تع ن تعداد خوشه‌ها در تحل ل‌ها م خته ا استفاده از نتروپ نرمال شده

محمد قربانی[1] محسن محمدزاده[2]

[1] گروه مار دانشگاه ت ر ز
[2] گروه مار دانشگاه تر ت مدرس

چک ده کی از مسا ل مهم در تحل ل خوشه‌ای تع ن تعداد خوشه‌هاست علی‌رغم ا نکه ا ن مو و توس محققان ز ادی مورد حث واق شده ولی همچنان ه عنوان ک مشکل خوشه ندی م رح است در ا ن مقاله هدف تع ن تعداد خوشه‌ها ا استفاده از نتروپی نرمال‌شده در تحل ل م خته است که ا ن مع ار از ارت ا ن درستنما ی کلی و درستنما ی رده ندی ه دست می د همچن ن ا استفاده از ش ه‌سازی مونت کارلو نشان داده خواهد شد که ا ن مع ار هتر از مع ارها ی مانند BIC و AIC عمل می‌کند

واژه‌ها کل د تحل ل م خته تعداد خوشه‌ها نتروپی نرمال‌شده درستنما ی رده ندی

مقدمه

 کی از مسا ل مهم در س اری از م العات ژنت کی و پزشکی خوشه ندی داده‌ها است که در ن N مشاهده ا M و ژگی ه g گروه همگن افراز می‌شوند ه وری که تشا هات درون گروهها ماکس مم گردند روشهای مختلفی از جمله روشهای سلسله مراتبی رای خوشه ندی کردن داده‌ها ه کار می‌روند که در تعر ف فاصله ن دو خوشه ا هم تفاوت دارند هار گان همچن ن ه دل ل ا نکه ا ن روشها راساس مدل خاصی نا نشده‌اند استن ا ماری ر اساس نها امکان‌پذ ر ن ست و تعداد خوشه‌ها ن ز ه صورت ا تکاری ا تعر ف ستانه‌ای دلخواه تع ن می‌شود رای رف ا ن مشکلات لازم است روش خوشه ندی حتی الامکان مبتنی ر سا قه محقق نبوده و ر اساس ک مدل ا توز احتمالی اشد تا توان در مورد ن استن ا   ماری انجام داد معمولا مجموعه مشاهدات تحت ررسی همگی از ک جامعه خاص ن ستند و رای تشخ ص ا ن که هر مشاهده از کدام جامعه مده است من قی است فرض شود که هر مشاهده ر اساس و ژگی‌ها و خصوص اتش دارای توز احتمال خاصی است نا را ن جامعه‌ای مرک از چند ز رجامعه دارای توز احتمالی م خته صورت

$$f(x|\psi) = \lambda_1 f_1(x|\theta_1) + \ldots + \lambda_g f(x|\theta_g)$$

است که در ن رای $g, \ldots, \; = j$ $f_j(.)$ تا چگالی مولفه‌ها $\leq \lambda_j <$ و $= \sum_{j=۱}^{g} \lambda_j$ $\lambda = (\lambda_۱, \ldots, \lambda_g)$ $\theta = (\theta_۱, \ldots, \theta_g)$ و $\psi = (\lambda, \theta)$ است معمولا فرض می‌شود مولفه‌ها دارای توز تک مدی $n(\mu_j, \sigma_j^۲)$ است و هدف از خوشه‌ ندی تجز ه مولفه‌های چند عدی مبهم و م خته ه مولفه‌های ساده تک مدی است کی از مسا ل مهم خوشه‌ ندی تع ن تعداد خوشه‌ها مولفه‌ها است علی‌رغم ا نکه ا ن مو و توس محققان ز ادی مورد حث واق شده ولی همچنان ه عنوان ک مشکل خوشه‌ ندی م رح است در ا ن مقاله از مع اری نام مع ار نتروپی نرمال شده رای تع ن تعداد خوشه‌ها استفاده می‌شود و کمک تکن ک شب ه‌سازی مونت کارلو نشان داده خواهد شد ا ن مع ار هتر از مع ارها ی مانند BIC و AIC عمل می‌کند

تع ن مع ارها خوشه‌ ند ر اساس مدل

فرض کن د $X_۱ \ldots X_n$ ک نمونه تصادفی از جامعه ا ز ر جامعه‌های ۱ . . . g اشند و $\phi(x|\mu_j, \Sigma_j)$ تا چگالی متغ ر تصادفی X_i در ز ر جامعه jام اشد در ا ن صورت اگر λ_j احتمال تعلق X_i ه جامعه j اشد توز X_i عبارت است از

$$f(x; \psi) = \sum_{j=۱}^{g} \lambda_j \phi(x|\mu_j, \Sigma_j) \qquad (\;)$$

که در ن $\theta_j = (\mu_j, \Sigma_j)$ $\psi = (\lambda_۱, \ldots, \lambda_g, \theta_۱, \ldots, \theta_g)$ $= \sum_{j=۱}^{g} \lambda_j$ و $< \lambda_j >$ و تا درستنما ی نمونه تصادفی ه صورت

$$L(\psi|x) = \prod_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{g} \lambda_j f_j(x|\theta_j) \qquad (\;)$$

خواهد ود رای $C_j = \{i, X_i \in \;\; j\}$ مع ار خوشه‌ ندی حاصل از ماکس مم کردن تا درستنما ی

$$L(x|C) = \prod_{j=۱}^{g} \lambda_j^{n_j} \prod_{X_i \in C_j} f(x_i|\theta_j) \qquad (\;)$$

معادل مع ار حاصل از ماکس مم کردن خواهد ود مک‌لن و فرالی و رافتری و وح دی و همکاران معمولا مولفه اصلی X_iها معلوم ن ستند و رای مشخص کردن مولفه اصلی X_i متغ رهای گروه ندی Z_{ij} ه صورت

$$Z_{ij} = \begin{cases} & X_i \in \;\; j \\ & X_i \notin \;\; j \end{cases}$$

تعریف می‌شوند. بر اساس مشخصه‌های گروه‌بندی لگاریتم تابع درستنمایی را می‌توان به صورت

$$\log L(\psi|x,Z) = \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}\log\{\lambda_j f(x_i/\theta_j)\} \qquad ( )$$

نوشت. اگر z_{ij}ها مشخص باشند عناصر خوشه jام به صورت
$C_j = \{j; \quad z_{ij} > z_{ij'} \quad j \neq j'\}$ خواهد بود.

ولی اگر z_{ij}ها معلوم نباشند برای انجام تحلیل خوشه‌ای از برورد مقدار مورد انتظار آنها استفاده می‌شود. پس تحلیل خوشه‌ای را می‌توان به عنوان برورد مقدار مورد انتظار z_{ij} یعنی

$$E(Z_{ij}) = P(X_i \in \quad _j) = \frac{\lambda_j f(x_i|\theta_j)}{\sum_{j=1}^{g}\lambda_j f(x_i|\theta_j)}$$

تلقی نمود که لازم است برای هر j پارامترهای نامعلوم λ_j و θ_j برورد شوند.

الگوریتم امید ریاضی و ماکسیمم‌سازی[1] (EM) روشی کاربردی در محاسبات تکراری برای به دست آوردن برورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها در توزیع‌های آمیخته است. فرض کنید $\psi^{(\circ)}$ مقدار اولیه ψ باشد. در این صورت مراحل الگوریتم EM به صورت زیر خواهد بود (مک‌لین و کریشنان):

مرحله E: محاسبه امید ریاضی لگاریتم تابع درستنمایی در نقطه $\psi^{(\circ)}$ به شرط مشاهده داده‌های کامل

$$Q(\psi,\psi^{(\circ)}) = E_{\psi^{(\circ)}}\{\log L_c(\psi|x)\}$$

مرحله M: بدست آوردن مقداری مانند ψ^* برای ψ به طوری که

$$Q(\psi^*,\psi^{(\circ)}) = \max_{\psi\in\Omega}(Q(\psi,\psi^{(\circ)}))$$

مراحل E و M تا زمانی تکرار می‌شوند که شرط همگرایی $\forall\epsilon > : |L(\psi^{(k+1)}) - L(\psi^{(k)})| < \epsilon$ برقرار شود (جی اف وو).

فرض کنید $X_1 \dots X_n$ داده‌های ناکامل و $Y_i = (X_i, Z_i)$ داده‌های کامل در الگوریتم EM باشند. در این صورت برورد پارامترهای با استفاده از این الگوریتم به صورت زیر خواهند بود

$$\lambda_j^{(k+1)} = \frac{}{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ji}^{(k)}$$

1) Expectation-Maximization Algorithm

$$\mu_i^{(k+١)} = \sum_{j=١}^{n} \frac{z_{ji}^{(k)} X_j}{\sum_{j=١}^{n} z_{ij}^{(k)}}$$

$$(\Sigma)^{(k+١)} = \frac{}{n} \sum_{i=١}^{k} \sum_{j=١}^{n} z_{ij}^{(k)} (X_j - \mu_i^{(k+١)})(X_j - \mu_i^{(k+١)})'$$

$$z_{ij}^{(k)} = \frac{\pi_i^{(k)} f(x_j|\theta_i^{(k)})}{\sum_{i=١}^{k} \pi_f^{(k)}(x_j|\theta_i^{(k)})}$$

ا رورد z_{ij} ه وس له الگور تم EM می توان تحا ل خوشه‌ای را متناسـ ا شتر ن مقدار $z_{ij}^{(k)}$ انجام داد وح دی اصل محمدزاده و قر انی و مک‌لن و کر شنان ولی کی از مسا ل اساسی خوشه ندی تع ن تعداد خوشه‌هاست ا ن مو و ا استفاده از مع ارهای مختلف توسـ اغلـ محققان وح دی و محمدزاده و قر انی فرالی و رافتری ررسی شده ولی همچنان ه عنوان ک مشکل خوشه ندی م رح است

تع ن تعداد خوشه‌ها

رای ان مع ار نتروپی نرمال شده در تع ن تعداد خوشه‌ها نخست ه تعر ف نتروپی می‌پرداز م متغ ر تصادفی X ا تا جرم احتمالی $P(x) = P(X = x)$ و مقاد ر $\{x_i,\ \ i = \ \ ,\dots,n\}$ در ن ر گ ر د عدم ق ع ت مرتب ا رمد ک مشاهده از متغ ر X را نتروپی متغ ر تصادفی X نام ده و ا نماد $H(X)$ نشان می‌دهند که عبارت است از

$$H(X) = -\sum P(x) \log P(x)$$

حال لگار تم تا درستنما ی را در ن ر گ ر د

$$L(g) = \sum_{i=١}^{n} \ln \sum_{j=١}^{g} \hat{\lambda}_j f_j(x|\hat{\theta}_j)$$

که در ن $\hat{\lambda}_j$ و $\hat{\theta}_j$ روردهای ماکز مم درستنما ی λ_j و θ_j می اشند ا استفاده از محاسبات مستق م می‌توان نشان داد

$$L(g) = C(g) + E(g)$$

که در ن

$$C(g) = \sum_{j=١}^{g} \sum_{i=١}^{n} \hat{z}_{ij} \log \left\{ \hat{\lambda}_j f(x_i|\hat{\theta}_j) \right\}$$

و

$$E(g) = -\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ij} \ln \hat{z}_{ij} \geq$$

ر اساس روا   فوق لگار تم تا درستنما ی $L(g)$ ه لگار تم تا درستنما ی رده ندی $C(g)$ و مع ار نتروپی $E(g)$ تفک ک شده است   اگر چه نتروپی $E(g)$ ک مع ار ا لا است ولی نمی‌توان مستق ما از ن رای تع ن تعداد خوشه‌ها استفاده کرد ز را $L(g)$ ک تا   افزا شی از g است و ا د نرمال زه شود   دار م

$$= \frac{C(g) - C(\ )}{L(g) - L(\ )} + \frac{E(g) - E(\ )}{L(g) - L(\ )} \qquad g > \qquad (\ )$$

و مع ار نتروپی نرمال شده که ا د رای تع ن تعداد خوشه‌ها می‌ ‌مم شود عبارت است از

$$NEC(g) = \frac{E(g)}{L(g) - L(\ )}, \qquad E(\ ) =$$

اما $NEC(\ )$ خوش تعر ف ست ز را $NEC(\ ) = \infty$ ارناکی س لوکس و گوورت   لذا ه   ور مستق م قادر ه مقا سه حالت $g =$ در را ر $g >$ در استفاده از $NEC(g)$ نخواه م ود   لذا می ا ست $NEC(g)$ را رای رف ا ن مشکل خاص س   ده م رای تصم م‌گ ری ن $g =$ و $g >$ می‌توان از ا ن نق ه   رکه $C(g)$ مع اری رای اندازه‌گ ری دقت افراز داده‌ها در g خوشه و $C(\ ) = L(\ )$ مع اری رای اندازه‌گ ری دقت رازش تک خوشه ه داده‌هاست استفاده کرد   هنگام مقا سه دو تعداد از خوشه‌ها g و g' ممکن است ک مدل م خته ا تعداد پارامترهای ز اد مناس   ه   ر رسد ولی از د دگاه ساده من قی است اگر رای $g > g'$ $C(g) < C(g')$ اشد g' ر g ترج ح داده شود   نا را ن رای انتخا $g >$ در را ر $g =$ لازم است $C(g) > C(\ ) = L(\ )$ در صورتی که $C(g) > L(\ )$ تمام جزهای معادله   نامنفی خواهند ود که در ا ن صورت $\leq NEC(g) \leq$ که تنها حالت $g >$ ا ن شر   را فراهم می‌کند پس اگر $NEC(g) \leq$ نباشد دل لی ر انتخا   ش از ک خوشه وجود ندارد

مقا سه مع ارها

در ا ن خش مع ارهای NEC BIC و AIC ر اساس تکن ک شب ه‌سازی مونت کارلو مورد مقا سه قرار می‌گ رند   رای ا ن من ور نمونه‌ها ی ه حجم n از توز   نرمال تک متغ ره ا وار انس‌های را ر ک و همچن ن نرمال م خته دو متغ ره ا ماتر س‌های وار انس را ر I تول د

می‌شود

رای توز نرمال تک متغ ره چهار نو توز   ا پارامترهای مختلف ز ر در ن رگرفته شده است

الف توز نرمال استاندارد

توز نرمال م خته دو مولفه‌ای ام انگ ن‌های $\mu_1 =$ و $\mu_2 =$ و نسبت‌های م ختگی را ر

ج توز م خته نرمال دو مولفه‌ای ا م انگ ن‌های $\mu_1 =$ و $\mu_2 =$ و نسبت‌های م ختگی $\lambda_1 =$ و $\lambda_2 =$

د توز م خته نرمال سه مولفه‌ای ا م انگ ن‌های $\mu_1 =$ $\mu_2 =$ و $\mu_3 =$ و نسبت‌های م ختگی مساوی

رای حالت دو متغ ره سه نو توز ز ر در ن رگرفته شده است

الف توز نرمال دو متغ ره استاندارد

توز م خته نرمال دو مولفه‌ای ا ردار م انگ ن $\mu'_1 = (\ , \ )$ و $\mu'_2 = (\ , \ )$ و نسبت‌های مساوی

ج توز م خته نرمال سه مولفه‌ای ا ردار م انگ ن $\mu'_1 = (\ , \ )$ $\mu'_2 = (\ , \ )$ و $\mu'_3 = (\ , - \ )$ و نسبت‌های مساوی

از هر ک از توز ها دو نمونه ا حجم‌های $n =$ و $n =$ هر کدام ه تعداد   ار شب ه‌سازی شده است   ر اساس نمونه‌های تول د شده پارامترهای مدلهای م خته ر اساس الگور تم EM رورد شده‌اند در جدول نتا ج مر و   ه م انگ ن و انحراف مع ار نتروپی NEC ان شده است که در ن d نشان دهنده عد ف ای نمونه‌ای و g نشان دهنده تعداد خوشه‌هاست   ر اساس نتا ج ه دست مده NEC رای $n =$ هتر از $n =$ عمل می‌کند   ه عنوان مثال در جدول   رای حالت الف توز م خته نرمال تک متغ ره م انگ ن نتروپی رای $g =$ کمتر از ق ه حالت‌هاست لذا فرض تک خوشه ودن پذ رفته می‌شود همچن ن رای حالت   توز دو متغ ره وقتی که $n =$ است م انگ ن مع ار نتروپی رای $g =$ را ر   است که کمتر از مقدار ن رای تعداد خوشه‌های $g =$ $g =$ و $g =$ است و فرض دو مولفه‌ای ودن را تا د می‌کند جدول درصد فراوانی انتخا   توز م خته g مولفه‌ای ر اساس استفاده از مع ارهای AIC BIC و NEC رای حالتهای مختلف مذکور و رای تعداد خوشه‌های مختلف ان می‌کند

ه عنوان مثال رای حالت اول توز نرمال تک متغ ره در درصد اوقات NEC جوا صح ح داده است در حال که در درصد اوقات AIC پاسخ صح ح می‌دهد در حالت کلی ر اساس جدول نت جه می‌شود که ک ف ت تصم م‌گ ری NEC ن AIC و BIC قرار دارد مع ار AIC تعداد مولفه‌های توز م خته را اندکی   ش تخم ن می‌کند و ر عکس BIC تعداد مولفه‌ها را اندکی کمتر تخم ن می‌زند

جدول   م انگ ن و انحراف مع ار رای مع ار NEC ر اساس توز   های م خته نرمال تک متغ ره و دو متغ ره

			تعداد خوشه‌ها			
d	n	پارامترهای توز	$g = ۱$	$g = ۲$	$g = ۳$	$g = ۴$
		$p_۱ = ۱$ $\mu_۱ = ۰$	۱۶٫۴۱ (۶٫۱۵)	۱۷٫۹۳ (۷٫۹۷)	۲۲٫۸۳ (۸٫۶۱)	۲۹٫۳۲ (۱۰٫۳۵)
۱	۲۰۰	$p_۱ = ۰٫۵$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲$	۱۳٫۸۳ (۵٫۸۴)	۱۰٫۹۸ (۴٫۳۶)	۱۵٫۷۲۵ (۵٫۴۹)	۲۲٫۱۰ (۶٫۸۱)
		$p_۱ = ۰٫۷$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲$	۱۵٫۹۸ (۶٫۱۲)	۱۵٫۲۸ (۵٫۹۵)	۲۲٫۶۷ (۷٫۳۱)	۳۰٫۵۲ (۱۰٫۱۱)
		$p_۱ = p_۲ = p_۳ = \frac{۱}{۳}$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲, \mu_۳ = ۴$	۲۰٫۴۵ (۱۲٫۸۸)	۷٫۴۲ (۲٫۳۵)	۵٫۸۹ (۰٫۹۷)	۹٫۱۶ (۳٫۴۱)
		$p_۱ = ۱$ $\mu_۱ = ۰$	۱۷٫۹۲ (۷٫۲۱)	۱۸٫۴۳ (۸٫۹۱)	۲۳٫۳۵ (۱۰٫۷۲)	۳۰٫۴۹ (۱۲٫۷۴)
۱	۵۰	$p_۱ = ۰٫۵$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲$	۱۴٫۲۷ (۷٫۴۲)	۱۲٫۲۳ (۵٫۸۲)	۱۷٫۱۸ (۷٫۷۹)	۲۳٫۹۴ (۶٫۹۱)
		$p_۱ = ۰٫۷$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲$	۱۸٫۵۴ (۱۰٫۱۷)	۱۶٫۷۶ (۷٫۶۴)	۲۴٫۵۳ (۹٫۸۶)	۳۲٫۸۶ (۱۳٫۲۲)
		$p_۱ = p_۲ = p_۳ = \frac{۱}{۳}$ $\mu_۱ = ۰, \mu_۲ = ۲, \mu_۳ = ۴$	۲۸٫۳۸ (۱۱٫۸۲)	۵٫۸۲ (۲٫۱۰)	۵٫۱۵ (۰٫۶۲)	۷٫۵۵ (۲٫۸۴)
		$p_۱ = ۱$ $\mu_۱ = [۰, ۰]$	۳٫۴۱ (۳٫۰۲)	۱۶٫۸۴ (۶٫۱۲)	۱۸٫۶۹ (۶٫۶۴)	۲۴٫۴۷ (۷٫۷۶)
۲	۲۰۰	$p_۱ = ۰٫۵$ $\mu_۱ = [۰, ۰], \mu_۲ = [۲, ۲]$	۸٫۸۶ (۷٫۴۲)	۶٫۲۴ (۵٫۸۲)	۸٫۱۲ (۷٫۷۹)	۱۰٫۴۴ (۶٫۹۱)
		$p_۱ = p_۲ = p_۳ = \frac{۱}{۳}$ $\mu_۱ = [۰, ۰], \mu_۲ = [۲, ۲], \mu_۳ = [۲, -۲]$	۱۱٫۱۹ (۱۱٫۸۲)	۳٫۵۹ (۲٫۱۰)	۲٫۰۲ (۰٫۶۲)	۲٫۹۰ (۲٫۸۴)
		$p_۱ = ۱$ $\mu_۱ = [۰, ۰]$	۹٫۶۷ (۴٫۱۵)	۱۱٫۵۸ (۶٫۹۹)	۲۳٫۹۶ (۷٫۴۴)	۳۰٫۹۵ (۸٫۹۴)
۲	۵۰	$p_۱ = ۰٫۵$ $\mu_۱ = [۰, ۰], \mu_۲ = [۲, ۲]$	۱۰٫۸۱ (۶٫۶۸)	۸٫۹۷ (۴٫۱۲)	۱۰٫۴۴ (۵٫۸۳)	۱۲٫۷۰ (۷٫۵۶)
		$p_۱ = p_۲ = p_۳ = \frac{۱}{۳}$ $\mu_۱ = [۰, ۰], \mu_۲ = [۲, ۲], \mu_۳ = [۲, -۲]$	۲٫۹۲ (۰٫۸۸)	۲٫۳۵ (۲٫۱۰)	۴٫۴۳ (۰٫۶۲)	۱۱٫۹۷ (۲٫۸۴)

جدول   درصد فراوانی انتخا g خوشه ر اساس توز های م مخته نرمال تک متغ ره و دو متغ ره

				معیارها		
d	n	پارامترها توز	تعداد خوشه‌ها	AIC	BIC	NEC
		$p_1 =$ $\mu_1 =$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = \ , \mu_2 =$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = \ , \mu_2 =$				
		$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ $\mu_1 = \ , \mu_2 = \ , \mu_3 =$	2			
		$p_1 =$ $\mu_1 =$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = \ , \mu_2 =$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = \ , \mu_2 =$				
		$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ $\mu_1 = \ , \mu_2 = \ , \mu_3 =$				
		$p_1 =$ $\mu_1 = [\ ,\ ]$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = [\ ,\ ], \mu_2 = [\ ,\ ]$				
		$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ $\mu_1 = [\ ,\ ], \mu_2 = [\ ,\ ], \mu_3 = [\ , -\ ]$				
		$p_1 =$ $\mu_1 = [\ ,\ ]$				
		$p_1 = \ /$ $\mu_1 = [\ ,\ ], \mu_2 = [\ ,\ ]$				
		$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ $\mu_1 = [\ ,\ ], \mu_2 = [\ ,\ ], \mu_3 = [\ , -\ ]$				

مراج

[1] Biernacki, C., Celeux, G. and Govert, G. (1999), An Improvement of the NEC Criterion for Assessing the Number of Clusters in a Mixture model, Pattern Recognition Letters, 20, 267-272.

[2] Celeux, G. and Soromenho, G. (1996), An Entropy Criterion for Assessing the Number of Clusters in a Mixture Model. Journal of Classification , 13, 195-212.

[3] Fraly, C. and Raftery, A. E. (1998), How Many Clusters? Which Clustering Method? Answer via Model-Based Cluster Analysis. Techincal Report, No, 329. Seattle: Department of Statistics, University of Washington.

[4] Fraley, C. and Raftery, A. E. (1999), MCLUST: Software for Model-Based Cluster Analysis, J. Classification, 16, 297-306.

[5] Hartigan, J. A. (1975), Clustering Algorithms. Wiley, New York.

[6] Jeff C. F., (1983), On the Convergence of the EM Algorithm, Annals of Statistcs, 11, 95-103.

[7] McLachlan, G. J. (1982), The Classification and Mixture Maximum Likelihood Approaches to Cluster Analysis. In Krishnan, P. R. and Kanal, L. N. (eds), Handbook of Statistics, 2, 199-208. North-Holland, Amesterdam.

[8] McLachlan, G. J. and Krishnan, T. (1997), The EM Algorithm and Extensions. Wiley, New York.

محمدقاسم وحدی اصل محسن محمدزاده و محمد قرانی   تع ن مدل خوشه ندی احتمالاتی ر اساس مع ار ا لا   زی مجموعه مقالات ششم ن کنفرانس ن‌المللی مار ا ران ص