



روش گالرکین ناپیوسته‌ی رانگه-کوتا برای مدل جریان ترافیک روی شبکه‌ها

کبری نوره

دانشگاه پیام نور مرکز ایلام
sari.salar@gmail.com

مرتضی چاجی

اداره آموزش و پرورش خراسان جنوبی (مدیریت آموزش و پرورش شهرستان سربیشه)
chaji64@yahoo.com

چکیده

روش گالرکین ناپیوسته‌ی (DG) رانگه-کوتای کران دار (RK) را برای شبیه‌سازی عددی مسائل روند ترافیک در شبکه‌ها پیشنهاد می‌کنیم.

مسیر شبکه‌ها با گراف‌ها مدل‌بندی می‌شوند که متشکل از تعدادی متناهی از مسیرهاست که تقاطع آن‌ها در اتصالات است. در هر مسیر، قانون حفاظت عددی پویایی است که شرایط اتصال در اتصالات برای تعریف جدایی جریان و یا همگرایی در نقاطی که مسیرها همدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌کند. این شرایط اتصالی را در چارچوب $RKDG$ می‌گنجانیم. این روش به مشکلات مدل‌سازی مسائل کوشی برای جریان ترافیک در شبکه‌ها برای عدم یکتایی می‌پردازد و روشی کارآمد برای مسائل شبکه‌ای می‌باشد.

واژگان کلیدی: قوانین حفاظت عددی، جریان ترافیک، شبکه هذلولوی، گالرکین ناپیوسته، حفظ کران

۱. مقدمه

در این مقاله، مدل‌های ترافیک مکانی بر روی شبکه‌ها را بررسی می‌کنیم و روی مدل Richards-Whitham-Lighthill تمرکز می‌کنیم [۱،۲] که فقط متشکل از قوانین حفاظت برای تراکم ماشین است. این مقاله، اولین گام در استفاده از روش DG برای مسائل شبکه‌ای است. ساختار مقاله به شرح زیر است:

بخش ۲، پیش‌زمینه‌ای از مدل جریان ترافیک در شبکه‌ها، با یک توصیف کلی از شرایط اتصال در اتصالات است. بخش ۳، روش گالکین ناپیوسته‌ی رانگه-کوتای مرتبه بالای پیشنهادی برای مسائل شبکه‌ای با ویژگی‌های حفظ کران را ارائه می‌دهد. بخش ۴، عملکرد روش‌های ارائه شده بر مسائل آزمون محک در این مقاله و در به چالش کشیدن موارد تحت آزمون با ساختارهای جواب غنی را بیان می‌کند. در نهایت، یک نتیجه‌گیری کلی در بخش ۵ آمده است.

۲. پیش‌زمینه‌ای در مدل‌های جریان ترافیک روی شبکه‌ها

مدل ترافیک غیرخطی براساس حفاظت از ماشین‌ها یک قانون حفاظتی هذلولوی اسکالر به فرم زیر است:

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0 \quad (1)$$

که $\rho = \rho(t, x) \in [0, \rho_{max}]$ تراکم (چگالی) ماشین است، با ρ_{max} بودن حداکثر تراکم اتومبیل‌ها در جاده‌ها، $f(\rho) = \rho$ شار (گذرنده) است. فرض اصلی این مدل این است که بطور متوسط سرعت v یک تابع وابسته فقط به چگالی ρ است، در نتیجه به (۱) افزایش می‌یابد. مفروضات معمول $f(0) = f(\rho_{max}) = 0$ است و اینکه f اکیداً مقعر است، پس یک نقطه ماکسیمم یکتا به نام چگالی بحران σ وجود دارد. در واقع، زیر σ ، ترافیکی است که جریان آزاد گفته می‌شود و شار (جریان) f تابع افزایش تراکم است. از سوی دیگر، بالای σ ، شاری است که یک تابع نزولی از تراکم است، که نشان‌دهنده‌ی سنگینی ترافیک می‌باشد.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $\tau : [0, \rho_{max}] \rightarrow [0, \rho_{max}]$ نگاشتی باشد بطوری که $f(\tau(\rho)) = f(\rho)$ برای هر $\rho \in [0, \rho_{max}]$ و برای هر $\rho \in [0, \rho_{max}] / \sigma$ داریم $\tau(\rho) \neq \rho$.

یک شبکه با یک گراف توپولوژیکی توصیف می‌شود، یعنی، یک زوج (J, J) ، که $J = \{I_i; i = 1, \dots, N\}$ مجموعه‌ی فواصل زمانی؛ نشان‌دهنده‌ی مسیرها هستند، و J مجموعه رؤس نشان‌دهنده اتصالات هستند. برای یک اتصال ثابت J ، یک مسئله ریمان (RP) یک مسئله کوشی با داده‌های اولیه است که روی هر تلاقی مسیر در محل اتصال، ثابت است. سیر تکاملی در کل شبکه از حل (۱)، زمانی که یک حل کننده ریمان به هر اتصال اختصاص می‌یابد، تعیین می‌شوند.

حل‌کننده‌های ریمان را براساس قواعد زیر در نظر می‌گیریم:

آ. ضرایب توزیع ترافیک $\alpha_{ji} \in [0, 1]$ وجود دارند، که نشان‌دهنده‌ی بخشی از ترافیک مسیرهای ورودی I_i به مسیر خروجی

J هستند. در نتیجه ماتریس توزیع ترافیک

$$A = \{\alpha_{ji}\}_{j=n+1, \dots, n+m, i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ماتریس تصادفی سطری است، برای هر i ، داریم:

$$\sum_j \alpha_{ji} = 1.$$

ب. با توجه به (آ)، رفتار رانندگان طوری است که شار (گذرنده) را از طریق اتصال، به حداکثر می‌رسانند. اگر $n \geq m$ ، قاعده (ج) نتیجه می‌شود.

ج. به‌عنوان مثال، حالتی از دو مسیر ورودی a و b و یک مسیر خروجی c را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم یک تعداد ماشین نمی‌توانند وارد مسیر c شوند، و فرض کنیم Q مقداری ماشین‌هایی باشند که می‌توانند این کار را انجام دهند. پس qQ ماشین از مسیر a می‌آیند و $(1-q)Q$ ماشین از مسیر b می‌آیند. جوابهای تولید شده در اتصالات را با استفاده از قوانین (آ)، (ب) و (ج) توصیف می‌کنیم. گزاره ۲.۲. فرض کنیم که $(\rho_{1,0}, \rho_{2,0}, \dots, \rho_{n+m,0})$ چگالی‌های اولیه از یک RP در J و $i = 1, \dots, n$ ، γ_i^{\max} و $j = n+1, \dots, n+m$ ، γ_j^{\max} ماکسیمم جریان‌هایی باشد که می‌تواند به‌ترتیب روی مسیرهای ورودی و خروجی به‌دست آید. آن‌گاه

$$\gamma_i^{\max} = \begin{cases} f(\rho_{i,0}), & \text{if } \rho_{i,0} \in [0, \sigma], \\ f(\sigma), & \text{if } \rho_{i,0} \in]\sigma, \rho_{\max}], \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

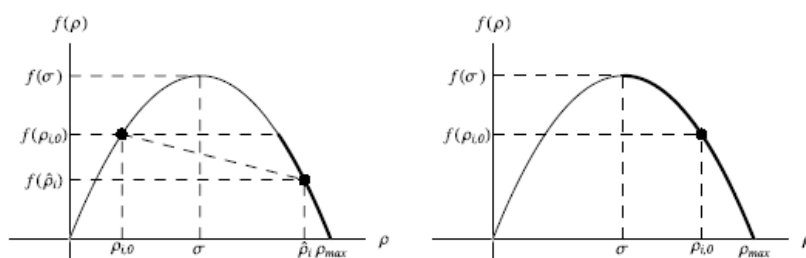
$$\gamma_j^{\max} = \begin{cases} f(\sigma), & \text{if } \rho_{j,0} \in [0, \sigma], \\ f(\rho_{j,0}), & \text{if } \rho_{j,0} \in]\sigma, \rho_{\max}], \end{cases} \quad j = n+1, \dots, n+m. \quad (3)$$

به‌ویژه، چگالی را می‌توان با جریانات در محل اتصال بازسازی کرد.

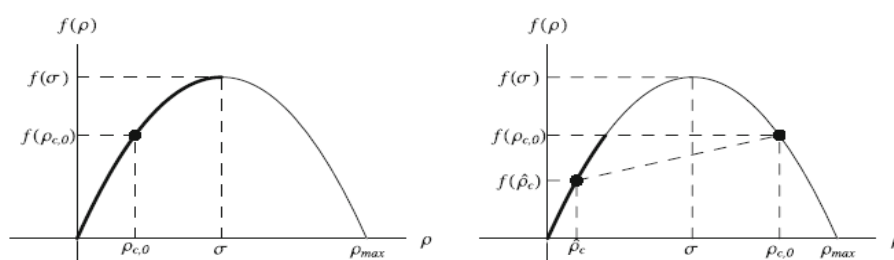
ابتدا یک مسیر ورودی i را در نظر می‌گیریم و آن‌را با $\hat{\rho}_i$ نشان می‌دهیم که اثری در محل اتصال برای بار مثبت است. سپس $IBVP$ روی مسیر i با جریان منفرد $(\rho_i, 0, \hat{\rho}_i)$ حل می‌شود که می‌بایست سرعت منفی باشد. اگر $\rho_{i,0} \in [0, \sigma]$ آنگاه $\hat{\rho}_i$ یا اگر $\rho_{i,0}$ است یا به $[\tau(\rho_{i,0}), 1]$ متعلق است. در حالت اول، هیچ جریانی وجود ندارد، در حالیکه در حالت دوم جریان (موج) $(\rho_i, 0, \hat{\rho}_i)$ یک موج شدید با سرعت منفی است، شکل ۱ (سمت چپ) را ببینید. بنابراین شار ماکسیمم استفاده از $f(\rho_{i,0})$ به‌دست می‌آید. علاوه بر این، یک مقدار منحصر بفرد از ρ_i وجود دارد که با مقدار داده شده‌ی جریان در بازه $[0, f(\rho_{i,0})]$ سازگار است. اگر، به‌جای آن، $\rho_{i,0} \in [\sigma, 1]$ آنگاه $\rho_i \in [\sigma, 1]$ و جریان $(\rho_i, 0, \rho_i)$ یک حجم یا یک جریان شدید با سرعت منفی است، شکل ۱ (سمت راست) را ببینید.

در این حالت شار ماکسیمم با $f(\sigma)$ داده می‌شود و دوباره، یک مقدار منحصر بفرد برای ρ_i وجود دارد، که با مقدار داده شده‌ی جریان در بازه $[0, f(\sigma)]$ سازگار است. برای مسیرهای خروجی، تجزیه و تحلیل‌ها مشابه می‌باشد. شکل ۲ را ببینید.

□



شکل ۱. تصاویری از حل کننده‌ی ریمان برای مسیرهای دریافتی



شکل ۲. تصاویری از حل کننده‌ی ریمان برای مسیرهای خروجی

گزاره ۲.۲ اجازه می‌دهد تا دوباره قوانین (آ)، (ب) و (ج) را به‌عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی از نظر جریانهای ورودی و ورودی‌اش، تعیین کنیم. سپس، قاعده (ب) یک عملکرد خطی از جریانهای γ_i را برای ماکسیمم‌سازی، فراهم می‌کند. قاعده (ج) اجازه می‌دهد یک جواب منحصر بفرد برای مسئله برنامه‌ریزی خطی، در حالتی که مسیرهای ورودی بیشتر از مسیرهای خروجی است، را انتخاب کنیم. در قسمت‌های بعدی، به‌صراحت مسائل ریمان را در حالت‌های زیر حل خواهیم کرد:

اتصالات از نوع 2×1 (دو مسیر دریافتی و یک مسیر خروجی)، اتصالات از نوع 1×2 (یک مسیر دریافتی و دو مسیر خروجی)، و اتصالات از نوع 2×2 (دو مسیر دریافتی و دو مسیر خروجی). خواننده را به مرجع [3] برای شرح کاملی از حالات کلی، ارجاع می‌دهیم.

۱.۲ حالت $n = 2$ مسیرهای دریافتی و $m = 1$ مسیر خروجی

فرض کنیم که اتصال با دو مسیر ورودی a و b و یک مسیر خروجی c را در نظر گرفته‌ایم. با اطلاعات اولیه‌ی داده شده‌ی $(p_{a,0}, p_{b,0}, p_{c,0})$ ، یک جواب به روش زیر می‌سازیم. برای به حداکثر رساندن حرکت در ترافیک (قاعده (ب))، قرار می‌دهیم:

$$\hat{\gamma}_c = \min\{\gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} + \gamma_c^{\max}\},$$

که $\hat{\gamma}_c = a, b, \gamma_i^{\max}$ در (۲) و γ_c^{\max} در (۳) تعریف شده‌اند. توجه داریم که در این حالت، ماتریس A یا (قاعده A) به‌سادگی توسط بردار ستونی $(1,1)$ داده شده، بنابراین هیچ شرط اضافی ندارد.

اکنون فضای (γ_a, γ_b) و خط

$$\gamma_b = \frac{1-q}{q} \gamma_a \quad (4)$$

را که براساس قاعده (ج) تعریف شده، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم P نقطه‌ی تقاطع خط (۴) با خط $\gamma_c =$ باشد. جریان‌های

نهایی باید به ناحیه زیر متعلق باشند $\gamma_a + \gamma_b$

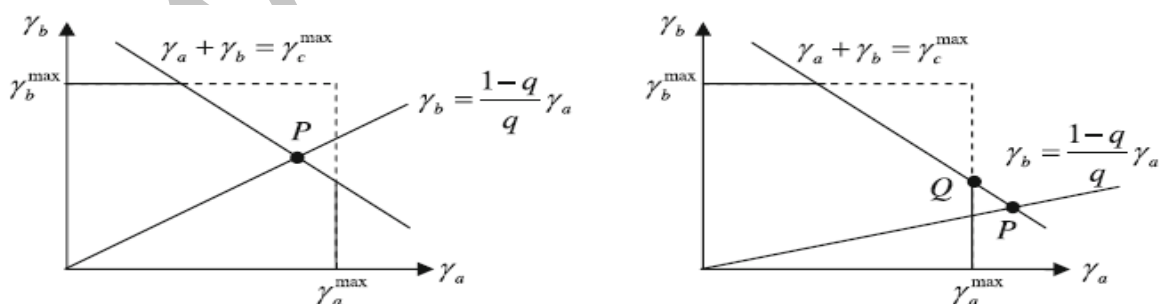
$$\Omega = \{(\gamma_a, \gamma_b) : 0 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^{\max}, 0 \leq \gamma_a + \gamma_b \leq \hat{\gamma}_c, i = a, b\}.$$

دو حالت مختلف وجود دارد:

۱. P به Ω متعلق است.

۲. P به Ω متعلق است.

دو حالت در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. در اولین حالت، قرار می‌دهیم $(\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b) = P$ ، در حالیکه در حالت دوم قرار می‌دهیم $(\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b) = Q$ که نقطه‌ای از $\Omega \cap \{(\gamma_a, \gamma_b) : \gamma_a + \gamma_b = \hat{\gamma}_c\}$ نزدیک به خط (۴) است.



شکل ۳: حالات مختلف

یکبار دیگر $\hat{\gamma}_a$ و $\hat{\gamma}_b$ (و $\hat{\gamma}_c$) را مشخص می‌کنیم، می‌توانیم یک روش منحصر بفرده \hat{p}_i ، $i \in \{a, b, c\}$ را پیدا کنیم:



قضیه ۲.۳. اتصال J با $n = 2$ مسیر دریافتی و $m = 1$ مسیر خروجی را در نظر می‌گیریم. برای هر $\rho = (\rho_a, \rho_b, \rho_c) \in [0, \rho_{max}]$ یک جواب ضعیف قابل قبول منحصر بفرد $\rho = (\rho_a, \rho_b, \rho_c)$ در محل اتصال J وجود دارد، قواعد (أ)، (ب) و (ج) صدق می‌کنند، بطوریکه $\rho_a(0, \cdot) \equiv \rho_{a,0}, \rho_b(0, \cdot) \equiv \rho_{b,0}, \rho_c(0, \cdot) \equiv \rho_{c,0}$.

علاوه بر این، یک سه‌تایی منحصر بفرد $(\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b, \hat{\rho}_c) \in [0, \rho_{max}]^3$ وجود دارد بطوری‌که

$$\hat{\rho}_i \in \begin{cases} \{\rho_{i,0}\} \cup [\tau(\rho_{i,0}), \rho_{max}], & \text{if } 0 \leq \rho_{i,0} \leq \sigma \\ [\sigma, \rho_{max}], & \text{if } \sigma \leq \rho_{i,0} \leq \rho_{max} \end{cases} \quad i = a, b,$$

و

$$\hat{\rho}_i \in \begin{cases} [0, \sigma], & \text{if } 0 \leq \rho_{c,0} \leq \sigma, \\ \{\rho_{c,0}\} \cup [0, \tau(\rho_{c,0})], & \text{if } \sigma \leq \rho_{c,0} \leq \rho_{max}, \end{cases}$$

و برای $i \in \{a, b\}$ ، جواب با جریان $(\hat{\rho}_i, 0, \hat{\rho}_i)$ داده می‌شود، برای مسیر خروجی جواب با جریان $(\hat{\rho}_c, \rho_c, 0)$ داده می‌شود.

۲.۲ حالت $n = 1$ مسیر ورودی و $m = 2$ مسیر خروجی

حال اتصال با مسیر دریافتی a و دو مسیر خروجی b, c را در نظر می‌گیریم. ماتریس توزیع A ، از قاعده‌ی (أ) به شکل زیر است

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix},$$

که $\alpha \in]0, 1[$ و $1 - \alpha$ نشان‌دهنده درصد ماشین‌هایی است که از مسیر a به ترتیب به مسیرهای b و c می‌روند. با توجه به قاعده (ب)، جواب برای یک RP به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b, \hat{\gamma}_c) = (\hat{\gamma}_a, \alpha \hat{\gamma}_a, (1 - \alpha) \hat{\gamma}_a),$$

که

$$\hat{\gamma}_a = \min \left\{ \gamma_a^{max}, \frac{\gamma_b^{max}}{\alpha}, \frac{\gamma_c^{max}}{1 - \alpha} \right\}.$$

یکبار دیگر $\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b$ و $\hat{\gamma}_c$ را به دست می‌آوریم، این کار پیدا کردن یک شیوه‌ی منحصر بفرد $\hat{\rho}_i$ ، $i \in \{a, b, c\}$ ، را با استدلال موجود در اثبات قضیه ۲.۳ ممکن می‌سازد. پس قضیه زیر را به دست می‌آوریم:

قضیه ۲.۴. اتصال J با $n = 1$ مسیر دریافتی و $m = 2$ مسیر خروجی را در نظر می‌گیریم. برای هر $\rho = (\rho_a, \rho_b, \rho_c) \in [0, \rho_{max}]$ یک جواب ضعیف قابل قبول منحصر بفرد $\rho = (\rho_a, \rho_b, \rho_c)$ در محل اتصال J وجود دارد، قواعد (أ) و (ب) صدق می‌کنند، بطوریکه



$$\rho_a(0, \dots) \equiv \rho_{a,0}, \quad \rho_b(0, \dots) \equiv \rho_{b,0}, \quad \rho_c(0, \dots) \equiv \rho_{c,0}.$$

علاوه بر این، یک سه‌تایی منحصر بفرد $(\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b, \hat{\rho}_c) \in [0, \rho_{max}]^3$ وجود دارد بطوری‌که

$$\hat{\rho}_a \in \begin{cases} \{\rho_{a,0}\} \cup [\tau(\rho_{a,0}), \rho_{max}], & \text{if } 0 \leq \rho_{a,0} \leq \sigma \\ [\sigma, \rho_{max}], & \text{if } \sigma \leq \rho_{a,0} \leq \rho_{max} \end{cases}$$

9

$$\hat{\rho}_j \in \begin{cases} [0, \sigma], & \text{if } 0 \leq \rho_{j,0} \leq \sigma, \\ \{\rho_{j,0}\} \cup [0, \tau(\rho_{j,0})], & \text{if } \sigma \leq \rho_{j,0} \leq \rho_{max}, \end{cases} \quad j = b, c,$$

و برای مسیر ورودی جواب با جریان $(\rho_a, 0, \hat{\rho}_a)$ داده می‌شود، در حالیکه برای $j = b, c$ جواب با جریان‌های $(\hat{\rho}_j, \rho_j, 0)$ داده می‌شود.

۳.۲ حالت $n = 2$ مسیر ورودی و $m = 2$ مسیر خروجی

حال اتصال با دو مسیر ورودی a, b و دو مسیر خروجی c, d را در نظر می‌گیریم. ماتریس توزیع A از قاعده‌ی (آ) به شکل زیر است

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 - \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

که $\alpha, \beta \in]0, 1[$. فرض کنیم که $\alpha \neq \beta$ ، در غیر اینصورت ممکن است بیش از یک جواب برای این مسئله برنامه‌ریزی خطی داشته باشیم، برای جزئیات بیشتر [۳] را ببینید. اولاً می‌توان فهمید که حدود جریان‌های مسیرهای خروجی می‌توانند به صورت زیر بیان شود:

$$\alpha \hat{\gamma}_a + \beta \hat{\gamma}_b \leq \gamma_c^{\max}, \quad (1 - \alpha) \hat{\gamma}_a + (1 - \beta) \hat{\gamma}_b \leq \gamma_d^{\max}.$$

نقطه $P = (\gamma_1, \gamma_2)$ را از تقاطع دو خط زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \gamma_1 + \beta \gamma_2 \leq \gamma_c^{\max}, \quad (1 - \alpha) \gamma_1 + (1 - \beta) \gamma_2 \leq \gamma_d^{\max}.$$

برای بیان جواب به تشخیص برخی موارد نیاز داریم:

حالت اول) اگر $\gamma_1 \leq \gamma_a^{\max}$ و $\gamma_2 \leq \gamma_b^{\max}$ آن‌گاه جواب به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma}_a = \gamma_1, \quad \hat{\gamma}_b = \gamma_2.$$

حالت دوم) اگر $\gamma_1 > \gamma_a^{\max}$ و $\gamma_2 > \gamma_b^{\max}$ آن‌گاه جواب به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma}_a = \gamma_a^{\max}, \quad \hat{\gamma}_b = \gamma_b^{\max}.$$



حالت سوم) فرض کنیم $\gamma_1 > \gamma_a^{\max}$ و $\gamma_2 \leq \gamma_b^{\max}$. اگر $\alpha < \beta$ (پس $1 - \beta < 1 - \alpha$). آنگاه محدوده‌ی داده شده توسط مسیر خروجی c دقیق‌تر از مسیر خروجی d است، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma}_a = \gamma_a^{\max}, \quad \hat{\gamma}_b = \min\left(\frac{\gamma_c^{\max} - \alpha \gamma_a^{\max}}{\beta}, \gamma_b^{\max}\right).$$

در غیر این صورت، اگر $\alpha > \beta$ ، آنگاه جواب به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma}_a = \gamma_a^{\max}, \quad \hat{\gamma}_b = \min\left(\frac{\gamma_a^{\max} - (1 - \alpha)\gamma_a^{\max}}{1 - \beta}, \gamma_b^{\max}\right).$$

حالت چهارم) فرض کنیم $\gamma_1 \leq \gamma_a^{\max}$ و $\gamma_2 > \gamma_b^{\max}$. اگر $\alpha > \beta$ (آنگاه $1 - \beta > 1 - \alpha$). سپس محدوده‌ی داده شده توسط مسیر خروجی c دقیق‌تر از مسیر خروجی d است، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$\hat{\gamma}_a = \min\left(\frac{\gamma_c^{\max} - \beta \gamma_b^{\max}}{\alpha}, \gamma_a^{\max}\right), \quad \hat{\gamma}_b = \gamma_b^{\max}.$$

در غیر این صورت، یعنی اگر $\alpha < \beta$ ، آنگاه جواب با معادله‌ی زیر ارائه می‌شود:

$$\hat{\gamma}_a = \min\left(\frac{\gamma_a^{\max} - (1 - \beta)\gamma_b^{\max}}{1 - \alpha}, \gamma_a^{\max}\right), \quad \hat{\gamma}_b = \gamma_b^{\max}.$$

۳. روش‌های عددی: RK DG

در ادامه، روش RK DG را برای گسسته‌سازی معادلات جریان ترافیک غیرخطی یک بعدی (1D) توصیف می‌کنیم، و الگوریتم را به مسائل شبکه‌ای یک بعدی (1D) شامل شرایط اتصال در اتصالات را بسط می‌دهیم. در نهایت، یک محدوده مرتبه بالا برای حفظ کرانه‌های بالایی و پائینی از جوابهای مرتبه بالا، را به کار می‌بریم.

۳.۱ RK DG برای معادلات هذلولوی یک بعدی

گسسته‌سازی مکانی DG: گسسته‌سازی مکانی زیر را در نظر بگیرید: فرض کنیم $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ برای

$$j = 1, \dots, N_x$$

یک افراز از $[0, L]$ با $x_j = \frac{1}{2}(x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}})$ برای مرکز سلول و $\Delta x_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$ اندازه‌ی سلول باشد.

نیمه‌گسسته‌سازی روش DG برای معادله (۱) می‌تواند بعنوان یافتن جواب‌های عددی ρ_h در یک فضای با بعد متناهی شامل چند جمله‌یی‌های تکه‌ای از درجه k ، طراحی شود، برای هر k صحیح نامنفی داریم؛

$$V_h^k = \{u: u|_j \in P^k, \quad 1 \leq j \leq N_x\}$$



بطوریکه برای هر تابع آزمون $\psi \in V_h^k$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{I_j} \rho_h \psi dx = \int_{I_j} f(\rho_h) \partial_x \psi dx - \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} \psi_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} \psi_{j-\frac{1}{2}}^+ \right). \quad (6)$$

در اینجا و در ادامه، علامت \pm نشان دهنده حد راست/چپ تابع در یک نقطه است.

گسسته‌سازی زمانی **RK** در زمان: معادله (۶) در زمان با روش خطوط با استفاده از روش **TV DRK** به شکل زیر حل می‌شود،

$$\begin{aligned} \rho_h^{(1)} &= \rho_h^n + \Delta t^n L(\rho_h^n), \\ \rho_h^{(2)} &= \frac{3}{4} \rho_h^n + \frac{1}{4} \rho_h^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t^n L(\rho_h^{(1)}), \\ \rho_h^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \rho_h^n + \frac{2}{3} \rho_h^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t^n L(\rho_h^{(2)}) \end{aligned} \quad (7)$$

که L عملگر مکانی است، و نشان دهنده‌ی R, H, S از معادله (۶) است و Δt^n مرحله (گام) زمانی عددی است. قید (محدود کننده) **TVB**: وقتی که جوابها شامل تغییرات بودند، محدود کننده **TVB** توسط *Cockburn* و *Shu* [4] پیشنهاد شد؛ که برای از بین بردن نوسانات ساختگی و تقویت پایداری استفاده می‌شود.

فرض کنیم که $\bar{\rho}_j$ میانگین سلول از حل عددی روی سلول I_j باشد، و فرض کنید

$$\tilde{\rho}_j = \rho_h \left(x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \bar{\rho}_j, \quad \tilde{\rho}_j = -(\rho(x_{j-1/2}^+) - \bar{\rho}_j). \quad (8)$$

محدود کننده (قید) **TVB** برای تنظیم $\tilde{\rho}_j$ و $\tilde{\rho}_j$ به صورت زیر استفاده می‌شود،

$$\tilde{\rho}_j^{(mod)} = \tilde{m}(\tilde{\rho}_j, \Delta_+ \tilde{\rho}_j, \Delta_- \tilde{\rho}_j), \quad \tilde{\rho}_j^{(mod)} = \tilde{m}(\tilde{\rho}_j, \Delta_+ \tilde{\rho}_j, \Delta_- \tilde{\rho}_j), \quad (9)$$

که $\Delta_- \tilde{\rho}_j = \tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j-1}$ ، $\Delta_+ \tilde{\rho}_j = \tilde{\rho}_{j+1} - \tilde{\rho}_j$ و تابع \tilde{m} اصلاح شده‌ی *minmod* به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{m}(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq M \Delta x_j^2, \\ s \min(|a_1|, |a_2|, |a_3|) & \text{if } |a_1| > M \Delta x_j^2, \\ \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) = \text{sign}(a_3) = s, & \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

قیدهای $\tilde{\rho}_j^{(mod)}$ و $\tilde{\rho}_j^{(mod)}$ مورد استفاده برای بازیابی مقادیر نقطه‌ای جدید هستند،

$$\begin{aligned} \rho_{j+1/2}^{(mod),-} &= \bar{\rho}_j + \tilde{\rho}_j^{(mod)}, \\ \rho_{j-1/2}^{(mod),+} &= \bar{\rho}_j - \tilde{\rho}_j^{(mod)}. \end{aligned} \quad (10)$$

با $\rho_{j+1/2}^{(mod),+}$ و $\rho_{j-1/2}^{(mod),-}$ اصلاح یافته، به عنوان جواب های عددی در مرزهای سلول، همچنین به عنوان میانگین سلول $\bar{\rho}_j$ می توانیم یک چندجمله ای منحصر بفرد P^2 را به عنوان جواب عددی اصلاح یافته بسازیم.

شرایط مرزی (کران داری): بسته به جهت جریان ها در کران ها، می توان هر کدام از شرایط مرزی جریانهای ورودی و خروجی را برای کران های باز توصیف کرد.

۲.۳. RK DG برای شبکه های هذلولوی

ما روشهای خاص ساخت شرایط اتصال عددی را در نظر گرفته ایم، به عنوان مثال، جریانهای عددی، تنها در یک نقطه اتصال از انواع زیر است:

- (الف) یک مسیر ورودی و خروجی
- (ب) دو مسیر ورودی و یک مسیر خروجی
- (ج) یک مسیر ورودی و دو مسیر خروجی
- (د) دو مسیر ورودی و دو مسیر خروجی.

شرایط اتصال مشابه را می توان برای موارد پیچیده براساس قواعد (آ)، (ب) و (ج) مشخص شده در بخش ۲، به دست آورد. در ادامه، فرض کردیم که γ_m^{\max} به دنبال معادله (۲) با ρ بودن حد راست جواب عددی روی $N_m^{\pm h}$ (امین) سلول از یک مسیر ورودی m در نقطه اتصال، انتخاب شده است، γ_m^{\max} از معادله (۳) با ρ بودن حد چپ جواب عددی روی اولین سلول از یک مسیر خروجی m در نقطه اتصال، انتخاب شده است. یک مسیر ورودی و یک مسیر خروجی: فرض کنیم که اتصال با مسیر ورودی a و مسیر خروجی b را در نظر گرفته ایم. شرایط اتصال به صورت زیر هستند

$$\hat{\gamma}_a = \hat{\gamma}_b = \hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} = \min(\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}) \quad (11)$$

جریانهای عددی از نقطه اتصال در مسیرهای ورودی و خروجی به صورت زیر هستند

$$f_{N_a+\frac{1}{2}}^a = \hat{\gamma}_a, \quad f_{\frac{1}{2}}^b = \hat{\gamma}_b. \quad (12)$$

یک مسیر ورودی و دو مسیر خروجی: اکنون اتصال با یک مسیر ورودی a و دو مسیر خروجی b, c را در نظر می گیریم. با نماد معرفی شده برای α در بخش 2.2، شرایط اتصال به صورت زیر هستند:

$$\hat{\gamma}_a = \min\left\{\gamma_a^{\max}, \frac{\gamma_b^{\max}}{\alpha}, \frac{\gamma_c^{\max}}{1-\alpha}\right\}, \quad \hat{\gamma}_b = \alpha \hat{\gamma}_a, \quad \hat{\gamma}_c = (1-\alpha)\hat{\gamma}_a. \quad (13)$$

جریانهای عددی از نقطه اتصال در مسیرهای ورودی و خروجی به صورت زیر هستند

$$f_{N_a+\frac{1}{2}}^a = \hat{\gamma}_a, \quad f_{\frac{1}{2}}^b = \hat{\gamma}_b, \quad f_{\frac{1}{2}}^c = \hat{\gamma}_c. \quad (14)$$

دو مسیر ورودی و یک مسیر خروجی: اکنون اتصال با دو مسیر ورودی a و b و یک مسیر خروجی c را در نظر می گیریم. با نماد معرفی شده برای q در بخش 2.1، شرایط اتصال به صورت زیر هستند. برای حالت $\gamma_a^{max} + \gamma_b^{max} < \gamma_c^{max}$ داریم

$$\hat{\gamma}_a = \gamma_a^{max}, \quad \hat{\gamma}_b = \gamma_b^{max}, \quad \hat{\gamma}_c = \hat{\gamma}_a + \hat{\gamma}_b. \quad (15)$$

برای حالت $\gamma_a^{max} + \gamma_b^{max} \geq \gamma_c^{max}$ ، شرایط اتصال به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_a &= q \gamma_c^{max}, & \hat{\gamma}_b &= (1-q) \gamma_c^{max}, & \hat{\gamma}_c &= \gamma_c^{max} \text{ if } \gamma_a^{max} \geq q \gamma_c^{max}, \gamma_b^{max} \geq (1-q) \gamma_c^{max} \\ \hat{\gamma}_a &= \gamma_a^{max}, & \hat{\gamma}_b &= \gamma_c^{max} - \gamma_a^{max}, & \hat{\gamma}_c &= \gamma_c^{max} \text{ if } \gamma_a^{max} < q \gamma_c^{max}, \gamma_b^{max} \geq (1-q) \gamma_c^{max} \\ \hat{\gamma}_a &= \gamma_c^{max} - \gamma_b^{max}, & \hat{\gamma}_b &= \gamma_b^{max}, & \hat{\gamma}_c &= \gamma_c^{max} \text{ if } \gamma_a^{max} \geq q \gamma_c^{max}, \gamma_b^{max} < (1-q) \gamma_c^{max} \end{aligned} \quad (16)$$

جریانهای عددی در نقطه اتصال بین مسیرهای دریافتی و خروجی به شکل زیر هستند:

$$f_{N_a+\frac{1}{2}}^a = \hat{\gamma}_a, \quad f_{N_b+\frac{1}{2}}^b = \hat{\gamma}_b, \quad f_{\frac{1}{2}}^c = \hat{\gamma}_c. \quad (17)$$

دو مسیر ورودی و دو مسیر خروجی: حال اتصال با دو مسیر ورودی a, b و دو مسیر خروجی c, d را در نظر می گیریم. شرایط اتصال همان شرایطی هستند که در بخش 2.3 برای $\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b$ با $(\hat{\gamma}_c, \hat{\gamma}_d)^T = A(\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b)^T$ شرح داده شد.

جریانهای عددی در نقطه اتصال روی مسیرهای ورودی و خروجی به شکل زیرند:

$$f_{N_a+\frac{1}{2}}^a = \hat{\gamma}_a, \quad f_{N_b+\frac{1}{2}}^b = \hat{\gamma}_b, \quad f_{\frac{1}{2}}^c = \hat{\gamma}_c, \quad f_{\frac{1}{2}}^d = \hat{\gamma}_d. \quad (18)$$

ملاحظه ۳.۱. یک خاصیت متمایز روش DG در مقایسه با دیگر روشهای مرتبه بالا، مانند حجم متناهی یا روشهای تفاضل متناهی، برای حل معادلات هذلولوی، فشردگی این روش است. خصوصاً، جریانهای مرتبه بالا فقط به سلولهای مجاور مستقیم بستگی دارد. چنین خاصیتی، مزیت بزرگی در صدور شرایط مرزی در نقاط اتصال شبکههای هذلولوی را نشان می دهد.

۳.۳. حفظ کران جوابهای عددی

در مدل جریان ترافیک، مشخص شده $\rho(x, t) \in [0, \rho_{max}]$ است. با این حال، بطور کلی چنین خاصیتی برای جوابهای عددی مرتبه بالا، نگه داشته نمی شود.



برای حفظ کران‌های نظری در حل $RK DG$ ، در این زیربخش؛ به کارگیری قید ارائه شده در [20] را پیشنهاد می‌کنیم. استفاده از این قید بر مبنای این حقیقت است که یک روش یکنواخت مرتبه اول با جواب‌های عددی ثابت قطعه‌ای برای مسائل شبکه‌ای در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند.

فرض کنیم ρ_j^{-n} تقریبی عددی برای جواب‌ها در ستون (سلول) I_j در زمان t_n باشد، و فرض کنیم x اندازه‌ی مش مکانی برای یک شبکه‌بندی یکنواخت باشد (نتایج مشابهی برای شبکه‌بندی‌های غیر یکنواخت برقرار است).

تعریف ۳.۲. (روش یکنواخت) یک روش یکنواخت مرتبه اول برای معادله هذلولوی یک بعدی (۱) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود،

$$\rho_j^{-n+1} = \rho_j^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}).$$

در اینجا $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f}(\rho_j^{-n}, \rho_{j+1}^{-n})$ یک جریان یکنواخت است، که یک تابع غیر کاهشی نسبت به آرگومان اولی و یک تابع غیر افزایشی نسبت به آرگومان دومی است. بطور مشابه برای $\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}$ می‌توان به راحتی در روش یکنواخت نشان داد که

$\rho_j^{-n+1} = G(\rho_{j-1}^{-n}, \rho_j^{-n}, \rho_{j+1}^{-n})$ یک تابع غیر کاهشی نسبت به ρ_{j+1}^{-n} و ρ_{j-1}^{-n} است، اگر شرایط مناسب CFL صدق کند. از اینرو،

$$0 = G(0,0,0) \leq \rho_j^{-n+1} \leq G(\rho_{max}, \rho_{max}, \rho_{max}) = \rho_{max}, \quad \forall n, j, \quad (19)$$

مشروط بر اینکه شرایط اولیه $\bar{\rho}_j \in [0, \rho_{max}]$ که منجر به ویژگی حفظ کران جواب عددی می‌شود.

گزاره زیر یک تعمیم از چنین نتیجه‌ای برای مسائل هذلولوی شبکه‌ای است. بدون از دست دادن کلیت، جریان **Godunov** را به عنوان جریان عددی در نظر می‌گیریم، با

$$f(\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_{j+1}) = \begin{cases} \min_{\rho \in [\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_{j+1}]} f(\rho), & \text{if } \bar{\rho}_j \leq \bar{\rho}_{j+1} \\ \max_{\rho \in [\bar{\rho}_{j+1}, \bar{\rho}_j]} f(\rho), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (20)$$

گزاره ۳.۳. یک روش یکنواخت مرتبه اول با جریان **Godunov** را به عنوان یک جریان عددی برای معادله هذلولوی یک

بعدی (۱) قرار گرفته روی هر مسیر در یک شبکه را در نظر می‌گیریم، شرایط اتصال در اتصالات نسبت به قوانین (آ)، (ب) و (ج)، با معادلات (۲) و (۳) مشخص شده در بخش ۲، صدق می‌کنند. پس از آن، جواب عددی، کرانه‌های (۲۲) را ارضا می‌کند.



برهان) اثبات اظهارات برای عناصر مرزی در مجاورت اتصالات، کافی است. چپ‌ترین عنصر روی یک مسیر ($j = 1$) را در

نظر می‌گیریم، که یک مسیر خروجی در محل اتصال است. از معادله‌ی (۳) همراه با قوانین (آ)، (ب) و (ج)، داریم $\hat{f}_{\frac{1}{2}} \geq 0 = \hat{f}(0, \rho_1^{-n})$ از اینرو

$$\rho_1^{-n+1} = \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}_{\frac{1}{2}}) \geq \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}(0, \rho_1^{-n})) \geq 0,$$

که آخرین نامساوی با توجه به یکنواختی روش است. به‌منظور اثبات $\rho_1^{-n+1} \leq \rho_{max}$ ، دو حالت را مورد بحث قرار می‌دهیم:

الف) وقتی که $\rho_1^{-n} \leq \sigma$ ، داریم $\hat{f}_{\frac{1}{2}} \leq f(\sigma) = \hat{f}(\sigma, \rho_1^{-n})$ از اینرو

$$\rho_1^{-n+1} = \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}_{\frac{1}{2}}) \leq \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}(\sigma, \rho_1^{-n})) \leq \rho_{max},$$

که آخرین نامساوی با توجه به یکنواخت بودن روش است.

ب) بطور مشابه، وقتی $\rho_j^{-n} > \sigma$ ، داریم $\hat{f}_{\frac{1}{2}} \leq f(\rho_1^{-n}) = \hat{f}(\rho_1^{-n}, \rho_1^{-n})$ از اینرو

$$\rho_1^{-n+1} = \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}_{\frac{1}{2}}) \leq \rho_1^{-n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{\frac{3}{2}} - \hat{f}(\rho_1^{-n}, \rho_1^{-n})) \leq \rho_{max},$$

به روش مشابه می‌توان اثبات ویژگی برای راست‌ترین عنصر روی یک مسیر را نیز انجام داد. □

می‌خواهیم جواب عددی $\rho_h(x)$ را به $\rho_h^*(x)$ تغییر دهیم، تقریب یک تابع $\rho(x)$ روی هر سلول I_j ، طوریکه در شرایط زیر صدق کند

- دقت: برای تابع هموار $\rho(x)$ ، $\|\rho_h(x) - \rho_h^*(x)\| = \mathcal{O}(\Delta x^{k+1})$ ، روی I_j ؛
- خاصیت حفاظت جرم: $\int_{I_j} \rho_h^*(x) dx = \int_{I_j} \rho_h(x) dx = \bar{\rho}_j$ ؛
- حفظ کران‌ها: $I_j \rho_h^*(x) \in [0, \rho_{max}]$ روی I_j .

به منظور به‌دست آوردن ویژگی‌های ذکر شده در بالا، می‌توان قید زیر را به‌کار برد

$$\rho_h^*(x) = \theta(\rho_h(x) - \bar{\rho}_j) + \bar{\rho}_j, \quad \theta = \min\left\{\left|\frac{\rho_{max} - \bar{\rho}_j}{M_j - \bar{\rho}_j}\right|, \left|\frac{\bar{\rho}_j}{m_j - \bar{\rho}_j}\right|, 1\right\}, \quad (21)$$



که M_j و m_j ماکسیمم و مینیمم های $\rho_{\bar{x}}(x)$ در نقاط انتگرالگیری (کوادراتور) لژاندر گاوس-لوباتو برای سلول I_j هستند. می توان به راحتی بررسی کرد که با استفاده از چنین قیدی، ویژگیهای حفاظت و حفظ کران در جوابهای عددی صدق می کنند. علاوه بر این، اثبات شده که چنین فرآیند محدودی، دقت اصلی مرتبه $(k+1)$ ام از تقریب را حفظ می کند. از آنجا که روش یکنواخت مرتبه اول، کرانه های مسائل هذلولوی شبکه را حفظ می کند، می توان نشان داد که متوسط سلول روش مرتبه بالا به خوبی کران دار و محدود هستند، یعنی $\forall j, \bar{\rho}_j \in [0, \rho_{max}]$ تحت قیود اضافی CFL:

$$\max_{\rho} |f'(\rho)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \min_i w_i,$$

که w_i ها وزنه های انتگرال گیری در قاعده انتگرال گیری لژاندر-گاوس-لوباتو روی بازه استاندارد $[-1,1]$ هستند. از اینرو، قید بالا می تواند برای روش $RK DG$ پیشنهادی برای شبکه های هذلولوی به کار برده شود. همچنین توجه داریم که اگر ρ_{max} در میان مسیرهای مختلف در یک شبکه متفاوت باشد، می توان قید مشابه با کرانه های بالایی مناسب روی چگالی را به کار برد.

۴. مثال های عددی

در مثالهای عددی، برای روش رانگه-کوتای TVD مرتبه سوم (7)، $CFL = 1.0, 0.33, 0.20, 0.14$ ، برای فضاهای جواب P^0, P^1, P^2, P^3 به ترتیب متناظر با روش های DG با مرتبه های مکانی اول تا چهارم بود. گام زمانی $\Delta t_n = CFL \Delta x$ برای فضای جواب P^0, P^1, P^2 و $\Delta t_n = CFL \Delta x^{\frac{5}{4}}$ برای فضای جواب P^3 است.

اندازه سلول $1/40$ است و جوابهای مرجع P_{ref}^0 با استفاده از روش RK DG مرتبه اول (روش حجم متناهی) با اندازه سلول $1/1600$ در همه مثالها، بجز در آزمون دقت، به دست می آیند.

۱.۴ آزمون دقت

اولین آزمون برای حل معادله جریان ترافیک (۱) با تابع جریان زیر است:

$$f(\rho) = \rho(1 - \rho), \quad \rho \in [0,1], \quad (22)$$

با شرایط اولیه

$$\rho(x, 0) = 0.5 + 0.5 \sin(2\pi x). \quad (23)$$

و دامنه محاسباتی، $[0,1]$ با شرایط مرزی تناوبی (دوره ای) است. جوابها را تا زمان $t = 0.1$ محاسبه می کنیم. روش نیوتن برای به دست آوردن جواب مرجع استفاده می شود. از یک تعداد CFL کوچکتر، یعنی $CFL = 0.05$ برای حالت های P^2 و P^3 برای اطمینان از اینکه خطای مکانی غالب است، استفاده می کنیم؛ طوریکه مرتبه مکانی از دقت را می توان برای روش با BP محدود کننده، مشاهده کرد. نتایج بدون قید BP و با قید BP در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده اند.



جدول ۱. آزمون دقت، خطاهای L^1 و L^∞ و مرتبه‌ها، مینیمم و ماکسیمم جواب‌های عددی برای شرایط اولیه (۲۶) بدون قید BP ، برای فضاهای جواب P^0, P^1, P^2, P^3 .

	N	L^1 error	Order	L^∞ error	Order	Min	Max
p^0	10	0.28E-01	-	0.30E+00	-	0.000000	1.000000
	20	0.14E-01	0.95	0.21E+00	0.48	0.000000	1.000000
	40	0.73E-02	0.97	0.12E+00	0.84	0.000000	1.000000
	80	0.37E-02	0.98	0.66E-01	0.86	0.000000	1.000000
	160	0.19E-02	0.99	0.34E-01	0.94	0.000000	1.000000
p^1	320	0.93E-03	1.00	0.17E-01	0.98	0.000000	1.000000
	10	0.46E-02	-	0.87E-01	-	-0.056360	1.056360
	20	0.11E-02	2.12	0.29E-01	1.58	-0.009971	1.009971
	40	0.25E-03	2.09	0.72E-02	2.02	-0.002324	1.002324
	80	0.61E-04	2.03	0.19E-02	1.91	-0.000549	1.000549
p^2	160	0.15E-04	2.01	0.49E-03	1.96	-0.000133	1.000133
	320	0.38E-05	2.00	0.13E-03	1.98	-0.000033	1.000033
	10	0.28E-03	-	0.69E-02	-	0.000000	1.000000
	20	0.48E-04	2.55	0.18E-02	1.97	0.000000	1.000000
	40	0.85E-05	2.49	0.71E-03	1.32	0.000000	1.000000
p^3	80	0.12E-05	2.83	0.11E-03	2.73	0.000000	1.000000
	160	0.16E-06	2.89	0.21E-04	2.32	0.000000	1.000000
	320	0.22E-07	2.88	0.42E-05	2.35	0.000000	1.000000
	10	0.44E-04	-	0.24E-02	-	0.000000	1.000000
	20	0.52E-05	3.11	0.84E-03	1.55	-0.000043	1.000043
p^3	40	0.24E-06	4.45	0.72E-04	3.54	-0.000002	1.000002
	80	0.13E-07	4.21	0.49E-05	3.89	0.000000	1.000000
	160	0.77E-09	4.06	0.32E-06	3.92	0.000000	1.000000
	320	0.47E-10	4.01	0.20E-07	3.98	0.000000	1.000000

جدول ۲. آزمون دقت، خطاهای L^1 و L^∞ و مرتبه‌ها، مینیمم و ماکسیمم جواب‌های عددی برای شرایط اولیه (۲۶) با قید BP ، برای فضاهای جواب P^0, P^1, P^2, P^3 .

	N	L^1 error	Order	L^∞ error	Order	Min	Max
p^0	10	0.28E-01	-	0.30E+00	-	0.000000	1.000000
	20	0.14E-01	0.95	0.21E+00	0.48	0.000000	1.000000
	40	0.73E-02	0.97	0.12E+00	0.84	0.000000	1.000000
	80	0.37E-02	0.98	0.66E-01	0.86	0.000000	1.000000
	160	0.19E-02	0.99	0.34E-01	0.94	0.000000	1.000000
p^1	320	0.93E-03	1.00	0.17E-01	0.98	0.000000	1.000000
	10	0.59E-02	-	0.95E-01	-	0.000000	1.000000
	20	0.11E-02	2.37	0.30E-01	1.64	0.000000	1.000000
	40	0.26E-03	2.14	0.73E-02	2.07	0.000000	1.000000
	80	0.62E-04	2.04	0.19E-02	1.92	0.000000	1.000000
p^2	160	0.15E-04	2.02	0.49E-03	1.97	0.000000	1.000000
	320	0.38E-05	2.01	0.13E-03	1.98	0.000000	1.000000
	10	0.29E-03	-	0.54E-02	-	0.000000	1.000000
	20	0.48E-04	2.58	0.17E-02	1.67	0.000000	1.000000
	40	0.85E-05	2.49	0.71E-03	1.27	0.000000	1.000000
p^3	80	0.12E-05	2.82	0.11E-03	2.73	0.000000	1.000000
	160	0.16E-06	2.88	0.21E-04	2.32	0.000000	1.000000
	320	0.22E-07	2.87	0.42E-05	2.35	0.000000	1.000000
	10	0.44E-04	-	0.24E-02	-	0.000000	1.000000
	20	0.61E-05	2.86	0.84E-03	1.54	0.000000	1.000000
p^3	40	0.26E-06	4.56	0.72E-04	3.54	0.000000	1.000000
	80	0.13E-07	4.31	0.49E-05	3.89	0.000000	1.000000
	160	0.79E-09	4.05	0.32E-06	3.92	0.000000	1.000000
	320	0.50E-10	3.98	0.20E-07	3.98	0.000000	1.000000

نتایج بدون محدود کننده BP نشان می‌دهد که روش $RKDG$ منظم، جواب‌های عددی را تولید می‌کند که بیرون و روی کران‌های جواب دقیق است. با محدود کننده BP ، می‌توان مشاهده کرد که این روش نتایج مربوط به کران‌های جواب‌های فیزیکی را نتیجه می‌دهد.

ساده‌ترین مدل جریان ترافیک در شبکه‌ها با استفاده از مسئله تنگنا، نشان داده شده است. حفاظت از ماشین‌ها همواره با استفاده از (۱)، همراه با شرایط مرزی و اولیه، بیان می‌شود. مدل‌های مسئله تنگنا یک مسیر با پهنای مختلف است، از اینرو توابع جریان مختلف در امتداد بخش‌های مختلف از مسیر هستند. نقطه جدایی بین دو بخش از مسیر را با S نشان می‌دهیم. یک مسیر مشخص شده روی $[0, 2]$ با $S = 1$ را در نظر می‌گیریم. ممکن است مسیر را به‌عنوان مسیری متشکل از دو مسیر مختلف در نظر بگیریم. فرض کنیم ρ_1 چگالی (تراکم) ترافیک در سمت چپ S روی $[0, 1]$ (بخش گسترده‌تر) باشد و ρ_2 تراکم ترافیک در سمت راست S روی $[1, 2]$ (بخش باریک‌تر) باشد. بخش گسترده‌تر را می‌توان به‌عنوان مسیر دریافتی در نظر گرفت و قسمت باریک‌تر به‌عنوان مسیر خروجی در نظر گرفته می‌شود. تابع جریان $f_1(\rho)$ در قسمت پهناتر توسط معادله (۲۲) به‌دست می‌آید، در حالیکه تابع جریان در بخش باریک‌تر با استفاده از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$f_2(\rho) = \rho \left(1 - \frac{3}{2}\rho\right), \quad \rho \in [0, 2/3].$$

حداکثر مقدار جریان‌ها، منحصر بفرد و یکتاست:

$$f_1(\sigma_1) = \max_{[0,1]} f_1(\rho) = \frac{1}{4}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad f_2(\sigma_2) = \max_{[0, 2/3]} f_2(\rho) = \frac{1}{6}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{3}$$

ابتدا داده مرزی و اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\rho_1(t=0, x) = 0.66, \quad x \in [0, 1]; \quad \rho_2(t=0, x) = 0.66, \quad x \in [1, 2]; \quad \rho_{1,2}(t, x=0) = 0.25. \quad (24)$$

مقدار اولیه 0.66 بسیار نزدیک به مقدار ماکسیممی است که می‌تواند توسط مسیر ۲ جذب شود، بعد از یک زمان کوتاه، به‌عنوان مثال در $T = 0.5$ ، تشکیل یک ترافیک فشرده مشاهده می‌شود. در نتایج عددی ارائه شده، جواب‌های DG با فضای چندجمله‌ایهای P^1 ، P^2 عملکرد بهتری داشتند و انتشار عددی کمتری با اندازه‌ی مش (شبکه‌بندی) نسبتاً درشتی در مقایسه با روش مرتبه اول دارند.

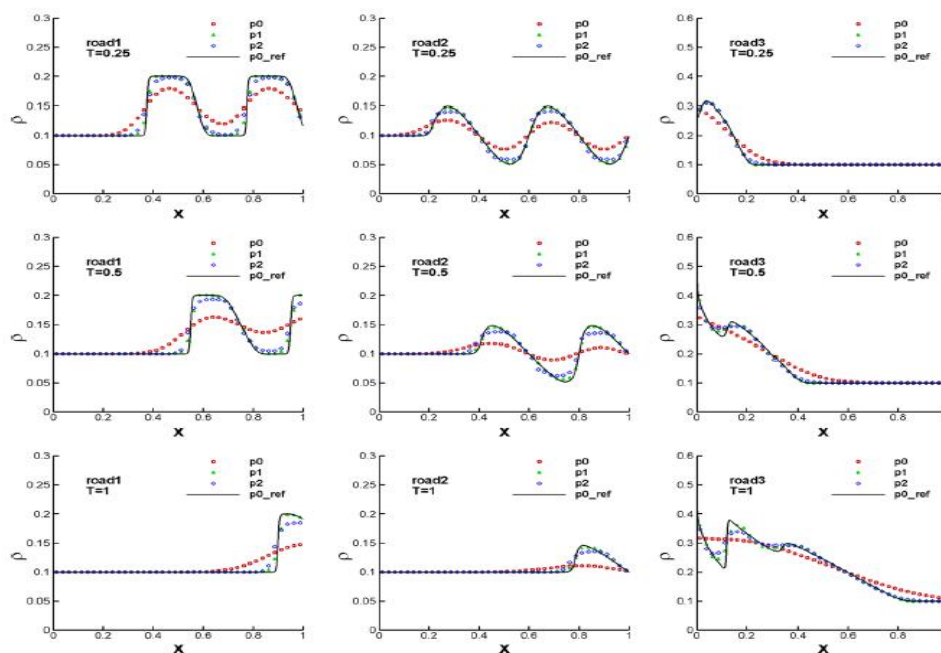
۳.۴ دو مسیر ورودی و یک مسیر خروجی

عبور از مسیرها با دو مسیر ورودی و یک مسیر خروجی را در نظر می‌گیریم، همه با $[0, 1]$ پارامتری شده‌اند، با یک قاعده‌ی روش پارامتری ثابت شده که $q \in [0, 1]$ است. مسیرهای ورودی با ۱ و ۲ نشان داده می‌شوند، در حالیکه مسیرهای خروجی با ۳ نشان داده می‌شوند. تابع جریان با استفاده از معادله (۲۲) به‌دست می‌آید. روش را با شرایط مرزی و اولیه زیر مورد آزمایش قرار می‌دهیم:

$$\rho_1(0, x) = \begin{cases} 0.1, & \text{if } x \in [0, 0.2] \cup [0.4, 0.6] \cup [0.8, 1] \\ 0.2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \rho_2(t=0, x) = 0.1,$$

$$\rho_2(t=0, x) = 0.1 + 0.05 \sin(5\pi x), \quad \rho_{1,b}(t, x=0) = 0.1, \quad \rho_{2,b}(t, x=0) = 0.1. \quad (25)$$

q را برابر با 0.5 در نظر می‌گیریم. شکل ۴ را ببینید. مشابه با مثال قبلی، روش‌های مرتبه بالاتر؛ عملکرد بهتری در حل مجدد ساختارهای جواب نسبت به روش‌های مرتبه پائین‌تر دارند.



شکل ۴: دو مسیر ورودی و خروجی با شرایط مرزی و اولیه (۲۵)، $q = 0.5$ و $T = 0.25, 0.5, 1$

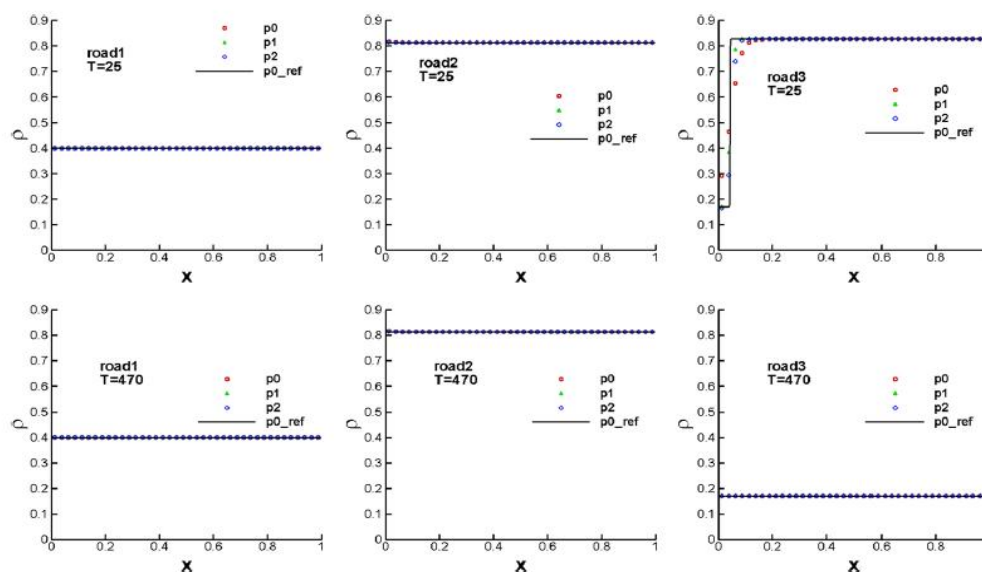
۴.۴. دو مسیر ورودی و دو مسیر خروجی

در اینجا حالتی خاص از اتصال با دو مسیر دریافتی و دو مسیر خروجی را در نظر می‌گیریم. مسیرهای ورودی را با ۱ و ۲ نشان می‌دهیم، در حالیکه مسیرهای خروجی ۳ و ۴ هستند. دو مسیر ورودی و دو مسیر خروجی با استفاده از بازه $[0, 1]$ پارامتری می‌شوند. تابع جریان با استفاده از فرمول (۲۲) به دست می‌آید. ماتریس توزیع ترافیک (۵) است. فرض کنیم که در شبیه‌سازی هایمان $\alpha = 0.4$ و $\beta = 0.3$ باشد.

$$\rho_2(0, x) = \rho_3(0, x) = \rho_{2,b}(t) = 0.82732683535; \quad \rho_4(0, x) = 0.5; \quad \rho_{1,b}(t) = 0.4;$$

$$\rho_1(0, x) = \begin{cases} 0.4, & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5 \\ \rho_{1,0}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

در پانل‌های نشان داده‌شده در شکل ۵، جواب‌های عددی روی مسیر ۱ و مسیر ۳ در زمان‌های مختلف را نشان داده‌ایم. مشاهده می‌شود که روش‌های $RK DG$ مرتبه بالاتر، عملکرد بهتری نسبت به روش مرتبه اول دارند.



شکل ۵: دو مسیر ورودی و خروجی با شرایط مرزی و اولیه (۲۶) ، $T = 0.25$ (ردیف بالایی) ، $T=470$ (ردیف پایینی)

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش حفظ کران، روش RK DG مرتبه بالا برای مسائل شبکه‌های هذلولوی با کاربردهایی در جریان ترافیک، را ارائه داده‌ایم. در مقایسه با دیگر روش‌های مرتبه بالای موجود، روش‌های DG فشرده هستند، به این معنی که حفظ همسایگی‌های مستقیم برای به‌روز رسانی جواب، روی یک عنصر مورد استفاده قرار می‌گیرند. چنین ویژگی‌ای امکانات زیادی در رسیدن به شرایط مرزی در اتصالات با دقت مرتبه بالا، را ارائه می‌دهد.

منابع

- [1]. M.J. Lighthill and G.B. Whitham, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads* , Proc. R. Soc. London. Ser. A , 229, 317-345 (1955).
- [2]. P. I. Richards, *Shock waves on the highway* , Oper. Res. 4, 42-51,. (1956).
- [3]. M. Garavello, B. Piccoli , *Traffic flow on networks* , vol. 1 of AIMS Series on Applied Mathematics, American Institute of mathematical sciences (AIMS). springfield , MO (2006).
- [4]. H. Holden, N.H. Risebro , *A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads*, SIAM J. Math. Anal. 26, 999-1017,. (1995).



[5]. B. Cockburn, C.- W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws , II General framework*. Math. Comput. 52, 411-435 (1989).

Archive of SID