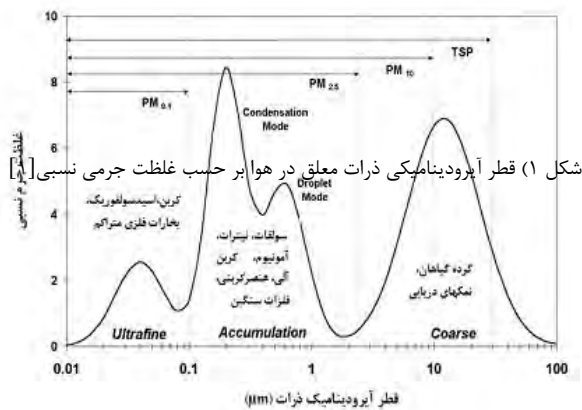


آنالیز جریان عبوری از میان یکی از شاخک‌های بینی انسان و بررسی پدیده رسوب کردن گردبادی برای تصفیه هوای ورودی

سینا طالب زاده، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) : sina.talebzadeh.mech@gmail.com

منصور خانکی، عضو هیئت علمی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) : khanaki@eng.ikiu.ac.ir

مجید قدیری، عضو هیئت علمی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) : ghadiri@eng.ikiu.ac.ir



چکیده

در این پژوهش چگونگی به دام افتادن ذرات در حفره بینی در اثر پدیده ای موسوم به رسوب کردن گردبادی مورد نظر است. ابتدا در رابطه با ذرات تشکیل دهنده گرد و غبار و سپس در رابطه با فیزیولوژی بینی و چگونگی اثر رسوب کردن گردبادی بحث شده است. در این پژوهش از عکسهای سی تی اسکن^۱ برای به دست آوردن هندسه دقیق استفاده شده و جریان عبوری از میان یکی از شاخک‌های بینی انسان بررسی شده و سپس مسیر حرکت ذرات به دست آمده تا بتوان درکی از چگونگی اثر رسوب کردن گردبادی داشت. برای یافتن نیروی دراگ برای ذرات، از آنجا که ذرات کروی فرض شده اند و برای ذره ای مانند جیوه، حالت مایع با چگالی 13.6 kg/m^3 در نظر گرفته شده است، از روابط اسپچلر-نیومن^۲ استفاده شده است. بررسی روی ذره کلسیت نشان می دهد که تاثیر متقابل بین درصد ذرات به دام افتاده و قطر ذرات معلق در هوا وجود دارد. همچنین نتایج، وجود اثر متقابل بین چگالی ذرات و قطری که به ازای آن صد در صد ذرات به دام می افتند را نشان می دهد. در انتها نیز در رابطه با این نتایج بحث و نتیجه گیری شده است

کلمات کلیدی: جریان، حفره بینی، تصفیه بینی، ذرات معلق

۱. مقدمه

امر تهویه در تنفس انسان نقش بسیار مهمی دارد و بخش اعظمی از این وظیفه بر عهده حفره بینی می باشد. آلودگی های هوا که انسان اغلب با آنها روبرو است معمولا از جنس ترکیبات و یا گازهای مضر یا گرد و غبار می باشد که از طیف عظیمی از ذرات با ابعاد مختلف تشکیل شده است.

ذراتی با قطر کمتر از ۱۰ میکرون به علت راحتی نفوذ در سیستم تنفسی انسان بسیار خطرناک می باشند [۲].

پژوهش بر پایه شکل شناسی^۳ بینی در تحقیقاتی که در سالهای ۱۹۹۱ انجام شد، آغاز گردید [۳] که در آن حفره بینی بنا به نوع شکل شناسی در گستره وسیعی از بلند و باریک تا کوتاه و پهن بررسی شده است. در تحقیقی در سال ۲۰۰۹ توزیع جریان و انتقال حرارت در حفره بینی بررسی شد [۴]. همچنین در سال ۲۰۰۹ تحقیقی انجام گرفت که در آن ضریب پختی ذرات در حفره بینی مورد بررسی قرار گرفته بود [۵]. در تمامی تحقیقات انجام شده اثر موهای بینی در جریان در نظر گرفته نشده است.

تمام مجاری هوایی از بینی تا برونشبولهای انتهایی توسط لایه ای از موکوس که تمامی سطح داخلی مجاری هوایی را می پوشاند، مرطوب نگه داشته می شوند. موکوس علاوه بر مرطوب نگه داشتن سطوح مجاری هوایی، ذرات کوچک موجود در هوای دمی را به دام انداخته و مانع رسیدن قسمت اعظم آنها به حبابچه هامی شود. موکوسها نیز توسط مکانیزم خاصی، از طریق حلق از مجاری هوایی خارج می شوند [۶].

دبی هوای تنفس راحت برای یک مرد بالغ سالم بین ۶ تا ۱۵ لیتر در دقیقه میباشد [۶] اما این مقدار بسیار متغیر و به پارامترهای زیادی وابسته است. برای مثال در تحقیقی که در سال ۱۹۹۵ انجام گرفت، جریان در حفره بینی برای شخصی سالم و بالغ و در حال تنفس راحت بین ۱۵ تا ۲۶ لیتر در دقیقه در نظر گرفته شده است [۷]. همچنین در تحقیقی که در سال ۲۰۰۹ جهت بررسی جریان بینی انجام شد [۴]. جریان در حفره بینی برای حالت استراحت ۱۵ لیتر در دقیقه در نظر گرفته شد.

به طور معمول و طبیعی در هر سمت بینی ۳ برجستگی استخوانی در داخل بینی وجود دارد که در اصطلاح عام شاخک و در اصطلاح پزشکی

^۱CT-Scan

^۲ Schiller-Naumann

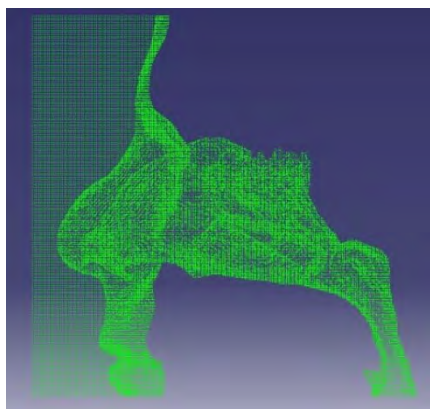
^۳Morphological

برای پردازش تبدیل شده است که مراحل آن در شکل‌های ۳ تا ۷ به تصویر کشیده شده است.

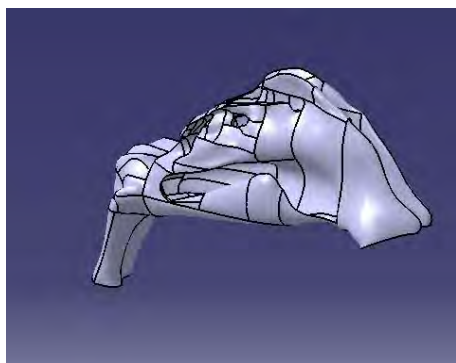


شکل ۳) عکس CT-scan در Mimix

در شکل ۳) در مقطع نشان داده شده، قسمت‌های سبزرنگ برای ساخت ابر نقاط و سپس ساخت هندسه به عنوان حفره بینی انتخاب شده است و قسمت جدا شده شاخک مورد نظر است که چگونگی رسوب ذرات در آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت.



شکل ۴) ابر نقاط از عکسهای CT-scan



شکل ۵) هندسه ساخته شده در Catia

توربینیت یا کانتکای بینی^۱ نامیده می شوند[۸]. مکانیزم فعالیت این شاخکها به این صورت است که هوای تنفسی در زمان عبور از بینی، از میان این برجستگی ها عبور کرده و اعمال مختلفی مثل تصفیه، مرطوب سازی و گرم کردن هوا روی آن انجام می شود[۹].

مهمترین مکانیسم برای جلوگیری از ورود ذرات به ریه عبور آن از بینی است. موهای بینی نقش مهمی در تصفیه هوا دارند اما از آن بسیار مهمتر پدیده ای موسوم به رسوب کردن گردبادی است. به این معنی که هوایی که از مجاری بینی میگذرد به تیغه های مسدود کننده متعددی برخورد می کند : شاخکها، تیغه بینی و حلق[۶و۲]. هر بار که هوا به یکی از این موانع برخورد می کند، باید جهت آن عوض شود. با توجه به اینکه ذرات معلق اینرسی بیشتری دارند، با سرعت و شتاب هوا نمی توانند تغییر جهت دهند و به دیواره بینی که پوشیده از پوشش موکوسی است برخورد کرده و به دام می افتند.



شکل ۲) عکس CT-scan حفره بینی و سینوسها-نمای جلو

در این تحقیق آلودگی ناشی از گردو غبار مورد نظر است و برای ساخت هندسه، از عکسهای سی تی اسکینیک مرد ۲۵ ساله، با وزن ۷۵ کیلوگرم و قد ۱۷۵ سانتیمتر استفاده شده است تا مدل تا حد امکان به واقعیت نزدیک باشد. در ادامه، جریان عبوری از میان شاخک پایینیحفره راست بینی حل و اثر آنها بر ذرات معلق در هوا و تصفیه نمودن هوا برای بدن بررسی شده است.

کلسیت یکی از ذرات تشکیل دهنده گرد و غبار است [۱] که در این تحقیق، حرکت این ذره مورد بررسی قرار گرفته است و غلظت آن ۲۰ برابر نرخ مجاز جهانی آلودگی در شهرها یعنی حدود ۵۰۰۰ میکروگرم در هر متر مکعب فرض شده است[۱۰]. مشخصات کلسیت به شرح زیر است [۱۱]:

چگالی: 2.71 gr/cm^3
حالت : جامد (پودر)

۲. شبیه سازی

۲.۱. ساخت مدل

عکسهای گرفته شده توسط اشعه ایکس^۲ در عکسبرداری سی تی اسکندر نرم افزار Mimix پردازش و با استفاده از Catia به حجم قابل استفاده

^۱Turinates or Conchea

^۲ CaCo₃

^۳ X-Ray

سطح مقطع هندسه حفره بینی مجموع سطوح آبی و زرد و حجم کنترل با رنگ قرمز نشان داده شده است و سطح مقطع ورودی حجم کنترل با دایره مشخصتر شده است.



شکل ۸) سطح مقطع حجم کنترل و سطح مقطع کل جسم در مقطع مورد نظر و کل حجم کنترل

$$A_{in-total} = 2.841 \times 10^{-4} m^2 \quad (1)$$

$$A_{in} = 0.087 \times 10^{-4} m^2 \quad (2)$$

دبی جرمی ذرات بر اساس غلظت ۵۰۰۰ میکروگرم بر متر مکعب و سرعت اولیه برابر با سرعت هوای ورودی محاسبه خواهد شد :

$$\dot{V}_{air} = 15 \text{ lit}/\text{min} = 0.25 \times 10^{-3} m^3/s \quad (3)$$

$$V_{in} = \frac{\dot{V}_{air}}{A_{in-total}} = 0.88 m/s \quad (4)$$

$$\dot{m}_{Dust-total} = 5000 \mu g/m^3 \times \dot{V}_{air} \quad (5)$$

$$\dot{m}_{Dust-total} = 1.25 \times 10^{-6} kg/s \quad (6)$$

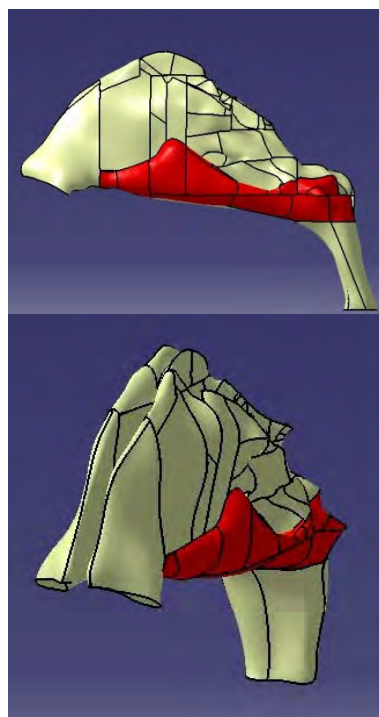
$$\dot{m}_{Dust-in} = \dot{m}_{Dust-total} \times \frac{A_{in}}{A_{in-total}} \quad (7)$$

$$\dot{m}_{Dust-in} = 0.038 \times 10^{-6} kg/s \quad (8)$$

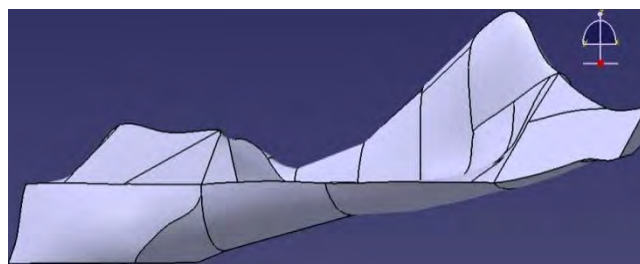
با حل معادلات ناویر استوکس برای جریان، معادلات خطوط جریان مشخص شده است. معادلات ناویر استوکس در دستگاه مشخص به شکل زیر تعریف می شوند [۱۲]:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f \quad (9)$$

سپس برای هر ذره معادلات حرکت نیوتن با توجه به نیروهای وارده، حل شده است و مسیر حرکت هر ذره مشخص شده است. برای یافتن نیروی دراگ از آنجاکه ذرات جامد معلق به صورت کروی فرض شده اند از روش



شکل ۶) شاخک بینی مورد بررسی - قسمت قرمز رنگ مورد بررسی قرار گرفته است



شکل ۷) هندسه ساخته شده و مورد بررسی

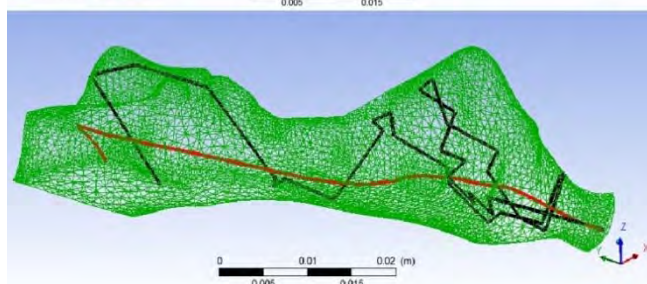
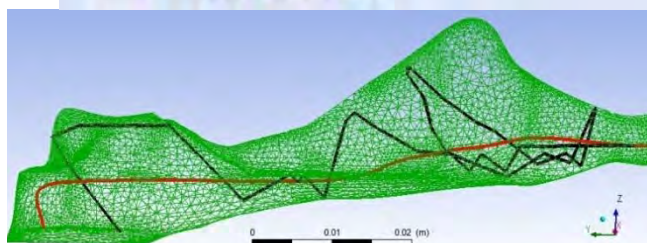
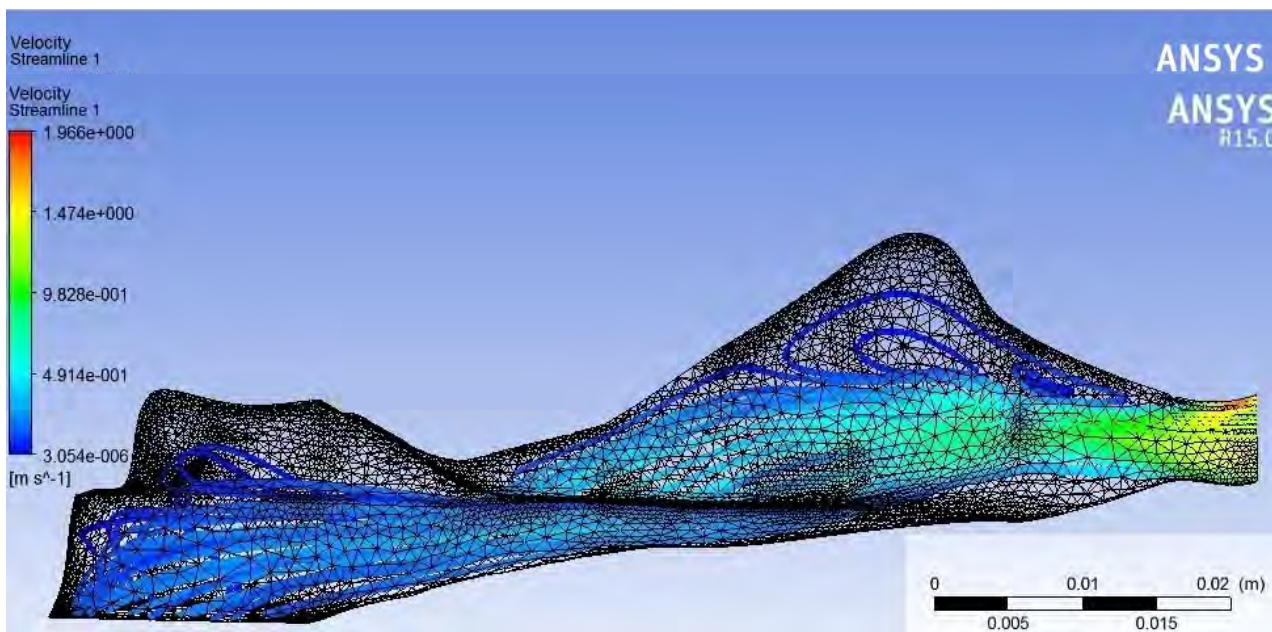
۲.۲. فرضیات

در این پژوهش، فرضیاتی در نظر گرفته شده که عبارتند از:

- ۱) از آنجاکه یافتن خط جریان و مسیر حرکت ذره درون شاخک مورد نظر، مهم است و هندسه در اطراف دیواره ها تغییری نکرده، این جدا کردن شاخک از کل هندسه تاثیر چندانی در حل نخواهد داشت.
- ۲) اثر موهای بینی در نظر گرفته نشده است.
- ۳) فرض می شود ذره کروی است و در ورودی به حجم کنترل روی یکی از خطوط جریان و با سرعت جریان وارد می شود.
- ۴) هوای ورودی به حجم کنترل، هوای ۲۵ درجه خشک است.
- ۵) دبی هوای تنفسی ۱۵ لیتر در دقیقه در نظر گرفته شده است.
- ۶) ذره مورد بررسی کلسیت فرض گردیده است.

۲.۳. روش حل

سرعت سیال ورودی به حجم کنترل با استفاده از دبی و سطح مقطع ورودی مورد نظر درون کل جسم محاسبه شده است. لازم به ذکر است که مساحت مقطع مورد نظر در هندسه حفره بینی، پس از مدل سازی در مقیاس ۱:۱ در نرم افزار Catia، توسط همین نرم افزار محاسبه شده است. در شکل (۷) سطح مقطع ورودی حجم کنترل با رنگ زرد و کل



شکل ۱۱) دنبال کردن یک ذره و خط جریانی که در ابتدا ذره روی آن است-شکل

شکل ۹) خطوط جریان با رسم ۱۰۰۰۰۰ خط جریان

بالا، تصویر از چپ (صفحه Z-Y) و شکل پایین، تصویر ایزومتر است

در شکل (۱۲) توزیع سرعت و مسیر حرکت ذره کلسیت با قطر ۱۰۰ میکرون رسم شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود، سرعت ذره در اواسط مسیر، بیشتر از سرعت جریان می باشد. دلیل این امر اثر برنولی می باشد که در سیال رخ می دهد. طبق این اثر وقتی سطح مقطع حرکت سیال بزرگ شود، سرعت آن کم و فشار آن زیاد میشود [۱۲]. اما این قانون برای ذره صدق نمی کند و این کاهش سرعت باعث کاهش نیروی دراگ وارده بر ذره می شود. از طرفی در این شرایط و با توجه به اینکه ذره سرعت بیشتری نسبت به جریان دارد، تغییر جهت در مسیر حرکت ذره به وسیله جریان، نسبت به موقعیتی که هم سرعت هستند، مشکلتر خواهد بود و این امر در به دام انداختن ذرات بسیار کمک می کند.

شکل ۱۰) خطوط جریان با رسم ۲۵۰ خط جریان

اسچیلر- نیومن [۱۳] برای یافتن ضریب دراگ، به صورت زیر استفاده شده است.

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) & Re \leq 1000 \\ 0.44 & Re > 1000 \end{cases} \quad (10)$$

تمامی معادلات مذکور در نرم افزار ANSYS CFX 15 و با در نظر گرفتن تاثیر ذرات روی جریان حل شده است. لازم به ذکر است که برای حل از مشهای شامل المانهای چهار وجهی (چهار سطحی) با تعداد ۹۷۸۵۷ المان استفاده شده است.

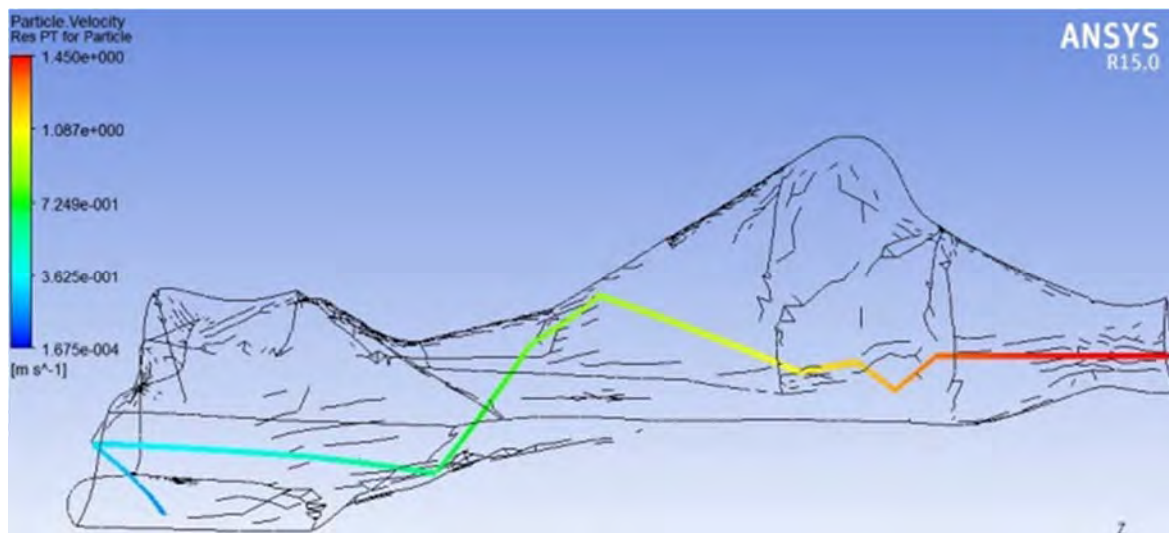
۳. نتایج

۳.۱. خطوط جریان

پس از حل، خطوط جریان در شکلهای (۹) و (۱۰) به ترتیب بر اساس ۱۰۰۰۰۰ و ۲۵۰ خط جریان نشان داده شده.

۳.۲. مسیر حرکت ذرات

مسیر حرکت ذرات به عوامل بسیاری بستگی دارد که نقطه ورودی ذره را نیز شامل می شود. در شکل (۱۱) مسیر یک ذره کلسیت با قطر ۶۰ میکرون که در ابتدا روی یک خط جریان بوده، به همراه خط جریان مربوطه، با فرض اینکه ذره با برخورد به دیواره ها به دام نمی افتد، رسم شده است. به عبارت دیگر نحوه به دام افتادن ذرات در شکل (۱۱) نمایش داده شده که خط سیاه رنگ مسیر حرکت ذره و خط قرمز رنگ خط جریان مربوطه است.



۴. نتایج آماری

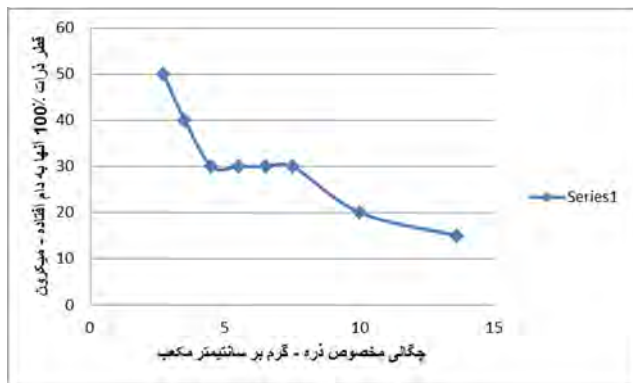
در شکل (۱۴) قطر ذراتی که ۱۰٪ آنها به دام می افتند بر حسب چگالی ذرات رسم شده است. برای مثال طبق این مدلسازی، اگر جنس ذره جیوه با چگالی ۱۳,۶ گرم بر سانتیمتر مکعب باشد، ذراتی با قطر بیشتر از ۱۵ میکرون نمی توانند از بینی عبور کنند.

به طور کلی به دام افتادن ذرات در حفره بینی در یک جریان ثابت، به ۲ عامل عمده بستگی دارد:

۱. قطر ذرات (اندازه ذرات)
۲. چگالی ذرات

در ادامه هر یک از این اثرها بررسی شده است. کلیه نمودارها با فرض اینکه هر ذره ای که حداقل یک بار به دیواره برخورد میکند، به آن خواهد چسبید، رسم شده است. همچنین این نمودارها با در نظر گرفتن ۱۰ نقطه ورودی برای ذرات روی صفحه ورودی هوا به صورت تصادفی رسم شده است.

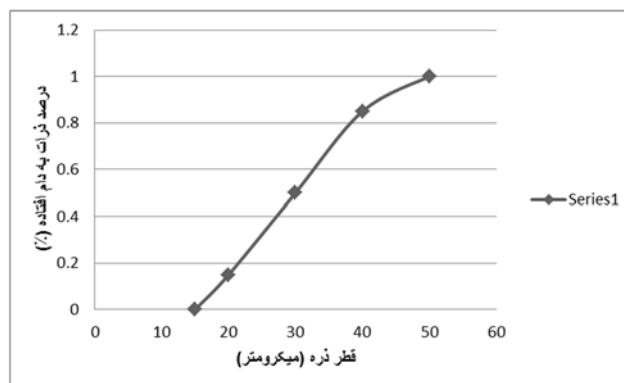
شکل (۱۳) درصد ذراتی که در حفره بینی به دام افتاده اند یا به عبارت دیگر به دیواره چسبیده اند را بر حسب قطر آنها برای کلسیت نشان می دهد. همانگونه که مشاهده می شود، برای کلسیت، ذراتی با قطر کمتر از ۱۵ میکرون به راحتی از بینی عبور می کنند و ذراتی با قطر بیش از ۵۰ میکرون نمی توانند از بینی عبور کنند.



شکل (۱۴) قطر ذرات ۱۰٪ به دام افتاده (میکرون) بر حسب چگالی مخصوص (گرم بر سانتیمتر مکعب)

لازم به ذکر است که روابط اسپچیلر نیومن برای ذراتی که جامد کروی هستند یا جنس آنها از هر گونه مایعی باشد، کاملاً صدق می کند [۱۳] و طبق شکل (۱۴) برای کلسیت که چگالی آن ۲,۷۱ گرم بر سانتیمتر مکعب است، ذراتی با قطر بیش از ۵۰ میکرون نمی توانند از بینی عبور کنند. در این نمودار برای ذراتی با چگالی بین ۴,۵ تا ۶,۵ گرم بر سانتیمتر مکعب، قطر به دست آمده که به ازای آن ۱۰٪ ذرات به دام می افتند، تقریباً یکسان بوده و مستقل از چگالی می باشد، این امر به علت تغییر رابطه ضریب دراگ، در روابط اسپچیلر-نیومن می باشد که ناشی از تغییرات در عدد رینولدز است، واضح است که بروز چنین رفتاری به آن معنا نیست که مسیر حرکتی ذرات با قطرهای مختلف در این بازه نیز یکسان خواهد بود.

میتوان برای هر ذره ای که وارد بینی می شود، حداقل شتابی را فرض کرد که ذره حداقل باید این شتاب را در اطراف انحنای داشته باشد تا در حفره بینی به دام نیفتد، این شتاب را شتاب حداقل می نامیم. واضح است که شتاب حداقل برابری از شتابهای زاویه ای و خطی برای ذره می باشد. برای یک ذره داریم :



شکل (۱۳) درصد ذراتی که به دام افتاده بر حسب قطر ذره (میکرون)

واضح است که در این روش تصفیه افت فشار بسیار کمتر از روش تصفیه با استفاده از فیلترها می باشد.

۶. فهرست علائم

\dot{V}	دبی حجمی (m^3/s)
v	سرعت هوای درون حجم کنترل (m/s)
T	دما (K)
D	قطر ذره (m)
A	سطح مقطع موثر ذره برای محاسبه نیروی دراک (m^2)
a	کمترین شتابی که ذره باید بگیرد تا به دیواره برخورد نکند (m/s^2)
C_D	ضریب دراک
f	نیروهای حجمی (N)
m	جرم ذره (kg)
Re	عدد رینولدز
F	مجموعه نیروهای دراک وارده به ذره (N)
V_{in}	سرعت ورودی هوا به مقطع مورد نظر در کل حفره بینی (m/s)
$A_{in-total}$	مساحت کل حفره بینی در مقطع مورد نظر (m^2)
A_{in}	مساحت مقطع ورودی حجم کنترل (m^2)
\dot{m}	دبی جرمی (kg/s)
زیر نویس ها	
air	هوای ورودی به کل حفره بینی
$Dust-total$	ذرات ورودی به کل بینی
$Dust-in$	ذرات ورودی به حجم کنترل
علائم یونانی	
μ	ویسکوزیته ($kg/m \cdot s$)
ρ	چگالی (kg/m^3)

۷. منابع و ماخذ

[۱] خیرخواه، کاوه، ۱۳۹۲، تقسیم بندی آلاینده های هوا، <http://envi.ir>، تاریخ دسترسی ۱۲ آذر ۱۳۹۳

[۲] گانون ویلیام اف، "کلیات فیزیولوژی پزشکی"، ترجمه فرخ شادان و فرشته معتمدی- [ویرایش ۲]، تهران، انتشارات چهر، ۱۳۷۹، ص ص ۱۰۶۲-۱۱۲۴.

[3] RG Franciscus, JC Long, "Variation in human nasal height and breadth", Am J PhysAnthropol 85,1991, pp 419-427.

[4] InthavongKiao, Wen Jain, Tu* Jiyuan, TianZhaofeng, "From CT Scan to CFD modelling-fluid heat transfer in a realistic human nasal cavity", Engineerin Application of Computation Fluid Mechanics Vol. 3, No. 3, 2009, pp 321-335.

$$A \propto D^2 \quad (11)$$

$$Re \propto D \quad (12)$$

$$F \propto A \times C_D \quad (13)$$

با توجه به روابط ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳، در صورت ثابت نبودن ضریب دراک، می توان دریافت که نیرو نسبت به قطر، تابعی از درجه ۱٫۶۸۷ است.

$$\frac{F}{m} \propto \frac{D^{1.687}}{\rho D^3} \propto a = Constant \quad (14)$$

$$D^{1.313} \propto \frac{1}{\rho} \quad (15)$$

$$D \propto \rho^{-\frac{1}{1.313}} \quad (16)$$

$$D \propto \rho^{-0.762} \quad (17)$$

رابطه آخر نشان می دهد که با تغییر چگالی در بازه ۴٫۵ تا ۶٫۵ با قطر تقریباً ثابت است و این همان قسمت میانی شکل (۱۴) است. با فرض ثابت بودن ضریب دراک داریم:

$$F \propto D^2 \quad (18)$$

$$\frac{F}{m} \propto \frac{D^2}{\rho D^3} \propto a = Constant \quad (19)$$

$$\rho \propto \frac{1}{D} \quad (20)$$

همانگونه که مشاهده می شود، برای قسمتهای دیگر نمودار ۳ که ضریب دراک ثابت است، ارتباط چگالی و قطر نمایی است. از این روابط و شکل (۱۴) می توان دریافت، در صورتی که بخواهیم قدرت تصفیه نسبت به چگالی با قطر ذره تغییر نکنند، باید تلاش شود با توجه به عدد رینولدز و شرایط جریان و شرایط ذره، نمودار قطر ذرات صد در صد به دام افتاده بر حسب چگالی ذرات در ناحیه میانی باشد که روابط ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ برای آنها برقرار می باشد.

۵. نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از عکسهای سی تی اسکن و مدلسازی در ابعاد واقعی، پدیده رسوب کردن گردبادی برای هوای عبوری از میان یکی از شاخک های بینی بررسی شد. همانگونه که مشاهده شد، هر گونه پیچ و انحنا در مسیر جریان هوا به طور کارآمدی می تواند ذرات معلق را جذب کند. با تغییر مسیر خط جریان، مسیر حرکت ذره از خط جریان فاصله گرفته و ذره به راحتی به دیواره بینی برخورد کرده و به آن می چسبد. از طرفی می توان در یک سیستم تصفیه، شرایط جریان، ذره و تصفیه کننده را طوری قرار داد که قدرت تصفیه کردن نسبت به چگالی ذرات، تقریباً مستقل از قطر آنها باشد که می تواند کاربردهای زیادی داشته باشد. می توان در آینده این پدیده را در کل حفره بینی بررسی نموده و درکی از آنچه به طور دقیق در بدن انسان اتفاق می افتد، داشت. همچنین می توان تحلیل رسوب کردن گردبادی را در دیگر تصفیه کننده ها نیز بررسی نمود

- [5] InthavongKiao, Zhang Kai, TU Jiyuan, "*Modelling submicron and micron particle deposition in a human nasal cavity*", International conference on CFD in minerals and process industries, 7, 2009, pp 1-5.
- [۶] گایتون آرتور، هال جان، "فیزیولوژی پزشکی"، ترجمه فرخ شادان و امیر صدیقی [جلد اول]، تهران، انتشارات چهر، ۱۳۴۸، ص ص ۷۰۶-۷۸۸.
- [7] Keyhani K, Scheler PW, Mozell MM, "*Numerical simulation of airflow in human nasal cavity*", *J Biomech Eng.* 117, 1995, pp. 429-441.
- [8] 2014, *Inferior nasal concha*, http://en.wikipedia.org/wiki/Inferior_nasal_concha, [accessed 28 december 2014]
- [9] ملکان راد، حمید، ۱۳۹۳، شاخک های بینی، <http://www.drmlakan.ir>. [تاریخ دسترسی ۱۳ آذر ۱۳۹۳].
- [10] 2014, *Calcium carbonate*, https://en.wikipedia.org/wiki/Calcium_carbonate, [accessed 25december 2014]
- [۱۱] قلی پور، سحر، ۱۳۹۳، بررسی پدیده گرد و غبار و اثرات زیست محیطی آن، <http://greeneearth.blog.ir>. [تاریخ دسترسی ۱۲ آذر ۱۳۹۳]
- [۱۲] وایت فرانک، "مکانیک سیالات پیشرفته (جریان سیال لزج)". ترجمه محمد رضایی نیا و ویراستاری علمی دکتر فیروزآبادی، تهران، انتشارات امید انقلاب، ۱۳۸۷، ص ص ۶۷-۱۰۷.
- [13] Shiller L, Naumann Z, "*Z.Ver.Deutsch*", *Ing.77*, 1935, p 318.