخرین مرحله از قضیه به نکات زیر توجه کنید: اگر b_n از مرتبه n^{α} باشد آنگاه از رابطه داریم

$$\Theta = \bigcirc_{pr}\left(n^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$$

و از رابطه

$$E\left(\triangle_{KL}(\hat{f}, f)\right) \geq Cn^{-\alpha} + o(n^{-\alpha})$$

بنابراین اگر $\alpha < \frac{1}{3}$ سرعت همگرایی $\hat{\triangle}_{h,k}$ به $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ بیش از سرعت همگرایی $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ به سمت صفر است. به این معنی که اگر b پارامتر از $n^{1/3}$ رشد کند که معادل با اینکه پهنای نوار h سریعتر از $\frac{1}{n^{2/3}}$ کاهش یابد آنگاه برآوردگر ما برای $\triangle_{KL}(\hat{f}, f)$ سازگار است.

مراجع

[1] Burnham, K.P. and Anderson, D.R.(1998). Model Selection and Inference. A Practical Information - Theoretic Approach. Springer-Verlag New York Inc.,

[2] Chow, G.C.(1983). Econometrics. McGraw Hill, New York.

[3] Fan, J. and Kreutzberger, E. (1998). Automatic local smoothing for spectral density estimation. Scandiavian Journal of Statistics, 23: 359-369.

[4] Gao, H.Y.(1997). Choice Of Threshold for Wavelet Shrinkage Estimate Of The Spectrum. Journal Of Time Series Analysis, 18:231-251.

[5] Harvich, C.M. and Beltrao, K.(1990). Cross Validatory Choice Of a Spectrum Estimate And Its Connections With AIC. Journal Of Time Series Analysis, 11: 121-137.

[6] Kooperberg, C., Stone, C.J. and Troung, Y.K. (1995). Logspline estimation of a possibily mixed spectral distribution. Journal Of Time Series Analysis, 16:359-388.

[7] Linhart, H. & Zucchini, W.(1986). Model Selection. Wiley, New York.

[8] Lee, T.C.M.(1997). A simple span selector for periodogram smoothing. Biometrika, 84: 965-969.

[9] Moulin, P.(1994). Wavelet Thresholding techniques for power spectrum estimation. IEEE Transactions on signal processing, 42:3126-3136.

[10] Pawitan, Y. and Osullivan, F. (1994). Nonparametric spectral density estimation using penalized whittle likelihood. Journal of the American Statistical Association, 89: 600-610.