شعا ف قدم زدن تصادف ساده ر گروه‌ها کاکستر مثلث

محمد جلودار ممقانی

گروه مار ر ا و کامپ وتر دانشگاه علامه ا ا

چک ده در ا ن مقاله شعا فی قدم زدن ساده تصادفی ساده ر رخی گروه‌های کاکستر مثلثی را ا استفاده از نما ش راس‌های ک کوچکتر ن درخت در ر گ رنده‌ی گراف ک لی ا ن گروه‌ها نسبت ه مولد ع ی نها ه صورت ک ز ان متن زاد م العه می‌کن م ا ن کار را ا محاسبه‌ی سری رشد جفت‌های مرت ژودز ک‌ها ی که از غاز می‌شوند ول مساوی دارند و در راس‌های گراف ک لی ه‌هم می‌رسند انجام می‌ده م ه ا ن ترت ک سری ا را مثبت حاصل می‌شود که را ه‌ی نزد کی ا سری همرشد گروه دارد ا استفاده از ا ن را ه تقر بی از شعا فی مورد ن ر حاصل می‌شود

شعا ف

فرض کن د $\Gamma = (V, E)$ گرافی همبند و مو عا متناهی ا مجموعه‌ی راس‌های V و مجموعه‌ی ال‌های E اشد ف ای ه لبرت

$$l^{2}(V) = \{f : V \rightarrow C | \sum_{v \in V} |f(v)|^{2} < \infty\},$$

ا نرم

$$|f| = (\sum_{v \in V} |f(v)|^{2})^{\frac{1}{2}},$$

و عملگر

$$M : l^{2}(v) \rightarrow l^{2}(v), M(f)(v) = \frac{}{deg(v)} \sum_{w \sim v} f(w),$$

که در ن $deg(v)$ تعداد راس‌های مجاور ا v است و مجمو روی راس‌های مجاور v محاسبه می‌شود را ه‌ی نزد کی ا قدم زدن تصادفی روی گراف مذکور دارد هدف ا ن خش معرفی ا ن را ه و مساله‌ی مورد م اله‌ی ا ن نوشته است

ا تدا توجه کن د که هرگاه $deg(v) = d$ تا عی ثا ت اشد نگاه M عملگری خودالحاق است و از ا ن رو ف ن $spect(M)$ عنی مجموعه اعدادی چون λ که ه ازای ن ها عملگر $M - \lambda I$ معکوس ندارد ز ر مجموعه‌ای فشرده از $[\; , \; -]$ است و نا را ن $\rho(M) = \sup spect(M)$ که ه شعا فی M موسوم است وجود دارد و $\| M \| = \rho(M)$ [1] نا را ن M کراندار ن ز هست

رای افتن ارتبا M ا قدم زدن تصادفی ساده روی Γ پا ه‌ی $\{b_v | v \in V\}$ ا تعر ف

$$b_v(x) = \begin{cases} & if \ x = v \\ & otherwise \end{cases}$$

را رای $l^{۲}(V)$ در ن ر گ ر د ا محاسبه ملاح ه می‌کن م که

$$M(b_v)(x) = \begin{cases} \frac{۱}{d} & if \ x \sim v \\ & otherwise \end{cases}$$

در نت جه دار م

$$< M(b_v), b_w > = \begin{cases} \frac{۱}{d} & if \ v \sim w \\ & otherwise \end{cases}$$

که را ر است ا احتمال حرکت متحرکی از v ه ک راس د گر ا ی فق ک ال وا ن چ زی ن ست جز قدم اول از ک قدم زدن تصادفی ر Γ

اکنون فرض می‌کن م که راس $*$ در Γ راس غاز حرکت ا ن قدم زدن تصادفی اشد در ا ن صورت عدد $p^{(n)}(*, *)$ را ر است ا احتمال رس دن ه $*$ در n گام ه شر غاز حرکت از $*$ ملاح ه می‌کن م که

$$p^{(n)}(*, *) = < M^n(b_*), b_* >, n = \; , \; , \ldots . \qquad (\;)$$

ا استفاده از نا را ری چپمن کولموگورف و مساله‌ی شماره جلد اول [2] نت جه می‌گ ر م که حد $r = \lim \sqrt[۲n]{p^{(۲n)}(*, *)}$ وجود دارد

لم ۱ دار م $r = \rho(M)$

اث ات ا استفاده از نا را ری کوشی شوارتس ا جا می‌کند که

$$r = \lim \sqrt[۲n]{p^{(۲n)}(*, *)} \leq \| M \| \rho(M)$$

رای اثبات نا را ری در جهت عکس پا ه $\{b_v | v \in V\}$ را ه صورت $\{b_{v_i} | i = \; , \; , \ldots\}$ مرت و نما ش ماتر سی M را نسبت ه ا ن پا ه در ن ر می‌گ ر م اکنون از لم در [7] استفاده می‌کن م ■

در م ان گراف‌های منت م گراف‌های ک لی قرار دارند که گراف‌های ناشی از نما ش هندسی گروه‌های ا تول د متناهی‌اند در ا ن مقاله مقدار تقر بی عدد $r = \rho(M) = \| M \|$ را رای رخی گروه‌های کاکستر محاسبه می‌کن م البته روشن است که ا ن عدد رای گراف‌ها و لذا گروه‌های متناهی است ه ورکلی در مورد درخت‌های $d-$منت م گزاره‌ی ز ر رقرار است

لم دار م $r = \frac{\sqrt{d-1}}{d}$

اث ات رجو کن د ه [7] ا

ه سانی ثا ت می‌شود که

لم ۳ هر گ ه Γ گراف $d-$ منت م ب شد نگ ه پوشش جه ن T_d است و $\frac{\sqrt{d-1}}{d} \leq \rho(M)$

در نت جه رای هر گراف $d-$منت م دار م

$$\frac{\sqrt{d-\ }}{d} \leq \rho(M) \leq \ .$$

هر گاه در مورد گرافی تساوی $\rho(M) =$ رقرار اشد گراف را م انگ ن پذ ر می‌نام م و در صورتی که ا ن گراف گراف ک لی ک گروه اشد گروه را م انگ ن پذ ر می‌نام م

کی از روش‌های محاسبه $p^{(n)}(*,*)$ شمردن تعداد مس رهای ه ول n در Γ که از $*$ غاز می‌شوند و سپس ه کار ردن تعر ف کلاس ک احتمال است در ا ن‌جا سه نو مس ر قا ل تشخ ص‌اند مس رها ی که ژودز ک‌اند مس رها ی که از $*$ غاز و ه $*$ ختم می‌شوند و ه چ الی را دو ار ی نمی‌کنند و سرانجام مس رها ی ه ول n که از $*$ غاز و ه $*$ ختم می‌شوند و در ن‌ها رخی از ال‌ها دستکم دو ار ی می‌شوند اکنون اگر a_n b_n و c_n ه ترت تعداد اع ای ا ن مجموعه‌ها اشند دار م

$$p^{(\text{۲}n)}(*,*) = \frac{b_{\text{۲}n} + c_{\text{۲}n}}{a_{\text{۲}n} + b_{\text{۲}n} + c_{\text{۲}n}}.$$

نا را ن هدف ا ن است که مقاد ری تقر بی از a_n b_n و c_n ه‌دست ور م a_n و b_n ه‌ترت تا رشد و تا همرشد گراف گروه نام ده می‌شوند و مورد م العه‌ی وس قرارگرفته است رای نمونه ه [9] [11] ا [4] مراجعه کن د

ز ان متن زاد

در ا ن خش ز ان‌های متن زاد را معرفی می‌کن م رای ا لا شتر ه [6] و [12] مراجعه نما د ه ازای مجموعه‌ی متناهی X مجموعه‌ی X^* شامل تمام کلمه‌ها ی است که ا الفبای X ساخته می‌شوند کلمه‌ای راکه در ساختن ن حرفی ه‌کار نرفته است کلمه تهی می‌نام م و ا λ نشان می‌ده م

تعر ف ۱ منظ ور از ک دستور ز ب ن متن زاد ک چهار ت $\Gamma = (N, T, S, R)$ است که در ن N و T مجموعه‌ها متن ه اند و به ترت به الف   غ ز و ب ن موسومند $S \in N$ ع و   غ ز   اصل نام ده م شود و $R \subset N \times (N \cup T)^*$ متن ه   و به مجموعه قواعد موسوم است معمولا هر ق عده $(n, w) \in R$ را به صورت $n \to w$ نش ن م ده م

اگر $u, v \in (T \cup N)^*$ م گو م کلمه u مشتق   از کلمه v است و م نو سم $v \Rightarrow u$ هرگ ه ق عده ا چون (n, w) $a \in (T \cup N)^*$ و $b \in T^*$ وجود داشته ب شند به ور که $u = anb$ و $v = awb$ حل اگر $\Rightarrow^*$ بست ر تا $\Rightarrow$ ب شد ز ب ن تول د شده توس Γ را به صورت $L = \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ تعر ف م کن م ان ز ب ن را ب ابه م م ن م م هر گ ه هر کلمه $w \in L$ مشتق از S دن لها کت از مشتق ت ب شد سر   رشد ز ب ن L را به صورت ز ر تعر ف م کن م

$$f(z) = \sum_{w \in L} z^{|w|}$$

که در ن $|w|$ معرف ول کلمه w است هر گ ه ان سر سر مکلورن ت بع گو ب شد م گو م سر   رشد ز ب ن L گو ست از جمله ز ب ن‌ه   که سر رشد نه گو ست ز ب ن‌ه راست و چپ من م هستند توجه کن د که در ک ز ب ن راست چپ من م مولفه دوم هر ق عده $(n, w) \in R$ به صورت $w = w'n'$ $(w = n'w')$ است که در ن $w' \in T^*$ و $n' \in N$

رای ارا ه‌ی مثالی از ک ز ان متن زاد در زم نه‌ی مر و   ه ا ن کار ه چند مفهوم د گر ن ازمند م

گراف مو عا متناهی و همبند G ا ک راس مشخص شده‌ی $*$ را ک گراف علامت‌دار می‌نام م و ن را ا نماد $(G, *)$ نشان می‌ده م من ور از مخرو   ه راس v درگراف $(G, *)$ ز ر گرافی چون $C(v)$ است ه   وری که توان $*$ را ه هر راس u از ن ا ژودز کی که از v می‌گذرد وصل کرد   نا را ن مخرو $C(v)$ را ژودز ک‌ها ی ا غاز v تول د می‌کنند که توان ن‌ها را ا ک ژودز ک تا $*$ ادامه داد

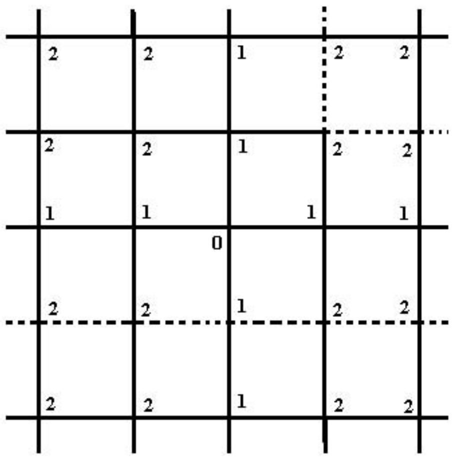
مخرو های $C(v)$ و $C(u)$ را هم ارز می‌نام م هرگاه ه عنوان دوگراف علامت دار کر خت اشند در ا ن صورت می‌گو م راس‌های v و u از ک نو مخرو ی رخوردارند

اکنون می‌توان م مثالی از ک ز ان متن زاد و سری رشد ن ارا ه ده م

مثال ۱ گراف علامت دار $G = Z \times Z$ را که راس مشخص شده   ن $* = (\ , \ )$ است در ن ر بگ ر د

مخرو $C(\ , \ )$ برابر است ب $G = Z \times Z$ عن مخرو   راس $(\ , \ )$ تم م گراف است

به‌ازا $m \neq$ مخرو $C(m, \ )$ ز ر گراف است که در ن مصفحه $x \geq m$ $x \leq m$ قرار دارد بسته به ا ن که $m \geq$ $m \leq -$ به هم ن ترت   مخرو $C(\ , m)$ در ن مصفحه $y \geq$ $y \leq -$ قرار دارد اگر $m \geq$ $m \leq -$



شکل نو راس‌ها

روشن است که اگر $(m,n) \in Z \times Z$ $m \neq$ و $n \neq$ نگاه

$$C(m,n) = C(m,\ ) \cap C(\ ,n)$$

در شکل مخرو های $C(\ ,\ )$ و $C(\ ,-\ )$ را ا خ های مق مشخص کرده‌ا م

هر ک ر ختی از گراف $(Z \times Z, (\ ,\ ))$ مخرو $C(\ ,\ )$ را ه روی خودش می‌نگارد و از ا ن رو نو راس $(\ ,\ )$ منحصر ه فرد است ا ن نو مخرو ی را نو صفر می‌گ ر م

روشن است هر دو گراف علامت‌دار از مجموعه‌ی $\{C(\ ,n), C(m,\ ) | m,n \in Z\}$ کر ختاند از ا ن رو ه ازای هر $m,n \neq$ راس‌های $(m,\ )$ و $(\ ,n)$ از ک نو مخرو ی ر خوردارند ا ن نو مخرو ی را نو می‌نام م ه سانی د ده می‌شود که مخرو های $C(m,n) = C(m,\ ) \cap C(\ ,n)$ ه ازای $m \neq$, $n \neq$ کر ختاند ا ن نو را نو می‌نام م

در نت جه در گراف $G = Z \times Z$ اساسا سه نو مخرو وجود دارند ه عبارت د گر راس‌های گراف مذکور را می‌توان ا سه رنگ , , چنان رنگ م زی کرد که مخرو های وا سته ه ن‌ها ک ر خت اشند البته نو مخرو ی ک راس را می‌توان ا استفاده از تعر ف مخرو ن راس ه صورت ز ر تعر ف کرد

تعر ف در گراف علامت‌دار $(G,*)$ نو مخرو راس $*$ صفر است و اگر $v \neq *$ نو

مخرو ن عدد صح ح

$$t(v) = |v| - \min_{v,y\in P} |y|$$

است که در ن م نموم رو چند لع ه P که ش مل راس‌ه v و yاند مح س ه م شود بن بران نو مخرو ک راس به چند لع ه ش مل ن راس و ول ژودز ک که ن را به م دا وصل م کند بستگ دارد در شکل نو مخرو چند راس گراف $Z \times Z$ را مشخص کرده‌ا م

رای ماده کردن زم نه‌ی اثبات ق ه‌ی مجموعه‌ی ال‌های گراف علامت دار $G = Z \times Z$ رنگ م زی می‌کن م نخست ال‌ها ی را که از * خارج شده‌اند ه صورتی که در شکل نشان داده شده‌اند ه دلخواه توس رنگ‌های a, b, c, d رنگ می‌زن م و ه چهار راس از نو می‌رس م که از هر ک از ن‌ها سه ال خارج شده است ا ن ال‌ها را از چپ ه راست ا حروف c, b, a رنگ می‌کن م اکنون ه چهار راس از نو و ه چهار راس از نو می‌رس م از هر ک از ا ن راس‌های نو دو ال خارج شده است ا ن ال‌ها را از چپ ه راست ا حرف‌های b, a رنگ می‌زن م ا ادامه‌ی ا ن روش تمام ال‌های گراف مذکور رنگ م زی می‌شوند ه ا ن ترت ثا ت کرده‌ا م که

گزاره ۱ مجموعه ل‌ه $G = Z \times Z$ ب حداکثر رنگ ق بل رنگ م ز است

ق ه ۱ مجموعه راس‌ه گراف $Z \times Z$ ز ن ک گرامر متن زاد است

اث ات رای ا ن من ور مولفه‌های گرامر $\Gamma = (N, T, S, R)$ را ه شرح ز ر تعر ف می‌کن م

الف ا پا ان $T = \{a, b, c, d\}$

الف ا غاز $N = \{x_0, x_1, x_2\}$ که در ن x_0 معرف کل گراف x_1 معرف ز ر گراف ا نو مخرو ی و x_2 معرف مخرو ها ی ا نو هستند

اصل x_0 و سرانجام

رای رس دن از $(\; , \;)$ ه ک راس دلخواه $Z \times Z$ ژودز ک واصل ن ن‌ها را که در منتهاال ه سمت چپ واق است مورد استفاده قرار می‌ده م و از ا ن رو مجموعه‌ی قواعد R را ه صورت ز ر تعر ف می‌کن م

$$x_0 \to \lambda, x_0 \to ax_1, x_0 \to bx_1, x_0 \to cx_1, x_0 \to dx_1, \qquad (\;)$$
$$x_1 \to \lambda, x_1 \to bx_1, x_1 \to cx_2, x_2 \to \lambda, x_2 \to bx_2, \qquad (\;)$$

ملاح ه می‌کن م که ا ن دستور ز ان چپ من م است و ز ان L ی را که تول د می‌کند معرف مجموعه‌ی راس‌های درخت شکل است چون ا ن درخت ک کوچکتر ن درخت در ر

گ رنده‌ی شبکه‌ی $Z \times Z$ است رهان کامل است ■

تاب و سر رشد با استفاده از ق ـه‌ی ملاحـ ـه می‌کنـم که سری رشد ز بان L با سری رشد شبکه $Z \times Z$ یعنی سری رشد گروه بلی زاد $Z \times Z$ نسبت به مولد $S = \{(\ , \ ), (\ , \ ), (- \ , \ ), (\ , - \ )\}$ یکی است هرگاه سری رشد L را $f(z)$ و سری رشد مخرو های با راس‌های نو و را به ترت. f_1 و f_2 بنامیم نگاه با توجه به قواعد ز بان L دار م

$$f(z) = \ + \ zf_1(z), f_1(z) = \ + zf_1(z) + zf_2(z), f_2(z) = \ + zf_2(z).$$

از ا ن دستگاه سری رشد شبکه با گروه مذکور به صورت $f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ بدست می د

مثال تعد د ژ ودز ک‌ها. اکنون تعداد ژودز ک‌ه به ول n $n \geq$ در ش که $Z \times Z$ را که از (,) غ ز م شوند م شم ر م

برا ا ن ک ر ب توجه به شکل ملاحـ ه م کن م که ا ن ژودز ک‌ه ب کردن ش که مس ره شکل و مس ره مکمل ن‌ه پد د مده‌اند از ا ن رو ن‌ه را م توان ب ا فه کردن قوان ن

$$x_1 \to ax_2, x_2 \to ax_2, \qquad (\ )$$

به مجموعه قوان ن و تول د نمود

حـ ل اگر b_n تعداد ژودز ک‌ه به ول n ب شد نگ ه ب نم ده ب لا سر مولد ا ن دن له $g(z)$ در رواب ب زگشت

$$g(z) = \ + \ zf_1(z), f_1(z) = \ + zf_1(z) + \ zf_2(z), f_2(z) = \ + \ zf_2(z)$$

صدق م کند ب حذف f_1 و f_2 از ا ن مع دله‌ه بدست م ور م

$$g(z) = \frac{\ - z + \ z^2}{\ - \ z + \ z^2}.$$

مثال ۳ تعد د ژ ودز ک‌ها به ول n. اکنون به‌ازا هر n تعداد ژودز ک‌ه را در گراف $Z \times Z$ م شم ر م که از (,) غ ز و به راس مشترک در ا ن ش که منته م شوند به ع رت د گر عدد b_{2n} را محـ سـ ه م کن م

برا ا ن من ور ب توجه به مث ل‌ه فوق برا تول د تم م راس‌ه هم‌ف صله در ش که مذکور از راس (,) به عنوان ک ز ب ن متن زاد مولفه ه گرامر $\Delta = (N, T, S, R)$ را به شرح ز ر تعر ف م کن م

لفبا پا انی $T = \{a, b, c, d\}$ که مجموعه رنگ‌ه است که ل‌ه ش که را ب ن‌ه رنگ کردم ملاحـ ه م کن م که دو ژودز ک به ول n در $Z \times Z$ ب غ ز (,) و انته

مشترک به صورت جفت مرت $(u,v)\in T^*\times T^*$ است مشرو بر ا ن‌که $|u|=|v|=n$ بنابرا ن در ا ن‌جا رشد ز ر مجموعه‌ها از مونو د $T^*\times T^*$ با شرا   و ژه مورد نظر است برا مشخص کردن ا ن ز ر مجموعه الف   غ ز N را به صورت ز ر تعر ف م کن م

لفبا غاز $N=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ که در ن $S=x_0$ حالت غ ز   اصل و معرف کل مجموعه مورد نظر است x_1 و x_2 به ترت   معرف راس‌ها   نو   و   در گراف $Z\times Z$اند و x_3 معرف راس‌ها   است که از (,) به ک فاصله‌اند ام برا   تبد ل شدن به دو ژودز ک از نو مورد نظر با د ک   از قوان ن بدبه   و سپس ک   از قوان ن بدبه   اجرا شود

اکنون مجموعه   قوان ن R را به صورت ز ر تعر ف م کن م

$$x_0\to\lambda, x_0\to(a,a)x_1, x_0\to(b,b)x_1, x_0\to(c,c)x_1, x_0\to(d,d)x_1,$$

$$x_0\to(a,b)x_3, x_0\to(b,c)x_3, x_0\to(c,d)x_3, x_0\to(d,a)x_3,$$

$$x_1\to\lambda, x_1\to(b,b)x_1, x_1\to(c,c)x_2, x_1\to(a,a)x_2,$$

$$x_1\to(a,b)x_3, x_1\to(b,c)x_3,$$

$$x_2\to\lambda, x_2\to(b,b)x_2, x_2\to(a,a)x_2, x_2\to(a,b)x_3,$$

$$x_3\to(b,a)x_2, x_3\to(c,a)x_2,$$

حال اگر $h(z)$ تابع مولد دنباله b_n باشد نگاه با استفاده از نما د گذار بالا و ا ن قوان ن دار م

$$h(z)=\ \ +\ \ zf_1(z), f_1(z)=\ \ +zf_1(z)-\ \ zf_2(z)+\ \ z^2f_2,$$

$$f_2(z)=\ \ +\ \ zf_2(z)-\ \ z^2f_2$$

توجه م کن م که چون قوان ن $x_i\to(u,v)x_3, i=\ \ ,\ \ ,\ \ ; u,v\in\{a,b,c\}$ به راس   از نو مورد نظر منجر نم شوند در ا ن شم رش مستق م نقش ندارند در واق ا ن قوان ن همراه با قوان ن $x_3\to(v,u)$ به ژودز ک‌ها   از نو مورد نظر منجر م شوند و بنابرا ن در شم رش نقش پ دا م کنند

$$h(z)=\ \ +\frac{z}{(\ \ -z)(\ \ +\ \ z-\ \ z^2)}$$

از ا ن تا برای رورد c_nها استفاده می‌کن م فرض کن د $p_{2n}=(v_0,\dots v_n,u_0,\dots u_n)$ اجتماعی از دو ژودز ک باشد که از $v_0=u_0$ غاز می‌شوند طول‌شان n است انتهاشان کی است $v_n=u_n$ و $v_{n-1}\neq u_{n-1}$ در ا ن صورت می‌نو س م $p_{2n}=(v_0,\dots v_n,u_{n-1},\dots u_0)$ هرگاه c_{2n} تعداد ا ن مس رها و $j(z)$ سری مولد ن باشد در ا ن صورت $j(z)$ تابعی گو ا است و مخرج ن با مخرج $h(z)$ برابر است [6] بنابرا ن سری‌های مکلورن ا ن توابع از ک شعاع همگرا ی برخوردارند

ر شه‌ها مخرج و شعا همگرا

ملاحـ ه می‌کن م که را سری $f(z) = \sum_{\circ}^{\infty} z^n$ نامنفی‌اند و شعا همگرا ی ن $R =$ ک نق ه تک ن تا $f(z)$ است ق ه ز ر تعم می از ا ن گزاره است

ق ه ق ه **پر نگشام.** هر گ ه در سر $f(z) = \sum_{\circ}^{\infty} a_n z^n$ تم م را از مرحلها به بعد نامنف ب شند و شع همگرا ن R عدد حق ق و مثبت باشد نگ ه R ک نق ه تک ن $f(z)$ است [5]

در نت جه هرگاه را سری مکلورن تا گو ای $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ نامنفی و ر شه‌های $q(z)$ غ ر صفر اشند نگاه شعا همگرا ی سری مک‌لورن $g(z)$ م ن مم قدر م لق ر شه‌های مخرج است و از ا ن رو هرگاه $p^{2n}(\, , \,)$ احتمال ازگشت قدم زدن تصادفی ه $(\, , \,)$ ه شر شرو از ا ن نق ه اشد نگاه

$$\rho(M) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p^{2n}(\, , \,)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{c_{2n}}{d^{2n}}} = \frac{}{r_\circ d}$$

که در ن $r_\circ$ کوچکتر ن ر شه‌ی مثبت مخرج است

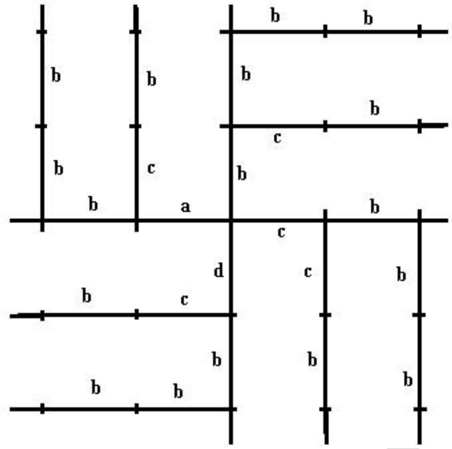
مثال ر شه‌ه مخرج ت ب $g(z) = \; + \frac{4x}{1+2x-2x^2}$ ع رتند از

$$x = \; , x = - + \frac{\sqrt{}}{} , x = - - \frac{\sqrt{}}{}$$

چون را سر مکلورن ا ن ت ب نامنف اند نت جه م گ ر م که شع همگرا ا ن سر $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ است و در نت جه شع ف قدم زدن تص دف س ده بر $Z \times Z$ برابر است ب $\frac{\sqrt{3}+1}{8}$

گراف گروه‌ها کاکستر

در ا ن خش گروه‌های کاکستر خاصی را در ن ر گرفته و ثا ت می‌کن م که مجموعه‌ی راس‌های هر ک از ا ن گروه‌ها ز ان ک گرامر متن زاد است و ا استفاده از ا ن واقع ت ک ز ان متن زاد رای ژودز ک‌ها ی که از غاز و ه راس دلخواهی از ا ن گراف منتهی می‌شوند ارا ه می‌ده م ا ا ن کار خواه م توانست شعا فی گام تصادفی ساده ر ا ن گروه‌ها را م العه کن م رای ا لا شتر در مورد گروه‌های کاکستر ه [3] ا [ ] مراجعه کن د



شکل   ک پوشش رای شبکه‌ی مر عی صفحه

ق   ه ۳ فرض کن د W ک گروه ک کستر با مجموعه   مولد ک کستر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و گراف ک لا Γ نس ت به ا ن مجموعه باشد در ا ن صورت ک گرامر متن زاد وجود دارد به ور که مجموعه   راس‌ها Γ زبان ا ن گرامر است

اث ات ق   ه را در دو حالت ثا ت می‌کن م

الف در مورد گروه $W =< a_1, a_2, \cdots, a_n | a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^1 = \quad >$ گراف ک لی ا ن گروه نسبت ه مولد داده شده ک درخت ر شه دار ا ر شه در   است که هر راس ن ر n ال قرار دارد   حال گرامر

$$A = (N, T, S_0, R)$$

را که در ن

$$N = \{x_0, x_1 \cdots x_n\}, T = \{e, a_1, a_2, \cdots, a_n\}, S_0 = x_0$$

و R از قوان ن

$$R = \{x_i \to e, i = \quad , \quad , \cdots n, x_i \to a_j x_j, i \neq j, i, j = \quad , \quad , \cdots n\}$$

تشک ل شده است در نظر می‌گ ر م   ملاح ه می‌کن م که هر راس گراف را می‌توان ا استفاده از ا ن قوان ن و ا شرو از x_0 ه‌دست ورد   در واق x_0 معرف تمام گراف و

$x_i, i = \ , \ , \cdots n$ معرف شاخه‌ای از ن است که از راس $n\cdots ,$ $,$ $a_i, i =$ غاز می‌شود رای نمونه دار م

$$x_\circ \to a_۱x_۱ \to a_۱a_۲x_۲ \to a_۱a_۲a_۱x_۱ \to a_۱a_۲a_۱a_۳x_۳ \to a_۱a_۲a_۱a_۳$$

در مورد گروه‌های مثلثی کاکستر

$$W = \langle a, b, c | a^۲ = b^۲ = c^۲ = (ab)^p = (bc)^p = (ca)^p = \ \rangle.$$

که در ن $\ge p$ ا تدا رچسب گذاری ـ یعی ال‌های گراف را ا حروف a, b, c در ن ر می‌گ ر م و فرض می‌کن م ال‌ها ی که از مبدا خارج می‌شوند در جهت خلاف حرکت عقر ه‌های ساعت دارای ترت abc اشند نا را ن گرافی دار م که هر ال ن رچسبی متعلق ه a, b, c دارد و هر راس ن ر سه چند لعی منت م هر ک ا تعداد ا لا p واق است توجه می‌کن م که قوان ن از نو سی [10] نوعی جهت روی ا ن گراف القا می‌کنند ه ا ن معنی که مثلا قانون

$$\overbrace{aba\ldots a}^{p} \to \overbrace{bab}^{p} \to b$$

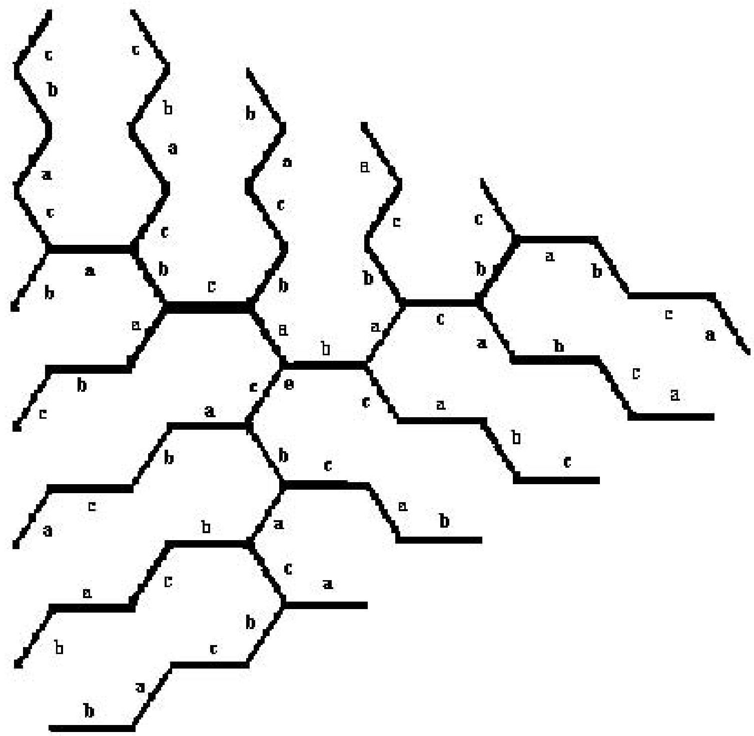
ان می‌کند که رای ی p لعی منت م $\overbrace{ab\cdots ab}^{p}$ از لعی ا رچسب a غاز کن د حال ا شرو از مبدا و ا توجه ه ا ن جهت و فهرست کلمات ممنوعه در [10] ال متنا ر ا خر ن حرف هر کلمه ممنوعه و ر چسب ن را از چند لعی‌های شامل مبدا حذف می‌کن م ا ن کار را در مورد چند لعی‌های مجاور ا در ن رگرفتن جهت القا ی مذکور وا تدا از راسی که الی از ن قبلا حذف شده و فاصله‌اش از مبدا کمتر ن است انجام می‌ده م و در صورتی که از ک چند لعی الی حذف نشده ود از جهت القا ی استفاده و الی را که ا د حذف می‌کن م ا ن روش حذف را در مورد سا ر چند لعی‌ها ادامه می‌ده م ه ا ن ترت از هر چند لعی حداکثر دو ال تقر با مقا ل حذف می‌شود و نا را ن ک درخت ه‌دست می ور م که درجه‌ی هر ک از راس های ن حداکثر است ا ن درخت ک کوچکتر ن درخت در ر گ رنده‌ی گراف الی مذکور و در حق قت ک پوشش ن است شکل

حال ملاح ه می‌کن م که راس‌های ا ن گراف دارای چهار نو مخرو ی , , , اند و از ا ن رو ا تعر ف ز ان $\Gamma = (N, T, S, R)$ ا مولفه‌های

$N = \{x_\circ, x_۱, x_۲, x_۳\}$ که در ن $x_i, i = \ , \ , \ ,$ نو مخرو ی i است

$T = \{a, b, c\}$

$S = \{x_\circ\}$



شکل   ک کوچکتر ن درخت در ر گ رنده رای شبکه‌ی شش لعی در صفحه

R مشا ه قواعد خش

نت جه‌ی مورد ن ر حاصل می‌شود

ق ه فوق نتا ج س ار جالبی دارد که در ز ر ه کی از ن‌ها که مستق ما ه کار ما مر و است اشاره می‌کن م

در هر گروه کاکستر جفت‌های ژودز ک‌ها ی که از مبدا غاز و ه ن ختم می‌شوند ز ان ک گرامر متن زاد است ا استفاده از ا ن نت جه ق ه‌ی اساسی ز ر حاصل می‌شود

ق ه سر رشد جفت‌ه ژودز ک‌ه که از م دا غ ز و به ک راس م رسند برابر است :

$$H(z) = \quad + \frac{(z + z^{۲} + \cdots z^{p-۱})}{ - z - z^{۲} - \ldots z^{p-۱} + z^p + z^{p-۱}(z - \quad)(\quad z^{p-۱} - \quad)}$$

اث ات اثبات ا ن ق ه را در مرج های [7] [9] می‌توان افت

توجه می‌کن م که اگر

$$H(z) = \sum_{۰} a_n z^n$$

سری مکلورن تا $H(z)$ اشد نگاه a_n تعداد مس رهای سته ه ول n است که از غاز و ه ن ختم می‌شوند نا را ن $\frac{\sqrt[۲n]{a_{۲n}}}{۳}$ را راست ا شعا فی گام تصادفی ساده رگروه مورد ن ر نا را ن رای رورد شعا فی گام تصادفی از ق ه‌ی پر نگشا م می‌توان م استفاده کن م رای ا ن من ور ا د ر شه‌ای از مخرج ا کوچکتر ن قدر م لق را رورد کن م مسلما ا ن کار نازمند حثی ولانی در ن ر ه معادلات است و از ا ن رو خارج از حث ماست نا را ن حث را ا ارا ه‌ی دو مثال ه ازای $p =$ و $p =$ ه پا ان می ر م

مثال

الف به ازا $p =$ گام تص دف س ده بر ل‌ه جر فرش شش لع در صفحه اقل دس به دست م د مخرج ت ع $H(z)$ در ا ن ح لت ع رت است از

$$D_{۳}(z) = \quad - z + \quad z^{۲} - \quad z^{۳} - \quad z^{۴} + \quad z^{۵} = (\quad - z)(\quad + \quad z^{۲} - \quad z^{۴})$$

از ا ن رو ر شه‌ه ن ع رتند از

$$z = \quad , \pm \frac{\sqrt{\quad + \sqrt{\quad}}}{\quad}$$

در نت جه شع ف ا ن گ م برابر است : $\rho = \frac{۲}{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}}$

به ازا $p =$ گام تصادف بر له جرفرش از صفحه هذلولو ، جرهٔ هشت لع صرت م گرد در ان حلت مخرج $H(z)$ برابر است با

$$D_{۴}(z) = \quad - z - z^{۲} + \quad z^{۳} - \quad z^{۴} + \quad z^{۶} - \quad z^{۷}$$

با از دک م محسبه م توان در فت که $D_{۴}(\ ) = -$ و $D_{۴}(\frac{۲}{۳}) = \frac{۳۱۶}{۲۱۸۷}$ و $D_{۴} = - \quad \times \quad ^{-۱۳}$ از ان رو $D_{۴}$ ک ریشه بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ دارد و از ان رو شعاع ف ان گام تصادف در روابط $\frac{۱}{۲} < \rho_{۴} < \frac{۴}{۹}$ صدق م کند روشن است که انتخ مقدار چون $s < t$ که در شرا $\frac{۲}{۳} < s < t < \frac{۳}{۴}$ و $D_{۴}(s) >$ و $D_{۴}(t) <$ صدق کنند موجب بهتر شدن ان برورد م شود

مراجع

[1] A.E. Taylor, *Introduction to functional Analysis*, Wiley International Edition, Tokyo, Japan, 1958.

[2] G. Polya and G. Szego, *Problems and theorems in Analysis Vol.1 and 2*, Springer, 1972 and 1976.

[3] N. Bourbaki, *Groups et algebres de Lie,* Chapitres 4,5, et 6, Hermann, Paris, 1968.

[4] Pierre de la Harpe , *Topics in Geometric Group Theory*, University of Chicago Press, 2002.

[5] E.Hille , *Analytic Function Theory, Vol.1, 2end ed.*, Chelsea Publishing Company New York 1959.

[6] L. Bartholdi and T. G. Ceccherini-Silberstein 'Growth series and Random walks on some Hyperbolic graphs' Monatsh. Math. 136, 181-202 (2002).

[7] W. Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups* , Cambridge University Press, 2000.

[8] Pierre de la Harpe 'An invitation to Coxeter groups', in *Group theory from Geometrical viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Veriovsky (eds.), World Scientific, Singapore, 1991.

[9] M.J. Mamaghani, *Growth Functions of Surface Groups*, Math.Notes, Vol. 58, No. 5, 1995.

[10] M.J. Mamaghani, *Rewriting systems and Complete growth series of for triangle Coxeter groups*, to appear.

[11] Luis. Paris, 'Growth series of Coxeter groups', in *Group theory from Geometrical viewpoint*, E. Ghys, A. Haelfliger and A. Veriovsky (eds.), World Scientific, Singapore, 1991.

[12] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading, 1979.

محمد جلوداری ممقانی گام تصادفی ر گروه‌های کاکستر گزارش فنی زمستان