روردگرها   ز و م ن ماکس ر پا ه تا ز ان فاز

ا رج حق قی‌نژاد س د محمود اهر

دانشکده علوم ر ا   دانشگاه صنعتی اصفهان

چک ده   در ا ن مقاله مساله تصم م هنگامی که ا تا ز ان نادق ق فازی رو رو هست م مورد م العه قرار می‌گ رد نخست تا ز ان نادق ق ه صورت ک عدد فازی صورت ندی می‌شود نگاه روردگرهای ز و م ن ماکس تحت تا ز ان فازی در هر دو حالت دون داده و ا داده تعر ف شده و ا چند مثال تشر ح می‌گردند

واژه‌ها کل د   اعداد فازی تا ز ان فازی روردگر ز روردگر م ن ماکس

مقدمه

در ک مساله تصم م ا مولفه‌های گوناگونی رو رو هست م مانند   ف ای اعمال ف ای حالات   عت تا ز ان تا م لو ت مشاهدات تا احتمال مر و   ه مشاهدات تا احتمال ش ن مر و   ه ف ای پارامتر و . . .   در ن ر ه تصم م کلاس ک همه‌ی مولفه‌ها ی که رشمرد م دق ق فرض می‌شوند اما در عمل ا مواردی از تصم م‌گ ری مواجه هست م که ک ا چند جز ن نادق ق است   مثلا ممکن است مشاهدات مر و   ه متغ ر مورد م العه نادق ق اشند ا نادق ق گزارش شوند ا ا ن‌که م لو ت ک تصم م مقداری مبهم و نادق ق اشد ا ا ن‌که حالات مختلف   عت مبهم اشند و مانند ا ن‌ها

 ا توجه ه نچه که گفته شد م العه ن ر ه تصم م در مح   فازی چندی است که مورد توجه قرار گرفته است   چون ن ر ه تصم م همان ورکه در الا اشاره کرد م شامل چند ن مولفه است م العه ا ن ن ر ه در مح   فازی می‌تواند از جنبه‌های گوناگون انجام شود نخست ن ار در سال   تاناکا و همکاران (.Tanaka et al) مساله تصم م در مح   فازی را مورد م العه قرار دادند   ن‌ها مساله تصم م را هنگامی که ف ای اعمال و ف ای   عت فازی اشند البته در ک چارچو   ساده فارغ از عناصر ماری ررسی نمودند   ا ن مو و   ا دخالت دادن مفهوم احتمال شامدهای فازی رای محاسبه‌ی م لو ت عناصر ف ای اعمال توس   اکودا و همکاران (Okuda et al. (1987   ررسی شد ن ز ر ک ه ومورا (Uemura 1993)

 ن ر ه تصم م ماری ن ز توس   تعدادی از محققان م العه شده است   از جمله ه ل و همکاران (Gil et al. (1985   رورد ز را در حالتی که مقاد ر مشاهده شده ا گزارش شده

رای متغ ر تصادفی مورد م العه فازی اشند ررسی نموده‌اند ر پا ه‌ی تعر فی رای انتگرال توا فازی مقدار ف تل و ه ول (Viertl and Hule (1991)) رورد ز نواحی HPD و ع ی د گر از مباحث مار ز را در حالتی که داده‌ها فازی اشند م العه نموده‌اند ن ز رک ه ف تل و هارتر (Viertl and Hareter (2002)) زمون فرض ن ز در مح فازی و در چارچو ن ر ه تصم م مورد توجه قرار گرفته است کازالس و همکاران (Casals et al. (1986)) در سال زمون ز و م ن ماکس را هنگامی که داده‌ها فازی اشند ررسی نموده‌اند اهری و بهبود ان و زمون فرض‌های فازی را در دو حالت ا داده‌های معمولی و ا داده‌های فازی ا ره افت زی م العه نموده‌اند رای مروری جام تر ر کارهای انجام شده در مار ز فازی می‌توان ه اهری مراجعه نمود

در ا ن مقاله مساله تصم م تحت تا ز ان فازی تعر ف و ررسی می‌شود در خش دوم تعار ف و مفاه م مقدماتی از ن ر ه مجموعه‌های فازی مرور شده‌اند در خش سوم مروری کوتاه ر مفاه م اصلی ن ر ه تصم م انجام شده است در خش چهارم مساله تصم م ر پا ه‌ی تا ز ان فازی در حالت دون داده م رح و ررسی می‌شود در خش پنجم مساله تصم م را ر پا ه‌ی تا ز ان فازی و در حالت ا داده م العه می‌کن م و در هر دو حالت دون داده و ا داده تصم م‌های ز و م ن ماکس تعر ف می‌شوند و ا مثال‌های عددی تشر ح می‌گردند در خش ششم نتا جی را در اره‌ی روردگرهای ز ر پا ه‌ی تا ز ان نادق ق ان و اثبات می‌کن م

مفاه م مقدمات ن ر ه مجموعه‌ها فاز

تعر ف ۱ ک ز ر مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X توس تا ع وت ن $\widetilde{A}(x) : X \longrightarrow I$ تعر ف می‌شود مقدار $\widetilde{A}(x)$ نشان‌دهنده‌ی درجه ع وت x در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ است چنانچه $x \in X$ وجود داشته اشد که $\widetilde{A}(x) =$ نگاه $\widetilde{A}$ را نرمال گو م اگر منحصرا ک x ا و ژگی فوق وجود داشته اشد $\widetilde{A}$ را نرمال و تک‌نما ی گو م

تعر ف ۲ مجموعه عناصری از X را که درجه ع وت ن‌ها در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ حداقل ه زرگی α $< \alpha <$ اشد α برش مجموعه تراز $\widetilde{A}$ گو م و ا $\widetilde{A}_\alpha$ نشان می‌ده م عنی

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X; \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$$

تعر ف ۳ فرض کن د $X = R$ مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X رامحد گو م اگر

$$\widetilde{A}(\lambda x_1 + (\ - \lambda)x_2) \geq min\{\widetilde{A}(x_1), \widetilde{A}(x_2)\} \quad \forall \ x_1, x_2 \in X; \lambda \in [\ ,\ ]$$

تعر ف ک مجموعه فازی نرمال محد و تک‌نما ی از R را که تا ع وت ن ق عه ه ق عه پ وسته اشد ک‌عدد ف ز گو م

مجموعه تمام عددهای فازی از R را با $\mathcal{F}(R)$ نشان می‌دهیم $\widetilde{N}$ را یک عدد فازی LR گوییم هرگاه تابع عضویت آن به شکل زیر باشد

$$\widetilde{N}(x)=\begin{cases} L(\dfrac{m-x}{\alpha}) & x\leq m\\ R(\dfrac{x-m}{\beta}) & x>m\end{cases}$$

که در آن $L,R:R^{+}\longrightarrow[\ ,\ ]$ را توابع مرجع، m را مقدار نمایینه و α و β اعداد حقیقی مثبت را پهنای چپ و راست $\widetilde{A}$ نامیم. $\widetilde{N}$ را با نماد $\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. چنانچه برای عدد فازی $\widetilde{N}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ داشته باشیم

$$L(x)=R(x)=\begin{cases} \quad -x & \quad\leq x\leq \\ & \text{سایر جاها}\end{cases} \qquad (\ )$$

نگاه $\widetilde{N}$ را عدد فازی مثلثی گوییم و آن را با $(m,\alpha,\beta)_T$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱ فرض کنید برای عدد فازی $\widetilde{L}$ توابع مرجع به صورت ... باشند به علاوه $m=$ و $\alpha=\beta=$ نگاه تابع عضویت عدد فازی مثلثی $\widetilde{L}=(\ ,\ ,\ )_T$ به صورت زیر است

$$\tilde{L}(x)=\begin{cases} |\ \ -x| & x\in[-\ ,\ ]\\ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

عدد فازی $\widetilde{L}$ را می‌توان توصیفی از تقریبا صفر تلقی نمود.

مثال ۲ فرض کنید برای عدد فازی $\widetilde{N}$ توابع مرجع به‌صورت ... باشند و $m=$ و $\alpha=\ \ ,\beta=$ نگاه تابع عضویت عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}=(\ ,\ ,\ )_T$ به‌صورت زیر است

$$\tilde{N}_{1}(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\ }- & \leq x\leq \\ \dfrac{-x}{\ }+ & < x\leq \end{cases}$$

غیر فازی سازی عدد فازی: در عمل پس از محاسبات لازم با اعداد فازی نتایج کار به‌صورت یک عدد فازی بیان می‌شود. اما در بسیاری از موارد لازم است تا نتیجه‌ی محاسبات را به‌صورت یک عدد معمولی بیان کنیم. لذا باید عدد فازی حاصل از محاسبات را غیر فازی نماییم. چند روش برای این کار پیشنهاد شده است. یکی از روش‌های متداول برای این کار روش موسوم به مرکز ثقل به کوتاه COG است که ذیلا آن را بیان نموده و در ادامه از این روش برای غیر فازی سازی استفاده خواهیم نمود.

تعر ف   فرض کن د $\widetilde{A}$ ک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X ا تا ع و ت $\widetilde{A}(x)$ اشد در ا ن‌صورت $\delta_{\widetilde{A}}$ را که در صورت وجود ه‌صورت ز ر تعر ف می‌شود غ ر فازی شده‌ی $\widetilde{A}$ گو م

$$\delta_{\widetilde{A}} = \frac{\int_x x\widetilde{A}(x)dx}{\int_x \widetilde{A}(x)dx}$$

مث ل   فرض کن د $\widetilde{N} = (c, a, b)_T$ ک عدد فازی مثلثی اشد در ا ن‌صورت غ ر فازی شده‌ی $\widetilde{N}(c, a, b)_T$ ه‌صورت ز ر است

$$\delta_{\widetilde{N}} = \frac{\int_x x\widetilde{N}(x)dx}{\int_x \widetilde{N}(x)dx} = c + \frac{b-a}{}$$

رای مثال غ ر فازی شده‌ی اعداد مثلثی $\widetilde{N}, \widetilde{L}$ در مثال‌های و عبارتند از

$$\delta_{\widetilde{L}} = \quad , \quad \delta_{\widetilde{N}} = \quad /$$

مرور ر مفاه م مقدماتی ن ر ه تصم م

در ا ن خش مفاه م مقدماتی ن ر ه تصم م را در دو حالت دون داده و ا داده ه کوتاهی مرور می‌کن م (Berger (1985), Ferguson (1967)

تعر ف   ک مساله تصم م در حالت دون داده را در ن ر گ ر د فرض کن د Θ ف ای ط عت و $\mathcal{A}$ ف ای اعمال ممکن اشد تا $L(\theta, a) : \Theta \times \mathcal{A} \longrightarrow R^+$ را تا ز ن تصم م a می‌نام م که نشان‌دهنده‌ی ز ان ناشی از اخذ تصم م a است هنگامی‌که حالت واقعی ط عت θ اشد

تعر ف   در ک مساله تص م م گو م $a^* \in \mathcal{A}$ تصم م م ن م کس است اگر

$$L(\theta, a^*) = \min_{a\in\mathcal{A}} \max_{\theta\in\Theta} L(\theta, a)$$

اکنون فرض کن د که ر اساس ا لاعات پ ش ن ک توز احتمال مانند $\pi(\theta)$ ه عناصر ف ای ط عت تخص ص داده شده اشد ا داشتن $\pi(\theta)$ ز ان ناشی از تصم م a ک متغ ر تصادفی

است که امد ر ا ی ن ز ان ز تصم م a نام ده می‌شود عنی

$$B(\pi, a) = E^{\theta}(L(\theta, a))$$

تعر ف در ک مساله تصم م ا توز ش ن $\pi(\theta)$ و تا ز ان $L(\theta, a)$ تصم م ز a_B عبارتست از تصم می که کمتر ن ز ان ز را داشته اشد عنی

$$B(\pi, a_B) = \min_{a \in \mathcal{A}} B(\theta, a)$$

مثال شخصی را در نظر گ ر د که در ک روز اری می‌خواهد از منزل رون رود ا توجه ه و هوا در ساعات نده وی مردد است که ا چتر و ا دون چتر رون رود نا را ن وی ا ک مساله تصم م ا اجزای ز ر رو رو است

$\{\theta_۱, \theta_۲\}$ و هوا در ساعات نده ف ای ط عت

$\{a_۱, a_۲\}$ همراه ردن ا نبردن چتر ف ای تصم م

که $\theta_۱$ ارش اران $\theta_۲$ نبار دن اران $a_۱$ رون رفتن ا چتر $a_۲$ انگر رون رفتن دون چتر است مقاد ر تا ز ان ه ازای تصم م‌های مختلف در جدول ز ر مده است

$L(\theta, d)$	$\theta_۱$	$\theta_۲$
$a_۱$		
$a_۲$		
$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, a)$		

اکنون فرض کن د که ر اساس گزارشات هواشناسی در ساعات نده هوا ا احتمال p ارانی و ا احتمال $p -$ $= q$ فتا ی خواهد شد مخا ره ز تصم م‌ها ا توجه ه تا ش ن $\pi(\theta_۱) = \quad - \pi(\theta_۲) = p$ ه صورت ز ر خواهد ود

$L(\theta, a)$	$\theta_۱$	$\theta_۲$	$B(\pi, a)$
$a_۱$			$p + \quad q$
$a_۲$			p

پس $= \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, a_۲)$ عنی $a_۲$ تصم م م ن ماکس است ا مقا سه مخا ره ز تصم م‌های $a_۲$ و $a_۱$ نت جه می‌شود که $a_۱$ تصم م ز است اگر $- \geq p$ و در غ ر ا ن صورت $a_۲$ تصم م ز خواهد ود

حال مساله تصم م ا داده را در چارچو نظر ه تصم م ماری در نظر می‌گ ر م فرض کن د $f(x, \theta)$ ک تا چگالی احتمال وا سته ه پارامتر مجهول θ اشد هم‌چن ن فرض کن د

که $\pi(\theta)$ تا چگالی پ‌ش‌ن θ اشد و علاوه $L(\theta, d(\underline{x}))$ تا ز ان تصم م $d(\underline{x})$ اشد مساله تصم م ا داده عبارت است از افتن ک تا تصم م ک روردگر رای پارامتر مجهول θ راساس مشاهدات $\underline{X}$ و تا پ‌ش‌ن $\pi(\theta)$ تحت تا ز ان $L(\theta, d(\underline{x}))$. در مساله رورد نق ه‌ای در چارچو ن ر ه تصم م ف ای اعمال همان ف ای ‌ بعت است عنی $\mathcal{A} = \Theta$ در ا ن چارچو هر تصم م عبارت است از ک روردگر رای پارامترθ لذا از ا ن پس از اص لاح روردگر ه‌جای تا تصم م استفاده خواه م نمود

تعر ف تا $L(\theta, d(\underline{x})) : \Theta \times \mathcal{D} \longrightarrow R^{+}$ را ت ‌ ز ن تصم م $d(\underline{x})$ نام م که نشان‌دهنده‌ی ز ان ناشی از اخذ تصم م $d(\underline{x})$ است هنگامی که حالت واقعی ‌ بعت θ اشد

تعر ف ۱ در ک مساله رورد ت ‌ ر سک روردگر$d(\underline{X})$ را ه‌صورت ز ر تعر ف می‌کن م انتگرال در حالت لب گ است لجس است

$$R(\theta, d(\underline{X})) = E^{X}[L(\theta, d(\underline{X}))] = \int_{x} L(\theta, d(\underline{X})) f_{\theta}(\underline{x}) dx$$

تعر ف ۱۱ در ک مساله رورد روردگر $d_{\circ}$ رابروردگر م ن م کس نام م اگر

$$R(\theta, d_{\circ}) = \min_{d \in \mathcal{D}} \max_{\theta \in \Theta} R(\theta, d(\underline{X}))$$

تعر ف ۱۲ فرض کن د $\pi(\theta)$ توز پ‌ش‌ن θ و $R(\theta, d(\underline{X}))$ تا مخا ره روردگر$d(\underline{X})$ اشد مخ ره ‌ ز $d(\underline{X})$ ا توجه ه توز پ‌ش‌ن $\pi(\theta)$ ه‌صورت ام د ر ا ی $R(\theta, d(\underline{X}))$ نسبت ه θ تعر ف می شود عنی

$$B(\pi, d(\underline{X})) = \int_{\theta} R(\theta, d(\underline{X})) \pi(\theta) d\theta$$

تعر ف ۱۳ فرض کن د $B(\pi, d(\underline{X}))$ مخا ره ز روردگر $d(\underline{X})$ بق تعر ف   اشد روردگر$d_{B}(\underline{X})$ رابروردگر ‌ ز گو م اگر

$$B(\pi, d_{B}(\underline{X})) = \min_{d \in D} B(\pi, d(\underline{X}))$$

تعر ف ۱ فرض کن د $f_{\theta}(\underline{x})$ تا چگالی احتمال ردار تصادفی $\underline{X}$ $\pi(\theta)$ توز پ‌ش‌ن θ و $L(\theta, d(\underline{X}))$ تا ز ان روردگر $d(\underline{X})$ اشد مخا ره ز پس ن $d(\underline{X})$ ا مشاهده $\underline{x}$ ه‌صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$r^{\theta|\underline{X}}(\pi, d) = E^{\theta|\underline{X}}(L(\theta, d(\underline{x})) = \int_{\theta} L(\theta, d(\underline{x})) \pi(\theta|\underline{X}) d\theta$$

که در ن $E^{\theta|\underline{X}}(.)$ ام د ر ا ی نسبت ه تا توز پس ن $\pi(\theta|\underline{X})$ است و

$$\pi(\theta|\underline{X}) = \frac{f_{\theta}(\underline{x}) \pi(\theta)}{f_{\underline{X}}(\underline{x})}$$

تصم م ر پا ه تا ز ان فاز حالت دون داده

در ع ی از مسا ل مقدار ز ان ناشی از اتخاذ ک تصم م ه ور دق ق مشخص ن ست در ا ن موارد هتر است از توا ز ان نادق ق استفاده کن م

تعر ف ۱ هر تا ه‌صورت $\widetilde{L} : \Theta \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F}(R^{+})$ را ک تا ز ن ف ز مقدار گو م که در ن $\mathcal{F}(R^{+})$ مجموعه تمام اعداد فازی از R^{+} می اشد

تعر ف ۱ در ک مساله تصم م دون داده ر پا ه تا ز ان فازی گو م $a_* \in \mathcal{A}$ تصم م م ن م کس ف ز است اگر

$$\widetilde{L}(\theta, a_*) = \min_{a \in \mathcal{A}} \max_{\theta \in \Theta} \delta_{\widetilde{L}(\theta,a)}$$

که در ن $\delta_{\widetilde{L}(\theta,a)}$ عدد غ ر فازی شده‌ی $\widetilde{L}(\theta, a)$ ه روش COG است

تعر ف ۱ در ک مساله تصم م دون داده فرض کن د $\pi(\theta)$ توز ع پ ش ن θ و $\widetilde{L}(\theta, a)$ تا ز ان فازی مقدار اشد ام د ر ا ی عدد غ ر فازی شده‌ی تا ز ان مخ ره ز ف ز تصم م a نام ده می‌شود عنی

$$\widetilde{B}(\pi, a) = E^{\theta}(\delta_{\widetilde{L}(\theta,a)}) = \int_{\theta} \delta_{\widetilde{L}(\theta,a)} \pi(\theta) d\theta$$

تعر ف ۱ در ک مساله تصم م دون داده گو م a_B تصم م ز ف ز نسبت ه پ ش ن $\pi(\theta)$ و تا ز ان فازی $\widetilde{L}(\theta, a)$ است اگر

$$\widetilde{r}(\pi, a_B) = \min_{a \in \mathcal{A}} \widetilde{B}(\pi, a)$$

مثال شخصی می‌خواهد در ک واحد تجاری سرما ه‌گذاری کند ا توجه ه او ا اقتصادی نده عنی حالات

θ_1 رکود اقتصادی و تورم الا

θ_2 رکود اقتصادی و تورم پا ن

θ_3 رونق اقتصادی و تورم الا و

θ_4 رونق اقتصادی و تورم پا ن

وی ا سه تصم م a_1 سرما ه‌گذاری کم a_2 سرما ه‌گذاری متوس و a_3 سرما ه‌گذاری ز اد مواجه است فرض کن د ز ان ناشی از تصم م‌های مختلف نادق ق و ه‌صورت اعداد فازی مثلثی در جدول ز ر اشد واحد اعداد م ل ون ر ال

$\widetilde{L}(\theta,a)$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$
a_2	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$
a_2	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$	$(\ , \ , \ )_T$

هم‌چ ن فرض‌کن د که راساس تجر ات تا پ ش ن روی ف ای بعت $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ ه‌صورت ز ر اشد

θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
$\pi(\theta)$	/	/	/	/

می‌خواه م تصم م ز و م ن ماکس را ا م نخست مقاد ر تا ز ان را ه روش COG غ ر فازی می‌کن م

$\delta_{\widetilde{L}(\theta,d)}$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	/	/		/
a_2	/		/	
a_3	/		/	
$\pi(\theta)$	/	/	/	/

دار م

	$\widetilde{B}(\pi,a)$	$\max\limits_{\theta\in\Theta} \delta_{\widetilde{L}(\theta,a)}$
a_1	/	/
a_2	/	/
a_3	/	/

پس تحت تا ز ان فازی فوق و تا چگالی پ ش ن ذکر شده a_3 تصم م ز و a_2 تصم م م ن ماکس می اشد

مساله تصم م ر پا ه تا ز ان فاز ا داده

فرض کن د $f(x;\theta)$ ک تا چگالی احتمال وا سته ه پارامتر مجهول θ اشد هم‌چن ن فرض کن د که $\pi(\theta)$ توز ع پ ش ن θ و $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{x}))$ تا ز ان فازی مقدار تصم م $d(\underline{x})$ اشد مساله تصم م ر پا ه‌ی تا ز ان فازی عبارت است از افتن ک تا تصم م ک روردگر رای پارامتر مجهول θ راساس مشاهدات X و تا پ ش ن $\pi(\theta)$ تحت تا ز ان فازی مقدار $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{x}))$.

تعر ف ۱ فرض کن د $f(x;\theta)$ تا چگالی احتمال متغ ر تصادفی $\underline{X}$ $d(\underline{X})$ روردگر نق ه‌ای θ و $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))$ تا ز ان فازی مقدار اشد تا ر سک روردگر $d(\underline{X})$ را ه‌صورت ز ر تعر ف می‌کن م انتگرال در حالت لب گ استلجس است

$$\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X})) = E^X[\delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))}] = \int_x \delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))} f_\theta(\underline{x})dx$$

تذکر در حالت خاص اگر تا ع وت را تا مشخصه در ن ر گ ر م تعر ف الا همان تعر ف تا مخا ره در حالت کلاس ک است

تعر ف ۲ در ک مساله رورد ا تا ز ان فازی مقدار $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))$ روردگر $d_\circ$ را بروردگر م ن م کس فاز نام م اگر

$$\widetilde{R}(\theta, d_\circ) = \min_{d \in \mathcal{D}} \max_{\theta \in \Theta} \widetilde{R}(\theta, d(\underline{X}))$$

تعر ف ۲۱ اگر $\pi(\theta)$ چگالی پ ش ن θ وده و $\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X}))$ تا مخا ره روردگر $d(\underline{X})$ اشد مخ ره ب ز فاز $d(\underline{X})$ ا توجه ه توز ع پ ش ن $\pi(\theta)$ ه‌صورت ام د ر ا ی $\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X}))$ نسبت ه پ ش ن θ تعر ف می شود

$$\widetilde{B}(\pi, d(\underline{X})) = \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d(\underline{X}))\pi(\theta)d\theta$$

تعر ف ۲۲ فرض کن د $\widetilde{B}(\pi, d(\underline{X}))$ مخا ره ز فازی $d(\underline{X})$ بق تعر ف اشد روردگر $d_B(\underline{X})$ را بروردگر ب ز فاز گو م اگر

$$\widetilde{B}(\pi, d_B(\underline{X})) = \min_{d \in D} \widetilde{B}(\pi, d(\underline{X}))$$

تعر ف ۲۳ فرض کن د $f_\theta(\underline{x})$ تا چگالی احتمال متغ ر تصادفی $\underline{X}$ و $\pi(\theta)$ تا پ ش ن θ و $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))$ تا ز ان فازی روردگر $d(\underline{X})$ اشد مخا ره ز پس ن فازی $d(\underline{X})$ ا مشاهده‌ی $\underline{X} = \underline{x}$ ه صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$\widetilde{r}^{\;\theta|\underline{X}}(\pi, d) = E^{\theta|\underline{X}}[\delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{x}))}] = \int_\Theta \delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{x}))}\pi(\theta|\underline{X})d\theta$$

مث ل   فرض کن د $X_1, X_2, \cdots X_n$ ک نمونه تصادفی n تا ی از توز $Bin(\ ,\theta), \theta \in$ $(\ , \ )$ و توز   پ شن θ ن ز صورت $Beta(\alpha, \beta)$ اشد که در ن پارامترهای α, β معلوم و هم‌چن ن $\ , \ \neq \theta$ فرض شده‌اند   می‌خواه م ر پا ه‌ی تا   ز ان فازی ز ر مخا ره   ز فازی و مخا ره   ز پس ن فازی تصم م $d(\underline{X})$ را   ا م   دار م

$$\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X})) = (L(\theta, d(\underline{X})), t_1, t_2)_T \quad , L(\theta, d(\underline{X})) = (d(\underline{X}) - \theta)^2 \qquad (\ )$$

که در ن

$$t_1 = \alpha_1 L(\theta, d(\underline{X})) \quad , \quad t_2 = \alpha_2 L(\theta, d(\underline{X}))$$

و $\alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ \in R^+, \quad \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$

ا ا ن ا لاعات می‌دان م که

$$\theta | \underline{X} = \underline{x} \sim Beta(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i, n + \beta - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

پس

$$\delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} l(L(\theta, d(\underline{X})))(l) dl}{(\alpha_2 + \alpha_1) L(\theta, d(\underline{X}))} = \frac{\ + \alpha_2 - \alpha_1}{\ } L(\theta, d(\underline{X}))$$

 رای اختصار فرض کن د $k = \frac{\ + \alpha_2 - \alpha_1}{\ }$

و ن ز

$$\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X})) = E^{X|\theta} [\delta_{\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))}] = k E^{X|\theta} (L(\theta, d(\underline{X})))$$

$$= k \{ Var(d(\underline{X})) + [E^{X|\theta} (d(\underline{X}) - \theta)]^2 \}$$

$$\widetilde{B}(\pi, d(\underline{X})) = E^{\theta} \widetilde{R}(\theta, d(\underline{X})) = k E^{X} (d(\underline{X}) - \theta)^2$$

همچن ن

$$\widetilde{r}^{\theta|x}(\pi, d(\underline{X})) = k r^{\theta|x}(\pi, d(\underline{X})) = k E^{\theta|X} (\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X})) = k r^{\theta|x}(\pi, d(\underline{x}))$$

$$= \frac{k(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i)(n - \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)}{(n + \alpha + \beta + \ )(n + \alpha + \beta)^2} + k \left[\frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i}{n + \alpha + \beta} - d(\underline{x}) \right]^2 \quad (\ )$$

نتا ج در اره روردگرها ز ر پا ه تا ز ان نادق ق

ق ه ۱. رورد کننده‌ای که مخا ره پس ن ز فازی را م ن مم کند کمتر ن مخا ره ز فازی را در ن روردکننده‌ها خواهد داشت

بره ن: فرض کن د $d(X)$ مخا ره پس ن ز فازی را نسبت ه تا توز پ ش ن $\pi(\theta)$ م ن مم کند تعر ف می‌کن م $s = \int_l (\widetilde{L}(\theta, d(X))(l)dl$ پس

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}(\pi, d(X)) &= \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d(X))\pi(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{s}\int_\theta\int_x\int_l l(\widetilde{L}(\theta, d(X))(l)f_\theta(X)\pi(\theta)dldxd\theta \\
&= \frac{1}{s}\int_x\int_\theta\int_l l(\widetilde{L}(\theta, d(X))(l)f_\theta(X)\pi(\theta)dld\theta dx \\
&= \frac{1}{s}\int_x\int_\theta\int_l l(\widetilde{L}(\theta, d(X))(l)\pi(\theta|X)f_X(x)dld\theta dx \\
&= \frac{1}{s}\int_x f_X(x)\int_\theta\int_l l(\widetilde{L}(\theta, d(X))(l)\pi(\theta|X)dld\theta dx \\
&= \int_x f_X(x)\widetilde{r}^{\,\theta|X}(\pi, d(X)) \qquad \forall d \in \mathcal{D} \\
&= E^X(\widetilde{r}^{\,\theta|X}(\pi, d(X)))
\end{aligned}
$$

پس اگر $\widetilde{r}(\pi, d(X)$ کوچک شود $\widetilde{B}(\pi, d(X))$ ن ز کوچک می‌شود و dی که $\widetilde{r}(\pi, d(X))$ را م ن مم کند $\widetilde{B}(\pi, d(X))$ را ن ز م ن مم خواهد کرد □

در ادامه ه ذکر دو ق ه می‌پرداز م که را ه‌ی ن رورد گر ز و م ن ماکس را در حالتی که تا ز ان فازی است نشان می‌دهند

ق ه ۲. فرض کن د $d_\circ$ رورد گر ز ر پا ه‌ی تا ز ان فازی $\widetilde{L}(\theta, d)$ و تحت تا توز پ ش ن θ اشد اگر داشته اش م

$$\widetilde{B}(\pi, d_\circ) = \sup_{\theta\in\Theta}\widetilde{R}(\theta, d_\circ(X))$$

نگاه $d_\circ$ م ن ماکس ن ز می اشد

بره ن: ا د ثا ت کن م که

$$\sup_{\theta\in\Theta}\widetilde{R}(\theta, d_\circ) \leq \sup_{\theta\in\Theta}\widetilde{R}(\theta, d) \quad \forall\ d \in \mathcal{D}$$

چون $d_\circ$ ز فازی است ا استفاده از تعر ف مخا ره ز فازی دار م

$$\widetilde{B}(\pi, d_\circ) = \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d_\circ)\pi(\theta)d\theta \leq \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d)\pi(\theta)d\theta \quad \forall\ d \in \mathcal{D}$$

حال اگر عبارت سمت چپ نامساوی الا را ا تساوی موجود در ق ه جای‌گز ن کن م خواه م داشت

$$\sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d^*) \leq \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d)\pi(\theta)d\theta \leq \int_\theta \sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d)\pi(\theta)\theta = \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, d)\ \forall\, d \in \mathcal{D}$$

پس $d_\circ(X)$ م ن ماکس ز ز می اشد □

مثال مثال را در ن ر گر د ا توجه ه ق ه و را ه در مثال خواه م داشت

$$d_B(\underline{X}) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i}{n + \alpha + \beta}$$

مخا ره فازی ا ن رورد‌گر را ر است ا

$$\widetilde{R}(\theta, d(\underline{X})) = k\frac{[(\alpha+\beta)^2 - n]\theta^2 - [n - \ \alpha(\alpha+\beta)]\theta + \alpha^2}{n + \alpha + \beta}$$

تا مخا ره فوق ه θ ستگی نخواهد داشت اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)^2 - n = \\ n - \ \alpha(\alpha+\beta) = \end{cases}$$

و ا $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{n}}{}$ نا را ن $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\sqrt{n}}{2}}{n + \sqrt{n}}$ ک رورد‌گر ز و م ن ماکس فازی رای θ تحت تا ز ان فازی $\widetilde{L}(\theta, d(\underline{X}))$ است

ق ه ۳. فرض کن د d^* رورد ز فازی نسبت ه پ ش ن $\pi(\theta)$ اشد اگر داشته اش م

$$\widetilde{R}(\theta, d^*) \leq \widetilde{r}(\pi, d^*) \quad \forall\ \theta \in \Theta$$

نگاه d^* م ن ماکس است

بره ن: فرض کن م d^* م ن ماکس نباشد پس $d \in D$ وجود دارد که

$$\sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d) < \sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d^*)$$

حال از تعر ف مخا ره ز دار م

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}(\pi, d^*) &= \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d^*)\pi(\theta)d\theta \\
&\leq \int_\theta \widetilde{R}(\theta, d)\pi(\theta)d\theta \qquad \text{چون } d^* \text{ روردگر ز است} \\
&\leq \sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d)
\end{aligned}$$

اما از شرا ق ه دار م

$$\widetilde{R}(\theta, d^*) \leq \widetilde{r}(\pi, d^*) \qquad \forall\theta\in\Theta$$

و لذا

$$\sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d^*) \leq \widetilde{r}(\pi, d^*)$$

و ا توجه ه نامساوی مر و ه $\widetilde{r}(\pi, d^*)$ در الا

$$\sup_{\theta\in\Theta} \widetilde{R}(\theta, d^*) \leq \sup_\theta \widetilde{R}(\theta, d)$$

که ا ن ا فرض م ن ماکس نبودن d^* در تناقض است □

مراج

[1] Berger, J.O. (1985); Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer.

[2] Buckley, J.J., Eslami, E. (2002); An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets, Springer.

[3] Casals, M.R., Gil, M.A., Gil, P. (1986); On the Use of Zadeh's Probabilistic Definition for Testing Statistical Hypothesis from Fuzzy Information, Fuzzy Sets and System, 20: 175-190.

[4] Ferguson, T.S. (1967); Mathimatical Statistics, A Decision Theoretic Approach, Academic Press.

[5] Gil, M.A., Corral, N., Gil, P. (1985); The Fuzzy Decision Problem: An Approach to the Point Estimation Problem with Fuzzy Information, Euro. J. Oper. Res., 22: 26-39.

[6] Okuda, T., Tanaka, H., Asai, K. (1987); A Formulation of Fuzzy Dicision Problem with Fuzzy Information using Probability Measures of Fuzzy Events, Information and Control, 38: 135-147.

[7] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K. (1976); A Formulation of Fuzzy Decision Problems and Its Application to An Investment Problem, Kybernetes, 5: 25-30.

[8] Taheri, S.M. (2003); Trends in Fuzzy Statistics, Austrian J. Statistics, 32: 239-257.

[9] Taheri, S.M., Behboodian, J. (2001); A Baysian Approach to Fuzzy Hypothesis Testing, Fuzzy Sets and Systems, 123: 39-48.

[10] Taheri, S.M., Behboodian, J. (2004); On Bayesian Approach to Fuzzy Hypothesis Testing with Fuzzy Data, Italian J. Pure and Applied Math., 22.

[11] Uemura, Y. (1993); A Simple Decision Rule on Fuzzy Events, Cybernet. Syst. Int. J., 24: 509-521.

[12] Viertl, R., Hule, H. (1991); On Bayes Theorem for Fuzzy Data, Statistical Papers, 32: 115-122.

[13] Viertl, R., Hareter, D. (2002); Bayes Theorem for Non Precise A-Priori Distribution and Non Precise Data, Research Report.