استفاده از روش تبدیل دیفرانس در حل معادلات شیبدار سری های زمانی

محیا همتی
دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیرکبیر
M_hemmati@aut.ac.ir

سید محمد تقی فاطمی قمی*
استاد دانشگاه صنعتی امیرکبیر
fatemi@aut.ac.ir

چکیده

امروزه تجزیه تحلیل سری زمانی به طور وسیعی در بسیاری از شاخه‌های مهندسی، علوم فیزیک و اقتصاد مورد استفاده واقع می‌شود. تغییرات نسبت به زمان در بسیاری از پدیده ها امری طبیعی است. پیش بینی این تغییرات مخصوصا در امور اقتصادی و تولیدی امری ضروری است. تجزیه تحلیل سری‌های زمانی موجب پیش‌بینی مقادیر آینده سری که بر مبنای گذشته آن است می شود. اغلب معادلاتی که در پیش بینی‌ها با آن‌ها روبه رو می‌شویم معادلات غیر خطی هستند و محاسبه مقدار دقیق آن‌ها امکان پذیر نیست. برای حل این گونه معادلات می توان از روش‌های تبدیل دیفرانسیل (DTM) استفاده کرد. در این مقاله معادلات شیبدار اجباری و غیر اجباری از طریق روش تبدیل دیفرانسیل برای محاسبه پیش بینی ها در بازه زمانی مورد نظر حل شده اند. نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از تکنیک کلاسیک رانگ کوتا مقایسه شده و در نهایت سهولت و قابل اعتماد بودن این روش مشخص شده است.

واژگان کلیدی: معادلات شیب دار، روش تبدیل دیفرانسیل، سری زمانی ،شبیه سازی ریاضی

۱. مقدمه

تنوع گسترده ای از رفتارهای سیستم های غیر خطی نوسانی در علوم و مهندسی وجو دارد که در طول زمان توسط معادلات شیبدار بررسی می‌شوند. بررسی این معادلات باعث یک مسئله مرکزی شده است و تلاش های مستمری برای حل آنها در سال های متمادی انجام شده است. (Nayfeh, 1985) حل معادلات شیب دار را با استفاده از روش اختلال بدست آوردند. در مرور ادبیات روش های دیگری مانند روش لیندست-پوانکاره اصلاح شده (Cheung et al,1991) و (Ramos, 2007) ، روش تکرار متغیر (He, 2007) و برخی روش های دیگر نیز برای حل این معادلات استفاده شده‌اند. (Donoso, 2012) اخیرا (Turkyilmazoglu, 2012) از روش آنالیز هموپاتی برای حل همان معادلات استفاده کرده است.

در این مقاله ما روش تبدیل دیفرانسیل را برای یافتن حل معادله بررسی کردیم. این روش برای اولین بار توسط (Zhou, 1986) برای حل برخی از مسائل ابتدایی غیر خطی در جریان الکتریکی استفاده شد. بعدا در ادامه‌ی کار (Zhou, 1986) تعداد زیادی از پژوهشگران این روش را در حل جزیی و معمول معادلات خطی و غیر خطی به کار گرفتند.. Mukherjee et), al, 2011) (Jang and chen, 2001), (Yusufoğlu, 2006). همچنین (Nourazar and Mirzabeigy, 2013) روش تبدیل دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس اصلاح کردند و نتایج به دست آمده را با روش رانگ کوتا مقایسه کردند. امروزه این روش بدلیل اینکه شامل خطی سازی نیست به عنوان یک روش مناسب تلقی می‌شود. همچنین با استفاده از این روش از محاسبه مشتقات بزرگ اجتناب می شود و باعث صرفه جویی در زمان حل می شود.

معادله شیب دار غیر اجباری :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\beta x+\varepsilon x^3=0, \qquad (1)$$

معادله شیب دار اجباری :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\beta x+\varepsilon x^3=F\sin\omega t \qquad (2)$$

مقادیری برای وضعیت ابتدایی:

$$x(0)=a, x'(0)=0 \qquad (3)$$

که در آن δ ضریب سیستم است و همیشه مثبت است. F نشان دهنده بزرگی نیروی دوره ای و ω فرکانس نیرو است. احیای نیرو برای سیستم توسط $\beta x+\varepsilon x^3$ نشان داده می شود. این نیرو بر خلاف نیروی دوره ای برای حفظ تعادل سیستم عمل می کند.

به جز استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات شیبدار ما همچنین حل همان معادلات را به طور عددی از طریق روش رانگ کوتا درجه ۴ (RK4) بدست آوردیم و نتایج را به صورت گرافیکی نشان داده‌ایم. مقایسه جواب های بدست آمده از

این دو روش توافق خوبی را نشان می دهد که نشان دهنده کفایت و تاثیر روش پیشنهادی است. با این وجود در مقایسه با حل بدست آمده از روش (Turkyilmazoglu, 2012) راه حل ارایه شده در این مقاله بیشتر برای دوره های زمانی طولانی تر موثر است و خطای کمتری دارد ضمن آن که هیچگونه وابستگی به پارامتر ε ندارد.

۲. مروری بر روش تبدیل دیفرانسیل

روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) یک روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی است. با این روش معادله دیفرانس داده شده و وضعیت های ابتدایی مربوط به آن به یک معادله بازگشتی تغییر شکل می دهند که نهایتا منجر به حل یک سیتم معادلات جبری به عنوان ضریب حل مجموعه ها می شود. مطالعات قبلی نشان داده اند که این روش توانایی ذاتی برای انجام مسائل غیر خطی یا سیستم های وابسته به پارامترهای متغیر را دارد. این روش برای بدست آوردن راه حل های تقریبی و دقیق معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی مفید است. برای اثبات اینکه این روش به ما اجازه بررسی عملکرد $x(t)$ را می دهد، تبدیل دیفرانس همانطور که در زیر نشان داده شده است تعریف می شود:

$$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0},\ k=0,1,2,\cdots,\infty. \tag{4}$$

در معادله ۴، $x(t)$ تابع اصلی است و $X(k)$ تابع تغییر شکل داده شده است و دامنه دیفرانس $X(k)$ به صورت $0\le t\le H$، که در آن H ثابت است. گستردگی مجموعه Taylor از عملکرد $x(t)$ در یک نقطه t=0 به عنوان این فرمول می آید .

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

که با جایگزینی $\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$ با $X(k)$ معادله 5 به دست می آید:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \tag{5}$$

که تبدیل معکوس دیفرانسیل $X(k)$ است. بنابراین برای سادگی از عملیات ریاضی زیر استفاده می‌کنیم.

If $f(x)=g(x)\pm h(x)$, then $F(k)=G(k)\pm H(k)$

اگر $f(x)=cg(x),$ آنگاه $F(k)=cG(k)\,,$

اگر $f(x)=\dfrac{d^n g(x)}{dx^n},$ آنگاه $F(k)=\dfrac{(k+n)!}{k!}G(k+n).$

اگر $f(x)=g(x)h(x),$ آنگاه $F(k)=\sum_{l=0}^{k}G(l)H(k-l)\,.$

اگر $f(x)=x^n,$ آنگاه $F(k)=\delta(k-n),$

اگر $f(x)=\int_0^x g(t)dt,$ آنگاه $F(k)=\dfrac{G(k-1)}{k},\ \ k\geq 1\,.$

اگر $f(x)=u(x)v(x)w(x),$ آنگاه $F(k)=\sum_{s=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-s}U(s)V(m)W(k-s-m)$

جاییکه $F(k),\ G(k)\ H(k)$ به ترتیب تبدیل دیفرانسیل توابع $f(x),\ g(x),\ h(x),\ u(x),\ v(x),\ w(x)$ هستند و C مقداری ثابت است.

۳. کاربرد و اجرای معادله

در این بخش ما میخواهیم استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل را بیان کنیم تا معادلات اجباری و غیر اجباری شیب دار را مطالعه کنیم.

۳. ۱. فرمول معادلات شیب دارغیر اجباری

معادله شیب دار از طریق (۱) همراه با وضعیت های ابتدایی (۳) بدست می آید. با به کار گیری تبدیل دیفرانسیل (DT) به معادله (۱) و وضعیت های ابتدایی (۳)، در این صورت ما داریم:

$$X(k+2)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\begin{bmatrix}-\delta(k+1)X(k+1)-\beta X(k)\\ -\varepsilon\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}X(m)X(n)X(k-m-n)\end{bmatrix}=0 \tag{6}$$

And $X(0)=a$ and $X(1)=0$.

از تبدیل دیفرانسیل معکوس با استفاده از معادله (۵) داریم:

$$x(t)=a-\frac{a}{2}(\varepsilon a^2+\beta)t^2+\frac{a\delta}{6}(\varepsilon a^2+\beta)t^3-\frac{a}{24}(\varepsilon a^2+\beta)(3\varepsilon a^2+\beta-\delta^{2)}t^4+\cdots \tag{7}$$

۳. ۲ .فرمول معادله شیب دار اجباری:

تجزیه تحلیل معادلات شیب دار اجباری یعنی $F \neq 0$ سخت تر هست، بدلیل اینکه نیروی دوره ای درگیر است. بهتر است تا از DTM برای آنالیز رفتار این معادلات تحت موقعیت های ابتدایی خاص استفاده کنیم. معادله غیر خطی شیبدار اجباری در معادله (۲) همراه با شرایط اولیه در (۳) ارائه شد. با بکارگیری DTM در معادله (۲) داریم:

$$X(k+2)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\begin{bmatrix} F\frac{\omega^k}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)-\delta(k+1)X(k+1)-\beta X(k)- \\ \varepsilon\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}X(m)X(n)X(k-m-n)\end{bmatrix}=0 \tag{8}$$

و موقعیت های اولیه به این صورت جایگزین می شوند. $X(0)=a$. $X(1)=0$

باید توجه شود که اگر F=0 است یعنی مورد غیر اجباری به ازای جایگذاری $X(k+2)$ در معادله (۸) در تطابق با معادله (۶) قرار می‌گیرد. با این وجود مشاهده شده است که برای حتی ارزش های متغیر تبدیل K، معادله (۸) به معادله (۶) کاهش می یابد. از تبدیل دیفرانسیل معکوس که در معادله (۵) اعمال می شود نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} x(t)=a-\frac{a}{2}(\varepsilon a^2+\beta)t^2+\left[\frac{a\delta}{6}(\varepsilon a^2+\beta)+\frac{F\omega}{6}\right]t^3- \\ \left[\frac{a}{24}(\varepsilon a^2+\beta)(3\varepsilon a^2+\beta-\delta^2)-\frac{F\omega\delta}{24}\right]t^4+\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

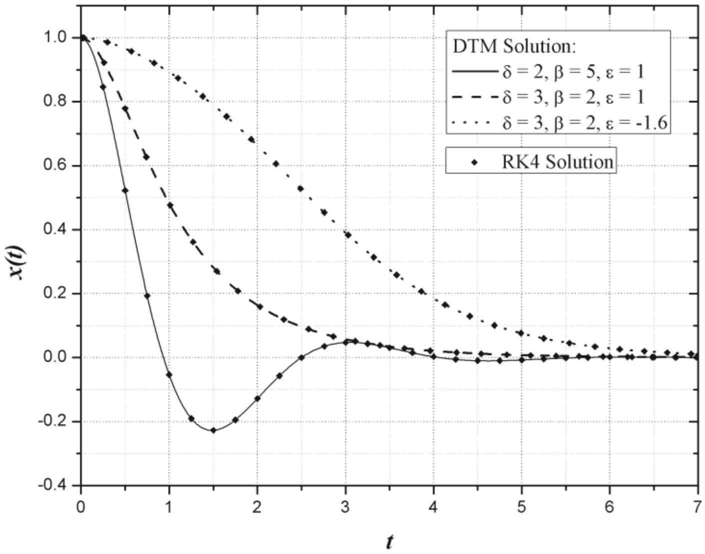
۴. بحث و بررسی

ما راه حل های نیمه تحلیلی معادله ۱ و ۲ را نه فقط برای یک انتخاب پارامترهای خاص δ,β,ε، بلکه همچنین در حوزه پارامترهای فیزیکی نیز بدست آوردیم. الگوریتم DTM در MATLAB کدگذاری شده است وراه حل های معادلات شیبدار اجباری و غیر اجباری را به صورت گرافیکی در شکل ۱ و ۲ به ترتیب ارائه دادیم. برای سه مجموعه های δ,β,ε در سه مورد متفاوت داریم:

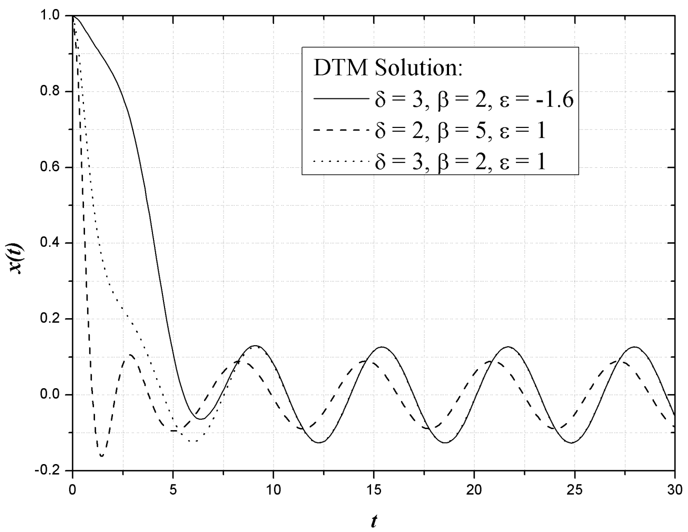
۱. مورد میرای سریع $\delta=3,\beta=2,\varepsilon=1$

۲. مورد میرای نوسانی $\delta = 2, \beta = 5, \varepsilon = 1$

۳. میرای بحرانی $\delta = 3, \beta = 2, \varepsilon = -1.6$ همراه با F=4 و $\omega = 1$ در معادله شیبدار اجباری . باید توجه کرد که برای مورد میرای نوسانی یا سریع، سطح فروپاشی سریع تر از مورد بحرانی است.

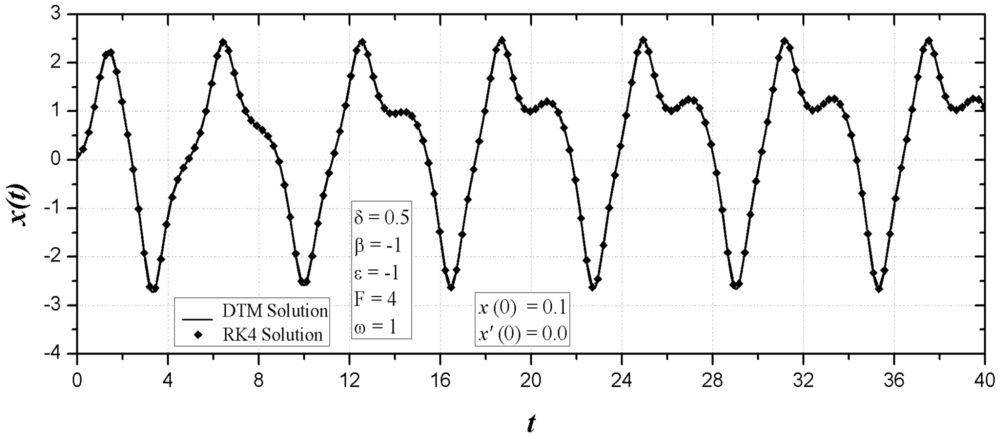


شکل ۱: طرح مقایسه بین پاسخ های بدست آمده از طریق DTM و RK4 معادله شیب دار غیر اجباری برای اندازه های متفاوت پارامترهایی با وضعیت اولیه *x(0)=1, x(0)=0.*

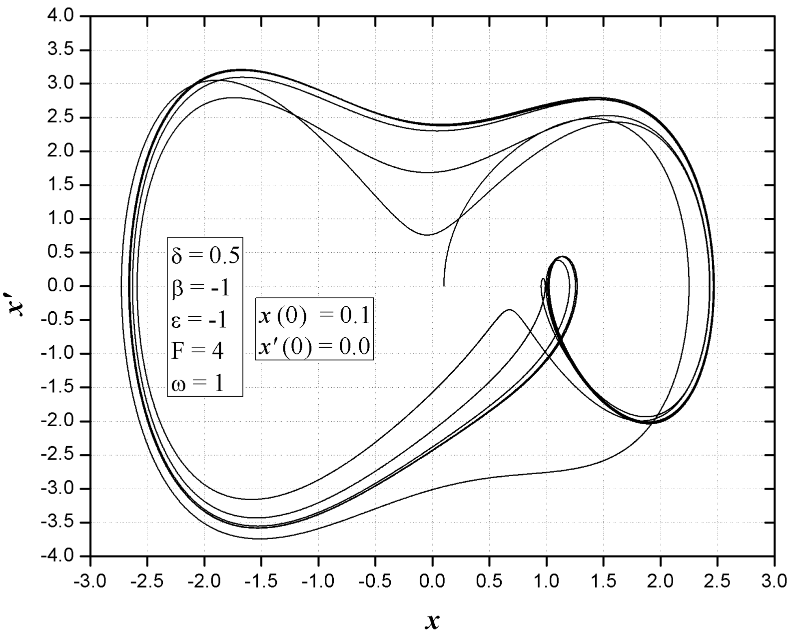


شکل ۲: طرح جواب معادله شیب دار اجباری بدست آمده از طریق DTM برای مقدار فاکتورهایی با وضعیت اولیه *x(0)=1, x(0)=0*

با یک تغییر در پارامتر ها $\delta = 0.5, \beta = -1, \varepsilon = -1$، و برای وضعیت های اولیه متفاوت $x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0$ نمودار سری زمانی در شکل ۳ نشان داده شده است. و امکان رفتار معادله ۲ را نشان می دهدو شکل ۴ رفتار آشفته معادله شیب دار اجباری را زمانیکه نقطه در یک فاز است نشان می دهد.



شکل۳: طرح مقایسه بین پاسخ های بدست آمده از طریق DTM وRK4 معادله شیب دار اجباری برای مقدار های مختلف پارامترهایی با وضعیت اولیه.*x(0)=1, x(0)=0*



شکل ۴: طرح فاز فرمول معادله شیب دار اجباری

۵. نتیجه گیری

فرمول شیب دار برای مرور برخی از پدیده های کاربردی مانند سری های زمانی مفید است، از این روش می‌توان برای نوسانگر مکانیکی غیر خطی، پیش بینی بیماریها و ...استفاده کرد. سال های اخیر تمرکز زیادی بر روی این معادلات بوده است. چندین روش برای حل این معادلات استفاده شده اند. در این مقاله ما حل معادله شیب دار را در مورد حالات سریع، نوسانی و بحرانی توسط روش تبدیل دیفرانسیل در رده های $\delta, \beta, \varepsilon$ را بدست آوردیم و همچنین توسط روش رانگ کوتای درجه ۴ نشان دادیم که روش DTM در توافق کامل با راه حل عددی است. راه حل های DTM همچنین در توافق کامل با نتایج Turkyilmazoglu هستند. (۱۰)

علاوه بر این دیده شده است که نوسانگر شیبدار زمانیکه تحت یک نیروی دوره ای قرار می گیرد نشان دهنده مرجع آشفته برای $\delta = 0.5, \beta = -1, \varepsilon = -1, F = 4, \omega = 1$ با شرایط اولیه $x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0$ است.

این روش به اندازه کافی دقیق است و می تواند برای تامین راه حل های تحلیلی برای سیستم های غیر خطی تبدیل دیفرانسیل استفاده شود، همچنین نیازمند حداقل محاسبات است. این موضوع این حقیقت را روشن می سازد که این روش برای تعداد زیادی از دیگر فرمول های غیر خطی قابل اجرا است.

منابع:

Nayfeh, A.H., 1985,Problems in Perturbations(New York: Wiley-Interscience)

Cheung, Y. K., Chen, S. H., & Lau, S. L. (1991). A modified Lindstedt-Poincaré method for certain strongly non-linear oscillators. International Journal of Non-Linear Mechanics, 26(3-4), 367-378.

Ramos, J. I. (2007). On Linstedt–Poincaré techniques for the quintic Duffing equation. Applied Mathematics and Computation, 193(2), 303-310.

He, J. H. (2007). Variational iteration method—some recent results and new interpretations. Journal of computational and applied mathematics, 207(1), 3-17.

Donoso, G., & Ladera, C. L. (2012). Nonlinear dynamics of a magnetically driven Duffing-type spring–magnet oscillator in the static magnetic field of a coil. European Journal of Physics, 33(6), 1473.

Turkyilmazoglu, M. (2012). An effective approach for approximate analytical solutions of the damped Duffing equation. Physica Scripta, 86(1), 015301.

Zhou, J. K. (1986). Differential transformation and its applications for electrical circuits.

Mukherjee, S., Roy, B., & Chaterjee, P. K. (2011). Solution of Lane-Emden equation by differential transform method. International Journal of Nonlinear Science, 12(4), 478-484.

Jang, M. J., Chen, C. L., & Liu, Y. C. (2001). Two-dimensional differential transform for partial differential equations. Applied Mathematics and Computation, 121(2), 261-270.

Yusufoğlu, E., 2006. Numerical solution of Duffing equation by the Laplace decomposition algorithm. Applied Mathematics and Computation, 177(2), pp.572-580.

Nourazar, S., & Mirzabeigy, A. (2013). Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method. Scientia Iranica, 20(2), 364-368.