



روش های کالوکیشن (هم محلی) تابع پایه شعاعی نامتقارن برای مسائل پخش (انتقال)

گرما

کبری نوره

دانشگاه پیام نور مرکز ایلام
sari.salar@gmail.com

مدینه امیری

استان هرمزگان: دانشگاه پیام نور شهرستان میناب
Amiri.math84@gmail.com

مرتضی چاجی

اداره آموزش و پرورش خراسان جنوبی (مدیریت آموزش و پرورش شهرستان سریشه)
Chaji64@yahoo.com

چکیده

در این مقاله، روش هم محلی تابع پایه شعاعی نامتقارن (RBF) برای حل مسائل انتقال گرما با عدد پکله (Peclet) بالا را بررسی می کنیم، همانطور که در Barraco و Power (کامپیوترها و ریاضیات با کاربردها ۲۰۰۲؛ ۴۳:۵۵۱) است. با تست کردن RBF های گوناگون و تعداد مختلف از گره ها، درمی یابیم که روش نامتقارن هنوز هم می تواند مسائل با عدد پکله ی بالا را به خوبی با استفاده از گره های بیشتر و روش های تجزیه دامنه؛ حل کند. در مقایسه با حل یک مسئله ی بزرگتر، نشان داده شده است که روش تجزیه دامنه بسیار کارآمد است و می تواند دقت را بهبود دهد مخصوصاً زمانی که عدد پکله بالا نیست. واژگان کلیدی: تابع پایه شعاعی، روش بدون شبکه، تجزیه دامنه .



۱. مقدمه

در سالهای اخیر، توجه فراوانی به استفاده از توابع پایه شعاعی (RBF ها) برای حل معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی مختلف (PDEها) در درجه اول با توجه به ویژگی بدون شبکه‌ای؛ شده است. روش هم‌محلی مستقیم با استفاده از RBF ها توسط کانزا در سال ۱۹۹۰ معرفی شد. این روش به اصطلاح، روش کانزا، و یا روش کالوکیشن (هم‌محلی) RBF نامتقارن نامیده می‌شود. باتوجه به عمومیت آن و اجرای ساده‌اش، برای حل بسیاری از مسائل در زمینه‌های مختلف استفاده شده است. در مرجع [3]، Fassauer یک روش جایگزین مبتنی بر نظریه‌ی درونیابی هرمیت-بیرخوف را پیشنهاد داد. این به‌اصطلاح، روش کالوکیشن (هم‌محلی) RBF متقارن نامیده می‌شود چون که ماتریس ضرایب به‌دست آمده، متقارن هستند. پیاده‌سازی نسخه‌ی متقارن نسبت به نسخه‌های نامتقارن، باتوجه به استفاده از عملگرهای الحاقی دیفرانسیل؛ (به‌ویژه برای معادله ضریب متغیر و سیستم‌های غیرخطی) بسیار پیچیده است. برای بهترین اطمینان، تا به حال استفاده از روش متقارن، تنها محدود شده به مسائل ضریب ثابت می‌باشد. با آزمایش RBFهای مختلف، در می‌یابیم که روش نامتقارن می‌تواند مسائل با عدد پلکه‌ی بالا را با دقت خوب با استفاده از توابع پایه شعاعی مرتبه بالاتر و شبکه‌های ظریفتر و دقیق‌تر حل می‌کند. در می‌یابیم که برخی بی‌ثباتی در RBFهای $r^{2k} \ln r$ و r^{2k+1} ($k = 2, 3, \dots$) وجود دارد، زمانی که عدد پلکه بزرگ است. ما دریافتیم که تفاوت‌های بزرگی در دقت بین اسپلاین‌های صفحه نازک (TPS) $r^4 \ln r$ و $r^6 \ln r$ وجود دارد. هم‌پوشانی روش تجزیه دامنه (DDM) به‌منظور بهبود دقت و کارایی محاسباتی در بسیاری از موارد، نشان داده شده است.

۲. روش کالوکیشن (هم‌محلی) RBF نامتقارن

یک مسئله کلی حالت- پایدار در ابعاد d ($d=1,2,3$) را در نظر بگیرید:

$$L\phi = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad B\phi = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1)$$

که در آن L یک عملگر دیفرانسیل خطی دلخواه است، B یک عملگر تحمیل‌کننده به‌عنوان شرایط مرزی، مانند دیریکله، نویمان، رابین و یا ترکیبی از آنها می‌باشد. فرض کنیم $\{x_i\}_{i=1}^N$ ، N نقاط هم‌محلی در Ω باشد، که $\{x_i\}_{i=1}^{N_I}$ نقاط داخلی هستند و $\{x_i\}_{i=N_I+1}^N$ نقاط مرزی هستند. جواب تقریبی برای مسئله (۱) می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\|x - x_j\|) \quad (2)$$

که در آن $\{c_j\}_{j=1}^N$ ضرایب مجهولی هستند که باید تعیین شوند، و $\varphi(\|x - x_j\|)$ می‌تواند هر تابع پایه شعاعی باشد. در اینجا $\|x - x_j\|$ فاصله اقلیدسی بین نقاط x_j و x می‌باشد. با جایگزین کردن (۲) با (۱)، داریم



$$\sum_{j=1}^N [L\varphi(\|x_i - x_j\|)] c_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^N [B\varphi(\|x_i - x_j\|)] c_j = g(x_i), \quad i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N \quad (4)$$

که می‌تواند برای ضرایب مجهول $\{c_j\}_{j=1}^N$ حل شود، اگرچه اثبات نظری از حل پذیری (۴)–(۳)، هنوز هم باز است. توابع پایه شعاعی بطور گسترده مورد استفاده؛ مولتی کوادریک‌های $\varphi(r) = (r^2 + \alpha^2)^{\beta/2}$ (یک عدد صحیح فرد است)، گاوسی‌های $\varphi(r) = e^{-\alpha r^2}$ ، اسپلاین‌های چند همساز $\varphi(r) = r^n \log r$ (n یک عدد صحیح مثبت زوج است)، نوع مخروطی $\varphi(r) = r^n$ (n یک عدد صحیح مثبت فرد است)، و RBF‌های محمل فشرده هستند.

۳. هم‌پوشانی روش تجزیه دامنه

روش کالوکیشن (هم‌محلی) RBF یک مشکل اصلی دارد؛ یعنی ماتریس ضرایب ایجاد شده معمولاً پُر (کامل)، نامتقارن و بسیار بد وضع است، که مانع از کاربرد این روش برای مسائل در مقیاس بزرگ است. با این حال، روش‌های تجزیه دامنه می‌تواند یک راه برای جلوگیری از مسائل بدوضع را با حل بسیاری از مسائل زیردامنه‌ای کوچک به جای یک مسئله کلی دامنه بزرگ؛ فراهم می‌کند. در زیر برای سادگی، روش افزایشی شوارتز را شرح داده‌ایم.

فرض کنیم Ω به دو زیر دامنه Ω_1 و Ω_2 افراز شود، که در آن $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. مرزهای ساختگی Γ_i بخشی از کران Ω_i هستند که درون Ω است، کران‌های باقیمانده با $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i$ نشان داده می‌شوند. می‌توانیم مسئله‌ی روی Ω را با الگوریتم کلاسیک افزایشی شوارتز که به صورت زیر نوشته می‌شود؛ حل کنیم

$$L\phi_1^n = f \quad \text{in } \Omega_1$$

$$B\phi_1^n = g \quad \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1$$

$$\phi_1^n = \phi_2^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_1$$

و

$$L\phi_2^n = f \quad \text{in } \Omega_2$$

$$B\phi_2^n = g \quad \text{on } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2$$

$$\phi_2^n = \phi_1^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_2$$



که در آن روی هر زیر دامنه طرح عددی همانند بخش ۲ انجام شده است. در اینجا $n = 1, 2, \dots$ گام تکرار را نشان می‌دهد. معمولاً حدس اولیه‌ی $\phi_1^0 = \phi_2^0 = 0$ مورد استفاده هست، و هر مسئله‌ی زیر دامنه می‌تواند توسط یک حلال LU حل شود. تعمیم روش شوارتز به زیر دامنه‌های بسیاری، بطور مستقیم توسط دسته‌بندی یا گروه‌بندی صورت می‌گیرد.

۴. نتایج عددی

برای مقایسه، مسئله‌ی پخش (انتشار) گرمای مشابه مورد بحث توسط *Power* و *Barraco* را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,0.6) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, y = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, y = 0.6 \quad (7)$$

$$\phi = 1, \quad 0 \leq y \leq 0.6, x = 0 \quad (8)$$

$$\phi = 2, \quad 0 \leq y \leq 0.6, x = 1 \quad (9)$$

مسئله‌ی بالا دارای جواب تحلیلی

$$\phi(x, y) = 2 - \frac{1 - \exp[u(x-1)]}{1 - \exp(-u)}$$

است. در اینجا فرض کردیم که طول مرجع و ضریب انتشار یکی هستند، از اینرو u عدد پکله است. وقتی که u بزرگ است، این مسئله‌ی انتقال گرمای غالب برای حل شدن، خیلی سخت می‌شود. الگوریتم‌های عددی ویژه‌ای، بعنوان مثال، روش عنصر متناهی خلاف جهت خط جریان، روش تفاضل متناهی خلاف جهت؛ برای حل این قبیل مسائل توسعه یافته‌اند. ما ابتدا حالت خاص $u=100$ را حل می‌کنیم. برای سادگی، از نقاط کالوکیشن (هم‌محلی) منظم استفاده می‌کنیم، که با گسسته‌سازی یکنواخت دامنه‌ی Ω به عناصر کوچک $N_x \times N_y$ ، تشکیل شده‌اند، که N_x و N_y به ترتیب تعداد افزایش در امتداد x و y هستند. ما حالت گسسته‌سازی‌های 20×12 و 40×24 را برای RBF ‌های $r^5, r^7, r^k \ln r$ ، $k = 4, 6, 8$ مورد آزمایش قرار دادیم. ماکسیمم خطاهای مطلق به دست آمده به ترتیب در یک، دو و چهار زیر دامنه در جداول I-III ارائه شده‌اند. می‌توانیم ببینیم که روش نامتقارن دقت معقول و مناسبی را ارائه می‌دهد (حدود ۲٪ خطاهای نسبی برای r^7 و $r^6 \ln r$). در اینجا از تجزیه گام به گام و هم‌پوشانی هر زیر دامنه با دو نقاط گرهی در امتداد x استفاده می‌کنیم، توزیع همان گره برای حالت 20×12 در شکل ۱ نشان داده شده است. در تمام آزمون‌های *DDM*، از همان تلورانس خطای 10^{-8} برای همگرایی در کران‌های ساختگی استفاده می‌کنیم. همگرایی جواب‌های عددی در شکل‌های ۲-۴ نشان داده شده است، که از آن می‌بینیم جواب‌های عددی؛ جواب تحلیلی را به خوبی بدون نوسان تقریب می‌زند. اما می‌توانیم برخی بی‌ثباتی از قبیل دقت بدتر با یک شبکه ظریف‌تر را، برای ۴ حالت زیر دامنه برای $r^4 \ln r$ مشاهده کنیم. این مساله باتوجه به بدوضعی ماتریس ضرایب (۳)-(۴) است. مشاهده کردیم که ماکسیمم خطاها به منظور افزایش *RBF*‌ها یا گره‌های متراکم‌تر تنها در زیردامنه چپ برای حالت زیر دامنه ۲ (جدول II)، و در دو زیر دامنه چپ برای حالت زیر دامنه ۴ (جدول III) بهبود یافت.



جدول I. حداکثر خطا برای حالت $u=100$ به دست آمده توسط کل دامنه.

Mesh $N_x \times N_y$	Basis				
	r^5	r^7	$r^4 \ln r$	$r^6 \ln r$	$r^8 \ln r$
20×12	0.05637	0.02035	0.10492	0.02743	0.06428
40×24	0.05929	0.02827	0.08763	0.05209	0.03042

جدول II. حداکثر خطا برای حالت $u=100$ به دست آمده توسط تجزیه به ۲ زیر دامنه.

Mesh	Basis	Errors in each subdomain		Iter. steps
20×12	r^5	0.02263	0.04987	11
20×12	r^7	0.05242	0.06449	11
20×12	$r^4 \ln r$	0.04983	0.09055	11
20×12	$r^6 \ln r$	0.04122	0.05074	11
20×12	$r^8 \ln r$	0.08169	0.10974	17
40×24	r^5	0.00279	0.05694	13
40×24	r^7	0.00111	0.02781	7
40×24	$r^4 \ln r$	0.01406	0.10478	13
40×24	$r^6 \ln r$	0.01591	0.05560	11
40×24	$r^8 \ln r$	0.00543	0.02867	26

جدول III. حداکثر خطا برای حالت $u=100$ به دست آمده توسط تجزیه به ۴ زیر دامنه.

Mesh	Basis	Errors in each subdomain				Iter. steps
20×12	r^5	0.00176	0.00604	0.08391	0.13254	25
20×12	r^7	0.00013	0.00011	0.00554	0.05461	15
20×12	$r^4 \ln r$	Blow up	Blow up	Blow up	Blow up	
20×12	$r^6 \ln r$	0.00061	0.01542	0.16244	0.19505	33
20×12	$r^8 \ln r$	0.00208	0.00825	0.09611	0.11020	27
40×24	r^5	0.00013	0.00011	0.00554	0.05461	15
80×48	r^5	6.05E-05	7.46E-05	0.00271	0.03661	22
100×60	r^5	4.05E-05	5.10E-05	0.00191	0.02677	48
40×24	r^7	5.22E-05	6.20E-05	0.00390	0.02838	15
40×24	$r^4 \ln r$	Blow up	Blow up	Blow up	Blow up	
40×24	$r^6 \ln r$	9.65E-05	0.00022	0.01326	0.04798	14
40×24	$r^8 \ln r$	0.00022	0.00102	0.04736	0.07529	18

توضیح برای این روند این است که جواب تحلیلی یک انتقال (تحول) تیز در نزدیکی $x = 1$ دارد، که به بهبود کند و آرام در چپ ترین زیر دامنه ؛ منجر می شود.

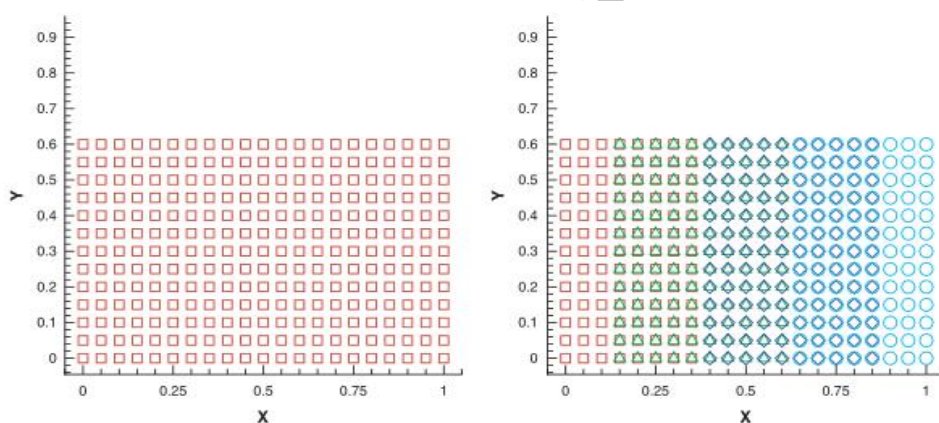
سپس مساله را با زیر دامنه های بیشتری حل می کنیم. با حالت 20×12 ، دوباره آنرا با تجزیه به ۵ زیر دامنه حل می کنیم، که در ۲۸ گام همگرا می شود. حداکثر خطا در هر زیر دامنه به ترتیب

0.01167,0.00801,0.01607,0.28414,0.50178

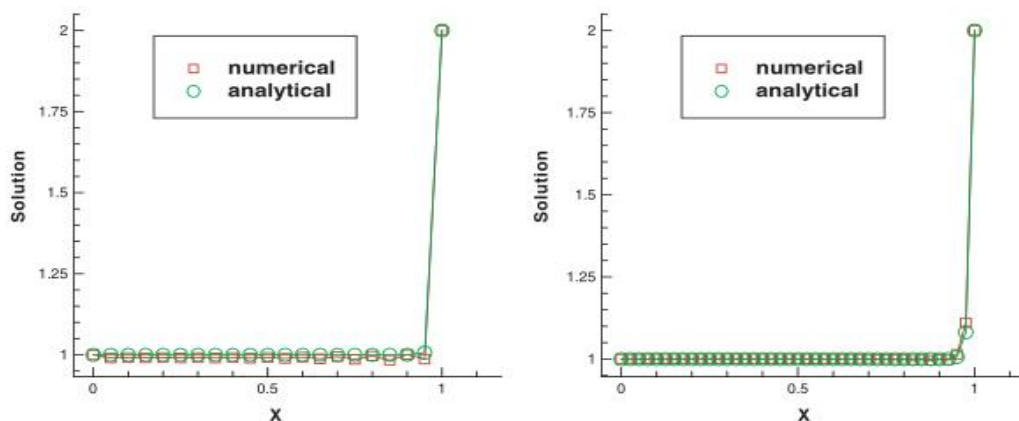
می باشد. برای حالت 40×24 ، مجدداً آنرا با تجزیه به ۸ زیر دامنه حل می کنیم، که در ۲۱ گام همگرا می شود. حداکثر خطا در هر زیر دامنه به ترتیب

0.00180,0.00290,0.00346,0.00387,0.00419,0.00439,0.02749,0.04001

می باشد. بنابراین با زیر دامنه های بیشتر، مسئله زیر دامنه خوش وضع تر و قابل حل می شود.



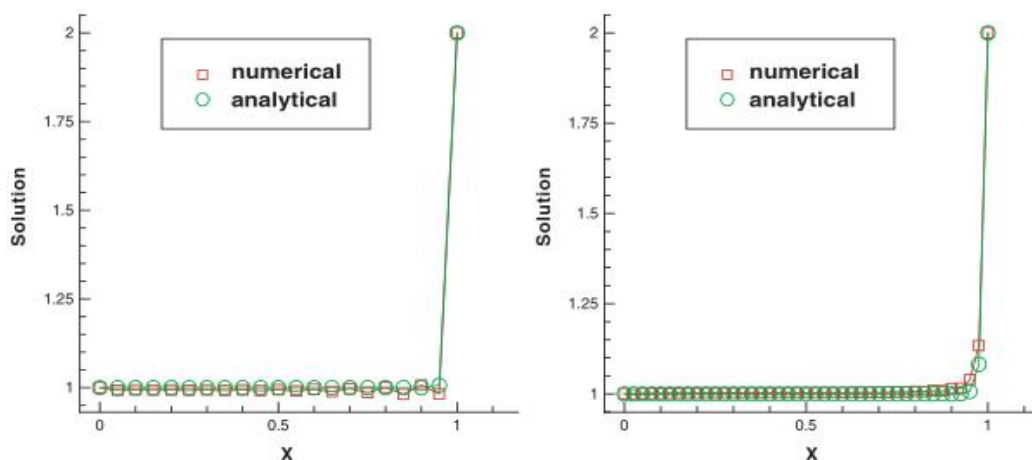
شکل ۱. توزیع گره های برای حالت 20×12 : (چپ) یک دامنه؛ (راست) تجزیه شده به ۴ زیر دامنه (هم پوشانی شده با ۲ گره در امتداد x)



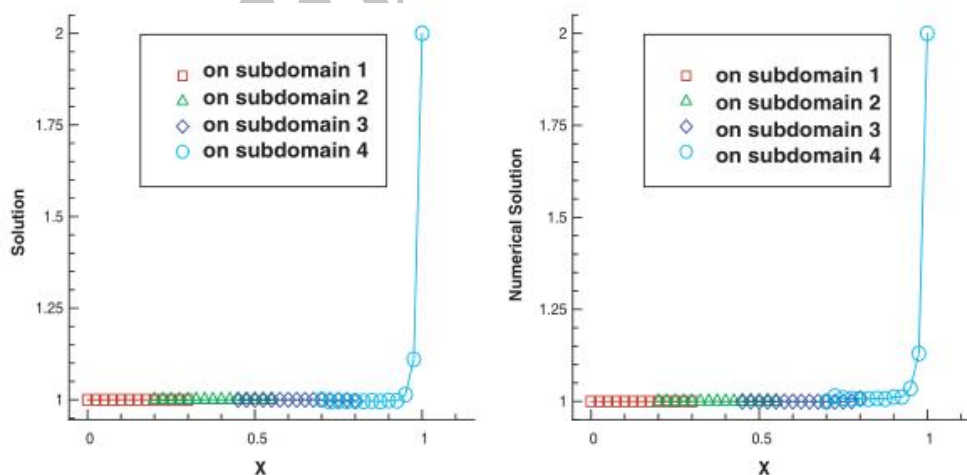
شکل ۲. جواب به دست آمده با استفاده از 3^7 با یک دامنه کلی: (چپ) روی شبکه 20×12 ؛ (راست) روی شبکه 40×24

سپس حالت $u = 10$ را مورد آزمایش قرار می‌دهیم.

براساس جداول $IV - VI$ ، می‌توان مشاهده کرد که دقت بهتری به دست می‌آید، و روش پایدارتر می‌شود. تفاضل بین $r^6 \ln r$ و $r^4 \ln r$ خیلی واضح می‌شود، چون که دقت در مرتبه‌های متعددی از اندازه، مختلف است. متاسفانه، $Power$ و $Barraco$ تنها برای روش نامتقارن را مورد آزمایش قرار داد و نشان داد که $r^4 \ln r$ نتایج غیر رضایت‌بخشی برای $u = 100$ را ارائه می‌دهد.



شکل ۳. جواب به دست آمده با استفاده از $r^6 \ln r$ با یک دامنه کل: (چپ) روی شبکه‌ی 20×12 ؛ (راست) روی شبکه 40×24 .



شکل ۴. جواب به دست آمده روی شبکه 40×24 تجزیه شده به چهار زیر دامنه: (چپ) با پایه‌ی r^7 ؛ (راست) با پایه‌ی $r^6 \ln r$.



جدول IV. حداکثر خطا برای حالت $u = 10$ به دست آمده با یک دامنه کل.

Mesh $N_x \times N_y$	Basis				
	r^5	r^7	$r^4 \ln r$	$r^6 \ln r$	$r^8 \ln r$
20×12	0.01136	0.00182	0.03287	0.00208	0.00128
40×24	0.00276	0.00024	0.00968	0.00063	0.00017

جدول V. حداکثر خطا برای حالت $u = 10$ به دست آمده با استفاده از تجزیه به دو زیر دامنه

Mesh	Basis	Errors in each subdomain		Iter. steps
20×12	r^5	0.00527	0.01024	21
20×12	r^7	0.00165	0.00165	21
20×12	$r^4 \ln r$	0.03184	0.04397	21
20×12	$r^6 \ln r$	0.00953	0.00957	21
20×12	$r^8 \ln r$	0.00173	0.00194	19
40×24	r^5	0.00078	0.00243	37
40×24	r^7	0.00012	0.00018	37
40×24	$r^4 \ln r$	0.00916	0.01498	37
40×24	$r^6 \ln r$	0.00180	0.00180	37
40×24	$r^8 \ln r$	0.00019	0.00025	37
80×48	r^5	0.00011	0.00051	71
80×48	r^7	9.61E-06	2.53E-05	71
80×48	$r^4 \ln r$	0.00249	0.00449	71
80×48	$r^6 \ln r$	0.00036	0.00037	71
80×48	$r^8 \ln r$	Blow up	Blow up	

جدول VI. حداکثر خطا برای حالت $u = 10$ به دست آمده با استفاده از تجزیه به ۴ زیر حالت.

Mesh	Basis	Errors in each subdomain				Iter. steps
20×12	r^5	0.00124	0.00159	0.00751	0.00751	29
20×12	r^7	0.00168	0.00233	0.00239	0.00243	29
20×12	$r^4 \ln r$	0.08699	0.06965	0.27527	0.27527	41
20×12	$r^6 \ln r$	0.00367	0.00541	0.00559	0.00578	29
20×12	$r^8 \ln r$	0.00954	0.01245	0.01337	0.01310	29
40×24	r^5	0.00069	0.00073	0.00084	0.00130	55
40×24	r^7	8.41E-05	7.98E-05	0.00026	0.00039	55
40×24	$r^4 \ln r$	0.11980	0.11808	0.53638	0.61908	63
40×24	$r^6 \ln r$	0.00033	0.00056	0.00076	0.00078	55
40×24	$r^8 \ln r$	0.00091	0.00132	0.00139	0.00138	55
80×48	r^5	0.00020	0.00025	0.00025	0.00023	104
80×48	r^7	2.01E-05	2.75E-05	4.61E-05	5.88E-05	103
80×48	$r^4 \ln r$	0.01358	0.01307	0.03839	0.04651	108
80×48	$r^6 \ln r$	3.27E-05	5.88E-05	0.00011	0.00011	103
80×48	$r^8 \ln r$	Blow up	Blow up	Blow up	Blow up	



توجه داشته باشید که تقریباً همان تعداد از تکرارها برای حالت $u = 10$ را با توجه به همان تعداد از زیر دامنه‌ها و همان میزان از تداخل و هم‌پوشانی را به دست می‌آوریم. همچنین زمان‌های محاسباتی صرف شده برای حل همان مساله $u = 10$ با یک زیر دامنه کلی و زیردامنه‌های متعدد و چندگانه را ثبت کرده‌ایم. این آزمایش بر روی کامپیوتر اختصاصی با سیستم عامل 700 مگاهرتزی لینوکس انجام شد. برای حالت گرهی 40×24 ، زمان صرف شده برای حل مساله‌ی دامنه‌ی کامل، تجزیه به زیر دامنه‌های ۲ و ۴ تقریباً یکسان است، که محدوده‌ای بین 0.03 و 0.05 ثانیه می‌باشد. با این حال، زمان صرف شده‌ی کاربر برای حل مساله دامنه کامل، تجزیه به ۲ و ۴ زیر دامنه‌ها به ترتیب در حدود ۱۲۰، ۵۰ و ۳۰ ثانیه است. برای حالت گرهی 80×48 ، تشخیص زمانهای صرف شده‌ی سیستم در تجزیه به ۲ و ۴ زیر دامنه‌ها، مشکل است (محدوده‌ای بین ۲ و ۶ ثانیه)، در حالیکه زمانهای صرف شده کاربر به ترتیب در حدود ۲۳۰۰ و ۹۰۰ ثانیه برای حل شدن با استفاده از ۲ و ۴ زیر دامنه هستند. ما سعی کردیم که حالت 80×48 را با استفاده از r^5 بدون تجزیه دامنه حل کنیم، که زمانی که کاربر مصرف می‌کند بیش از ۷۲۰۰ ثانیه است. برای حالت انفجاری با 80×48 حالت گره و پایه‌ی $r^4 \ln r$ ، مجدداً آنرا با استفاده از تجزیه به ۸ زیر دامنه حل می‌کنیم، که در ۱۸۱ گام همگرا می‌شود. حداکثر خطا در هر زیر دامنه به ترتیب

$$5.41E - 05, 8.12E - 05, 0.00010, 0.00012, 0.00013, 0.00014, 0.00014, 0.00013$$

می‌باشد. زمان سیستم 1.23 ثانیه است، و زمان کاربر 694 ثانیه است. بنابراین، با زیردامنه‌های بیشتر، خیلی از مسائل کلی بدوضع به مساله‌ی زیر دامنه‌ی خوش‌وضع تبدیل می‌شوند. می‌بینیم که DDMها واقعا زمان محاسباتی و دقت را حداقل برای حالت جواب هموار متغیر؛ بهبود می‌دهند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله روش کالوکیشن (هم‌محلی) RBF نامتقارن را برای حل مسائل انتشار گرمایی POWER و Barraco با عدد پکله بالا بررسی کردیم. از آزمایشاتمان، بنظر می‌رسد که $r^4 \ln r$ و $r^8 \ln r$ بسیار پایدار نیست، در حالیکه $r^6 \ln r$ ، r^5 و r^7 بسیار خوب عمل می‌کنند.

منابع

[1]power.H,Barraco v.A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations.computers with Applications2002;43:551-583

[2]Kansa EJ,Honyc.circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions.application to elliptic partial differential equations. Computers and mathematics with Applications 2000;39:123-137



[3]Fassauer GE.Solving partial differential equations by collocation with radial basis function .In proceeding of Chamonix,lemehaute A,Rabut c, schumaker l(eds) vander bilt university press,1997;131-138

Archive of SID