روش درستنما وزن در روردا را ناح ه کوچک

مل حه عباس نژاد مشهد

گروه مار دانشکده علوم ر ا دانشگاه فردوس مشهد

چک ده روردا ی رای ناح ه کوچک[1] در سالهای اخ ر مورد توجه ز ادی قرارگرفته است ه دل ل ا ن که تقا ا رای روردگرهای معتبر نواحی کوچک هم از جا خش‌های دولتی و هم از جا خش‌های خصوصی افزا ش افته است از ررس ها ی نمونه‌ای می‌توان روردهای مستق م معتبری رای پارامترهای کل جامعه ه دست ورد اما روردگرهای مستق م رای هر ناح ه کوچک عنی روردگرها ی که تنها ر مبنای داده‌های موجود در ناح ه ه دست می ند ه دل ل کوچکی حجم نمونه در هر ناح ه ه خ اهای استاندارد زرگی منجر می‌شوند نا را ن روری ه ن ر می‌رسد روشها ی رای ا ن من ور جا گز ن شوند که علاوه ر ا لاعات موجود در خود ناح ه ا لاعات سا ر نواحی ا ا لاعات سرشماری را ن ز مورد استفاده قرار دهند در ا ن مقاله ا تدا ه غ ر مجاز ودن روردگر درستنما ی ماکز مم م انگ ن نرمال در روردا ی همزمان[2] عنی $\bar{X}$ اشاره‌ای کوتاه خواه م داشت روش درستنما ی وزنی[3] را در خانواده نما ی ه ورکلی ان کرده و سپس ن را در مساله روردا ی رای ناح ه کوچک مورد حث قرار می‌ده م

واژه‌ها کل د ناح ه کوچک درستنما ی وزنی روردگر ج مز استا ن[4]

مقدمه

ناح ه کوچک ا ناح ه محلی ه ک ناح ه جغراف ا ی کوچک مانند ک استان شهر ا ک خش سرشماری ا لاق می‌گردد همچن ن می‌توان ک ز رجامعه کوچک همانند ک گروه از مردم درون ک ناح ه جغراف ا ی زرگ را که از سن و جنس و نژاد مع نی هستند ه عنوان ک ناح ه کوچک در ن ر گرفت

مساله روردا ی رای ناح ه کوچک مساله‌ای است که در سالهای اخ ر توجه ز ادی ه ن شده است ا ن امر ه ا ن علت است که تقا ا رای ماره‌های نواحی کوچک چه از جا خشهای دولتی و چه از جا خشهای خصوصی رشد ز ادی داشته است ه عنوان مثال خش دولتی رای رنامه‌ر زی کلان در س ح کشور ن از ه ماره‌ها ی از قب ل نرخ کاری متوس درمد خانوارها و . . . در استانها و شهرهای مختلف دارد ه عنوان مثال فرض کن د که ع ی

1) Small Area 2) Simulataneous Estimation 3) Weighted Likelihood 4) James-stein Estimator

از نواحی جغرافیا ی یا زیرگروهها ی از جامعه از قبیل بع ی استانها و یا قشر خاصی از افراد از ن ر سه ح درمد پا ینتر از یک میانگین قابل قبول و در حد انت ار اشند وا ح است که قبل از انجام هرکاری و هر نو رنامه‌ر زی لازم است که چنین نواحی یا ز رگروهها ی مشخص شوند

داده‌های ه دست مده از ررسیهای نمونه‌ای را می‌توان رای استخراج روردهای مستقیم معتبر رای نواحی زرگ یا قلمروهای زرگ نواحی یا نمونه‌های زرگ استفاده نمود اما روردهای مستقیم یعنی روردها ی که تنها ر مبنای داده‌ها ی که از نمونه اخذ شده از ن ناحیه استخراج می‌شوند قرار دارند دارای خ ای سیار زرگی خواهند ود که ناشی ازکوچک ودن یش از اندازه حجم نمونه در ن نواحی است دلیل این امر این است که در ا تدا دقت مورد ن ر رای رورد پارامترکل جامعه در ن رگرفته شده و حجم نمونه اصلی ر مبنای ن تعیین گردیده است یعنی در هنگام رنامه‌ر زی و تعیین حجم نمونه فق حجم نمونه کل مورد ن از محاسبه شده است و بعا سهم هر ناحیه کوچک ازکل حجم نمونه ناچیز است در نتیجه رای نواحی کوچک این روردها دقت کافی را نخواهند داشت

وا ح است که از هر ناحیه نیز نمی‌توان نمونه‌ای زرگ اختیار کرد لذا ناچار اید ه دنبال راهی ود که دقت روردها را تا نجاکه ممکن است الا رد رای این من ور می‌توان از داده‌های نواحی دیگر و اطلاعاتی که در ن نواحی راساس نمونه ه دست مده است در جهت هبود خشیدن ه روردهای پارامترهای نواحی کوچک استفاده نمود ه این ر ق حجم نمونه موثر افزایش یافته و دقت روردها افزایش می‌یاد در مقاله حا ر روش درستنما ی وزنی را ه این من ور مورد حث قرار می‌دهیم

روش درستنما وزن

روش درستنما ی دون شک یکی از قدرتمندترین ا زارها در مسایل رورد ا ی و زمون فرض می‌اشد اما زمانی که در رورد ا ی همزمان یا مساله ترک ا لاعات رو رو هستیم روش درستنما ی کلاسیک کارمد نخواهد ود اهمیت این مساله در مقاله استاین دیده شد در واق مقاله او نشان داد که در رورد ا ی همزمان میانگین‌های جوام نرمال روردگر درستنما ی ماکزیمم یعنی میانگین نمونه غیر مجاز می‌اشد او نشان داد که رای رورد میانگین‌های جوام نرمالی که از یک جهت شبیه یکدیگرند می‌توان رای ه دست وردن روردگری که دقت یشتری از میانگین‌های نمونه دارد از سایر نمونه‌های مرتب کمک گرفت

مساله ترک ا لاعات از منا گوناگون خارج از روش درستنما ی قرارگرفته ود تا زمانی که تیبشیرانی و هاستی روش درستنما ی محلی[5] را در محدوده رگرسیون ناپارامتری ارا ه نمودند هو روش درستنما ی محلی را خارج از حوزه رگرسیون ناپارامتری مورد ررسی قرار داد که این روش درستنما ی وزنی مرتب [6] REWL نامیده شد علاوه ر این هو و زیدک

5) Local Likelihood 6) Relevance Weighted Likelihood

نشان دادند که چ ور می‌توان رآوردگر معروف ج مز استا ن را ه عنوان رآوردگر REWL استخراج نمود مشرو ر ا ن که وزنها از نمونه رآورد شوند نا را ن می‌توان روش درستنما ی را رای ترک ا لاعات نمونه‌های جوام مختلف توسعه داد

روش درستنما ی وزنی ا روش درستنما ی کلاس ک متفاوت است در روش کلاس ک فرض ر ا ن است که مشاهدات از ک جامعه همسان خارج شده‌اند در عوض درستنما ی وزنی در استنبا پارامتری زمانی پ ش می د که علاوه ر نمونه مورد ن ر از جامعه مورد م العه نمونه‌های مرتب اما مستقل از جوام د گر ن ز در دسترس هستند که ا ن همان مساله م لو در رآوردا ی رای ناح ه کوچک می اشد روش درستنما ی وزنی ا اختصاص وزنها ی ه ا ن نمونه‌ها ر اساس م زان ارتبا شان ا لاعات نها را ترک می‌کند

در ا ن مقاله ه تول د رآوردگرهای همزمان م انگ ن‌های چند ن توز می‌پرداز م که هر ک از ا ن توز عها متعلق ه ک خانواده نما ی بعی ا توا وار انس درجه دوم NEF-QVF [7] هستند

روش درستنما وزن در خانواده نما

فرض کن د m جامعه دار م ردارهای نمونه‌های مستقل ا $(y_{i1}, ..., y_{in_i})'$ $i = 1, ..., m$ نشان داده می‌شوند که $n_i \geq 1$ در عمل هم شه ا ن امکان وجود دارد که از ک ناح ه محلی ه چ مشاهده‌ای گرفته نشود می‌دان م Y دارای توز نما ی ا پارامتر θ است اگر

$$f(y, \theta) = exp[\theta y - \phi(\theta) + h(y)]$$

نا را ن اگر $\theta = (\theta_1, , , \theta_m)'$ و ω^*_{ij} وزن اختصاص افته ه نمونه jام در رآورد پارامتر iام اشد تا درستنما ی ه صورت ز ر تعر ف می‌شود

$$\begin{aligned} WL(\theta) &= WL(\theta_1, ..., \theta_m) \\ &= \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} \prod_{l=1}^{n_j} exp[(\theta_i y_{jl}) - \phi(\theta_i) + h(y_{jl})]^{\omega^*_{ij} n_j^{-1}} \end{aligned}$$

ا فرض

$$\bar{y_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{n_j} y_{jl} \qquad j = 1, ..., m$$

7) Natural Exponential Family with Quadratic Variance Function

دار م

$$WL(\theta) = exp[\sum_{i=1}^{m}[\theta_i \sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}^* \bar{y_j} - \phi(\theta_i) \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* + \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* n_j^{-1} \sum_{l=1}^{n_j} h(y_{jl})]]$$

( )

نا را ن اگر ω_{ij}^* ها معلوم اشند

$$\frac{\partial LnWL(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* \bar{y_j} - \phi'(\theta_i) \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* =$$

$$\frac{\partial^2 LnWL(\theta)}{\partial \theta_i^2} = -\phi''(\theta_i) \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* \leq$$

روردگرهای درستنما ی ماکز مم وزنی MWLE's رای م انگ نهای جامعه عنی $\phi_i = \phi'(\theta_i)$ عبارتند از

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* \bar{y_j}}{\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^*} = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} \bar{y_j} \qquad ( )$$

که

$$\omega_{ij} = \frac{\omega_{ij}^*}{\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^*}$$

اما در عمل چون وزنها معلوم ن ستند ا د از روی داده‌ها رورد شوند

۱ ۳ روش درستنما ی وزنی در مدل تعو ض پذ ر

در ا ن حالت فرض کن د

$$\omega_{ii} = \omega \quad i = \ , ..., m \qquad \omega_{ij} = \omega^* \quad j \neq i = \ , ..., m$$

چن ن فر ی ا ن ا ده را در بردارد که نمونه‌های سا ر جوام نسبت ه ا لاعاتی که در مورد iام ن پارامتر دارند تعو ض پذ ر[8] هستند ا ن فرض صر حا ه روردگر ج مز استا ن در حالت نرمال زمانی که وزنها ا استفاده از داده‌ها رورد می‌شوند منجر می‌شود تحت ا ن فرض

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = \omega \bar{y_i} + \omega^* \sum_{j \neq i} \bar{y_j}$$

8) Exchangable

و چون مجمو وزنها را ر ک می اشد پس

$$\omega + (m - \ )\omega = \qquad \Rightarrow \quad \omega^* = \frac{\ - \omega}{m - \ }$$

و

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = \omega \bar{y}_i + \frac{\ - \omega}{m - \ } \sum_{j \neq i} \bar{y}_j \qquad (\ )$$

رای پ دا کردن ω به نه ا د $g(\omega) = \sum_{i=۱}^{m} E(\hat{\phi}_i - \phi_i)^۲$ نسبت ه ω می نم م شود ا
فرض

$$u_i = V(\bar{y}_i) = \frac{}{n_i} \phi''(\theta_i) \qquad \bar{u} = \frac{}{m} \sum_{i=۱}^{m} u_i$$

$$s_\phi^۲ = \frac{}{m - \ } \sum_{i=۱}^{m} (\phi_i - \bar{\phi})^۲$$

دار م

$$g(\omega) = m[\omega^۲ \bar{u} + (\ - \omega)^۲ (m - \ )^{-۱} \bar{u} + m(\ - \omega)^۲ (m - \ )^{-۱} s_\phi^۲] \qquad (\ )$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega} = m[\ \omega \bar{u} - \ (\ - \omega)(m - \ )^{-۱} \bar{u} - \ m(\ - \omega)(m - \ )^{-۱} s_\phi^۲] = $$

و لذا

$$\omega_{opt} = (\bar{u} + m s_\phi^۲)[m(\bar{u} + s_\phi^۲)]^{-۱} \qquad (\ )$$

ا جا گذاری در را ه دار م

$$\hat{\phi}_{i_{WL}}^{opt} = (\ - \beta_{opt}) \bar{y}_i + \beta_{opt} \bar{y} \qquad (\ )$$

که

$$\bar{y} = \frac{}{m} \sum_{i=۱}^{m} \bar{y}_i \qquad \beta_{opt} = \frac{\bar{u}}{\bar{u} + s_\phi^۲}$$

از هم $\bar{u}$ و $s_\phi^۲$ نامعلومند و ا د رورد شوند
فرض کن د

$$s_y^۲ = \frac{}{m - \ } \sum_{i=۱}^{m} (y_i - \bar{y})^۲$$

نگاه $E(s_y^{۲}) = \bar{u} + s_\phi^{۲}$ اما چون جوام دارای توز نما ی ا توا وار انس درجه دوم هستند لذا

$$V(y_{jl}) = \nu_{۰} + \nu_{۱}\phi_j + \nu_{۲}\phi_j^{۲} = Q(\phi_j) \qquad l = \ ,...,n_j \ \ , \ \ j = \ ,...,m$$

$$E[Q(\bar{y}_j)] = \nu_{۰} + \nu_{۱}\phi_j + \nu_{۲}[V(\bar{y}_j) + \phi_j^{۲}]$$

$$\Rightarrow E[Q(\bar{y}_j)] = Q(\phi_j) + \nu_{۲} n_j^{-۱} Q(\phi_j) = (n_j + \nu_{۲})u_j \qquad (\ )$$

پس

$$E[\frac{}{m}\sum_{j=۱}^{m}(n_j + \nu_{۲})^{-۱}Q(\bar{y}_j)] = u$$

فرض کن د

$$\hat{\bar{u}} = \frac{}{m}\sum_{j=۱}^{m}(n_j + \nu_{۲})^{-۱}Q(\bar{y}_j)$$

نا را ن β_{opt} را ه وس له $\hat{\beta}$ رورد می‌کن م که عبارتست از

$$\hat{\beta} = min\{\frac{\hat{\bar{u}} + \ /m}{s_y^{۲} + \ /m}, \ \} \qquad (\ )$$

اکنون ϕ_i ه صورت ز ر رورد می‌شود

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = (\ - \hat{\beta})\bar{y}_i + \hat{\beta}\bar{y} \qquad i = \ ,...,m \qquad (\ )$$

تذکر حالت خاصی را در ن ر گ ر د که نمونه‌ها ی ا حجم مساوی n ه ور مستقل از توز عهای $N(\theta_i, \sigma^{۲}) \quad i = \ ,...,m$ استخراج شده‌اند و $\sigma^{۲} >$ معلوم است در ا ن صورت $\nu_{۰} = \sigma^{۲}, \nu_{۱} = \nu_{۲} =$ پس $\hat{\bar{u}} = \frac{\sigma^{۲}}{n}$
نا را ن ا جا گذاری در دار م

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = (\ - \frac{\sigma^{۲}/n}{s_y^{۲}})\bar{y}_i + \frac{\sigma^{۲}/n}{s_y^{۲}}\bar{y} \qquad i = \ ,...,m$$

۳ روش درستنما ی وزنی در مدل تعو ض پذ ر محلی

فرض کن د $\omega_{ii} = \omega_i \ \ , \ \ \omega_{ij} = \omega_{i*} \ \ j \neq i = \ ,...,m$ عنی فرض تعو ض پذ ری سراسری ر داشته شده اما فرض تعو ض پذ ری درون هر ناح ه محلی اقی می‌ماند نگاه

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = \omega_i\bar{y}_i + \omega_{i*}\sum_{j\neq i}\bar{y}_j$$

و چون $= \omega_i + (\ - m)\omega_{i*}$ دار م

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = \omega_i \bar{y}_i + (\ - \omega_i)(\ - m)^{-۱} \sum_{j \neq i} \bar{y}_j$$

رای ه دست وردن ω_iهای به نه اکنون $g(\omega_i) = E(\hat{\phi}_{i_{WL}} - \phi_i)^۲$ را نسبت ه ω_i ه ازای هر $i = \ , ..., m$ می‌ن مم می‌کن م

$$g(\omega_i) = \omega_i^۲ u_i + (\ -\omega_i)^۲ (m- \ )^{-۱}(m\bar{u}-u_i) + m^۲ (m- \ )^{-۲}(\ -\omega_i)^۲ (\phi_i - \bar{\phi})^۲$$

$$g'(\omega_i) = \ \omega_i u_i - \ (\ -\omega_i)(m- \ )^{-۱}(m\bar{u}-u_i) - \ m^۲ (m- \ )^{-۲}(\ -\omega_i)(\phi_i - \bar{\phi})^۲$$

$$g''(\omega_i) = \ u_i + \frac{ }{m - \ }(m\bar{u} - u_i) + \frac{ m^۲}{(m - \ )^۲}(\phi_i - \bar{\phi})^۲ > $$

پس

$$\omega_{i_{opt}} = \frac{m\bar{u} - u_i + m^۲(\phi_i - \bar{\phi})^۲}{(m - \ )^۲ u_i + m\bar{u} - u_i + m^۲(\phi_i - \bar{\phi})^۲}$$

نا را ن

$$\hat{\phi}_{i_{WL}}^{opt} = (\ - \beta_{i_{opt}})\bar{y}_i + \beta_{i_{opt}}\bar{y} \qquad (\ )$$

که

$$\beta_{i_{opt}} = \frac{(m - \ )u_i}{(m - \ )u_i + \bar{u} + m(\phi_i - \bar{\phi})^۲}$$

اما در عمل β_iها معلوم نستند و ا د رورد شوند توجه کن د که

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_i - \bar{y})^۲ &= V(\bar{y}_i - \bar{y}) + (\phi_i - \bar{\phi})^۲ \\ &= \frac{ }{m}[(m - \ )u_i + \bar{u} + m(\phi_i - \bar{\phi})^۲] \end{aligned}$$

همچن ن

$$E[Q(\bar{y}_i)] = \nu_۰ + \nu_۱ \phi_i + \nu_۲ (n_i + \nu_۲) = (n_i + \nu_۲) u_i$$

نا را ن $E[Q(\bar{y}_i)]/(n_i + \nu_۲) = u_i$ از ا ن رو $\beta_{i_{opt}}$ ه وس له $\hat{\beta}_i$ رورد می‌شود که

$$\hat{\beta}_i = max[\frac{m - \ }{m} \frac{Q(\bar{y}_i)(n_i + \nu_۲)^{-۱} + m^{-۱}}{(\bar{y}_i - \bar{y})^۲ + m^{-۱}}, \ ]$$

و لذا

$$\hat{\phi}_{i_{WL}} = (\ - \hat{\beta}_i)\bar{y}_i + \hat{\beta}_i \bar{y}$$

۳ ۳ روش درستنما ی وزنی بدون فرض تعو ض پذ ر

حالتی را درن ر گ ر د که ه چگونه فرض تعو ض پذ ری وجود ندارد اگر $\hat{\phi}_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\bar{y}_j$
پس ω_{ij}های ه نه ا می‌ن مم کردن $E(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\bar{y}_j - \phi_i)^2$ نسبت ه ω_{ij} ه دست می ند
ا ا ن شر که $\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} =$ فرض کن د $\Omega_i = (\omega_{i1}, ..., \omega_{im})'$ و فرض کن د

$$g(\Omega_i) = E(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\bar{y}_j - \phi_i)^2 - \quad \lambda_i(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} - \quad)$$

که λ_iها را لاگرانژ می اشند

$$g(\Omega_i) = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^2 u_j + (\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\phi_j - \phi_i)^2 - \quad \lambda_i(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} - \quad)$$

نا را ن

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_{ij}} = \quad \omega_{ij}u_j + \quad (\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\phi_j - \phi_i)\phi_j - \quad \lambda_i$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \omega_{ij}^2} = \quad u_j + \quad \phi_j^2 > \qquad\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial \omega_{ij}\partial \omega_{kl}} = \qquad j \neq l$$

از ا ن رو ماتر س هس ان رای g مع ن مثبت است و ω_{ij}های ه نه ا حل
معادلات $\frac{\partial g}{\partial \omega_{ij}} = \quad i, j = \quad , ..., m$ ه دست می ند ا استفاده از نماد ماتر سی ا ن
معادلات ه صورت ز ر نوشته می‌شوند

$$M\Omega_i = \lambda_i \quad _m + \phi_i\Phi$$

که

$$M = D + \Phi\Phi' \; , \quad D = Diag(u_1, ..., u_m) \quad , \quad \Phi = (\phi_1, ..., \phi_m)'$$

نا را ن Ω_i ه نه ه صورت ز ر ه دست می د

$$\Omega_i^{opt} = M^{-1}(\lambda_i \quad _m + \phi_i\Phi) \qquad\qquad (\quad)$$

چون $\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} =$ نا را ن

$$= \quad '_m\Omega_i^{opt} = \lambda_i \quad '_m M^{-1} \quad _m + \phi_i \quad '_m M^{-1}\Phi$$

$$\lambda_i = \frac{-\phi_i \ {}'_m M^{-۱}\Phi}{{}'_m M^{-۱} \ {}_m} \qquad (\quad)$$

اکنون ا استفاده از و دار م

$$\Omega_i^{opt} = \frac{-\phi_i \ {}'_m M^{-۱}\Phi}{{}'_m M^{-۱} \ {}_m}(M^{-۱} \ {}_m) + \phi_i M^{-۱}\Phi$$

و

$$M^{-۱} = D^{-۱} - \frac{D^{-۱}\Phi\Phi' D^{-۱}}{+\Phi' D^{-۱}\Phi}$$

حال چون $E[(n_j+\nu_۲)^{-۱}Q(\bar{y}_j)] = u_j \ , \ E \quad (\bar{y}_i) = \phi_j$ که

$$Q(\bar{y}_j) = \nu_۰ + \nu_۱\bar{y}_j + \nu_۲\bar{y}_j^۲$$

دار م

$$\hat{u}_j = (n_j+\nu_۲)^{-۱}Q(\bar{y}_j)$$

$$\hat{\Omega}_i^{opt} = \frac{-\bar{y}_i \ {}'_m \hat{M}^{-۱}Z}{{}'_m \hat{M}^{-۱} \ {}_m}(\hat{M}^{-۱} \ {}_m) + \bar{y}_i\hat{M}^{-۱}Z$$

که

$$Z = (\bar{y}_۱, ..., \bar{y}_m)' \ , \ \hat{M} = (\hat{D} + ZZ')^{-۱} \ , \ \hat{D} = Diag(\hat{u}_۱, ..., \hat{u}_m)$$

مراج

[1] Ghosh, M., and Rao, J.N.K. (1994), Small area estimation: an appraisal (with discussion), Statistical Science, 9, 65-93.

[2] Hu, F. and Zidek, J.V. (2000), The relevance weighted likelihood with applications.In Empirical Bayes and Likelihood Inference. Lecture Notes in Statistics. Eds. S.E. Ahmed and N. Reid. Springer-Verlag, New York, pp 211-235.

[3] Stein, C. (1956). Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. In proceedings of the Third Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, V1. University of California Press, pp 197-206.

[4] Tibshirani. R. and Hastie, T. (1987). Local likelihood estimation. J. Amer. Statist. Assoc., 82, 559-567.