مدل اتو رگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه

اسماعیل امیری *، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) ، amiri@SCI.ikiu.ac.ir
زینب یوسفی پور ، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) ، p.yousefipoor@yahoo.com
رامین کاظمی ، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، r.kazemi@SCI.ikiu.ac.ir

چکیده: مدل اتورگرسیو آستانه‌ای مدلی قطعه‌ای خطی است که برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی بسیاری از سری‌های زمانی به‌ویژه سری‌های زمانی مالی کاربردهای فراوانی یافته است. در بسیاری از کاربردها، مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با تنها یک متغیر آستانه مورد استفاده قرار گرفته است. یک مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه معرفی و در یک رهیافت تجربی با استفاده از آزمون‌های نسبت درستنمایی و تقریب توزیع حدی آماره‌ها به کمک روش بوت استرپ، امکان چند رژیمی بودن سری زمانی بازده شاخص بورس داوجونز مورد بررسی قرار گرفته است. با انتخاب دو متغیر برون‌زا به عنوان متغیرهای آستانه، وجود ۴ رژیم در سری زمانی آزمون شده و سپس یک مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه به بازده شاخص بورس داوجونز برازش و پارامترهای آن براورد شده است.
کلمات کلیدی: مدل‌های اتورگرسیو آستانه‌ای، روش بوت استرپ، توزیع حدی، آزمون نسبت درستنمایی.

مقدمه

بسیاری از سری‌های زمانی مالی تحت تاثیر عوامل مختلف، دارای رفتار غیرخطی هستند. برای مدل سازی این‌گونه سری‌های زمانی معمولاً مدل‌های غیرخطی ممکن است گزینه مناسبی باشند. یکی از مدل‌های غیرخطی که بسیار مورد توجه قرار گرفته است مدل اتورگرسیو آستانه‌ای (TAR) است. این مدل به صورت قطعه‌ای خطی است، لذا بسیاری از ایده‌های مربوط به مدل‌های خطی قابل تعمیم به این نوع مدل می‌باشند. یک ویژگی مهم و جالب مدل TAR قابلیت آن در بخاطر سپردن دوره‌های تناوب نامعلوم و نامنظم است. تانگ و لیم (۱۹۸۰) مدلTAR را معرفی نمودند. تانگ (۱۹۹۰) بسیاری از جزئیات دیگر مدل TAR را ارائه و از این مدل برای پیش‌بینی نوسانات قیمت سهام استفاده نمود. بسیاری ازمؤلفان مدل‌های TAR با یک متغیر آستانه را مورد استفاده قرار داده‌اند، در حالی‌که در بسیاری از برنامه‌های کاربردی تجربی، مدل با دو متغیر آستانه یا بیشتر ممکن است مناسب‌تر باشد. در این مقاله یک مدل TAR با دو متغیر آستانه برای مدل‌سازی بازده قیمت سهام شاخص بورس داوجونز مورد استفاده قرار گرفته است و همچنین قیمت‌های گذشته شاخص و حجم معاملات بازار به عنوان متغیرهای آستانه در نظر گرفته شده اند. هدف این است که در یک رهیافت تجربی روش‌های آزمون و براورد پارامترهای یک مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه را معرفی و با استفاده از دو متغیر برون‌زا به عنوان متغیرهای آستانه

یک مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دومتغیر آستانه را به سری زمانی بازده شاخص بورس داوجونز برازش و پارامترهای مدل را براورد نماییم.

در بخش ۲ مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه و شیوه براورد پارامترها معرفی شده است. در بخش ۳ آزمون نسبت درستنمایی برای تعیین تعداد رژیم‌ها و استفاده از روش بوت استرپ برای ارزیابی روش براورد تشریح شده است. بخش ۴ اختصاص به معرفی داده‌ها، متغیرهای آستانه و مقدارهای براورد شده دارد و در بخش آخر نیز نتیجه گیری بیان شده است.

مدل TAR با دو متغیر آستانه و شیوه براورد پارامترها

با استفاده از مقاله‌ی چِن و همکاران (۲۰۱۱) مدل اتورگرسیو آستانه‌ای با دو متغیر آستانه زیر را در نظر بگیرید که مشاهدات y_t در چهار رژیم طبقه‌بندی شده‌اند:

$$y_t=\sum_{j=1}^{4}\psi_t^{(j)}(\gamma^\circ)(\beta_\circ^{(j)}+\sum_{i=1}^{p_j}\beta_i^{(j)}y_{t-i}+u_t),\qquad (1)$$

که در آن $\psi_t^{(j)}(\gamma_\circ)$ تابع نشانگر است و برابر یک است اگر در شرط آستانه صدق کند. در غیر این صورت برابر صفر است. به ازای $j=1,2,3,4$ داریم:

$$\begin{aligned}\psi_t^{(1)}(\gamma^\circ)&=I(z_{1t}\le\gamma_1^\circ,z_{2t}\le\gamma_2^\circ),\\ \psi_t^{(2)}(\gamma^\circ)&=I(z_{1t}\le\gamma_1^\circ,z_{2t}>\gamma_2^\circ),\\ \psi_t^{(3)}(\gamma^\circ)&=I(z_{1t}>\gamma_1^\circ,z_{2t}\le\gamma_2^\circ),\\ \psi_t^{(4)}(\gamma^\circ)&=I(z_{1t}>\gamma_1^\circ,z_{2t}>\gamma_2^\circ).\end{aligned}$$

از سویی

$z_t=(z_{1t},z_{2t})$ بردار متغیرهای آستانه‌ای و $\gamma^\circ=(\gamma_1^\circ,\gamma_2^\circ)\in\Omega$ بردار پارامتر آستانه است که باید براورد شود و $\Omega=[\underline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_1]\times[\underline{\gamma}_2,\overline{\gamma}_2]$ زیر مجموعه‌ای از تکیه‌گاه z_t است. $p_j(j=1,2,3,4)$ مرتبه‌ی اتو رگرسیو در هر رژیم است. $\beta^{(j)}=(\beta_\circ^{(j)},\beta_1^{(j)},...,\beta_{p_j}^{(j)})$ پارامترهای ساختاری هستند و برای برخی $i\neq j$ داریم $\beta^{(i)}\neq\beta^{(j)}$.

درون هر رژیم یک مدل اتورگرسیو خطی قرار دارد. متغیرهای آستانه‌ای z_{1t} و z_{2t} می‌توانند متغیرهای برونزا یا توابعی از تاخیرهای y_t باشند. با در نظر گرفتن $\{y_t,z_t\}_{t=1}^T$، هدف براورد پارامترهای آستانه γ و پارامترهای ساختاری $\beta^{(j)}$ است. بدون از دست دادن کلیت،

به ازای $j=1,2,3,4$ فرض می‌کنیم $p=\max\{p_j\}$ و برای $\beta_q^{(j)}=\circ,q>p_j$.

برای ساده شدن محاسبات، مدل (۱) را به می‌توان به شکل ماتریسی

$$Y=\sum_{j=1}^{4}I_j(\gamma^\circ)X\beta^{(j)}+U,\qquad (2)$$

نوشت که در آن

$$X=\begin{pmatrix}1 & y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p}\\ 1 & y_{T-2} & y_{T-3} & \cdots & y_{T-p-1}\\ & & \cdots & & \\ 1 & y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1\end{pmatrix}$$

به‌طوری‌که X یک ماتریس $(T-p)\times(p+1)$ و همچنین $I_j(\gamma^\circ)=diag\{\psi_T^{(j)}(\gamma_\circ),\psi_{T-1}^{(j)}(\gamma_\circ),...,\psi_{p+1}^{(j)}(\gamma_\circ)\}$ و

$$Y=(y_T,y_{T-1},...,y_{p+1})',U=(u_T,u_{T-1},...,u_{p+1})'.$$

مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) y_t مانای ارگودیک است و $E(y_t^4)<\infty$.

۲) $\{u_t\}$ دنباله‌ای از خطاهای مستقل و هم‌توزیع با توزیع نرمالی با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند.

۳) متغیرهای آستانه z_{1t} و z_{2t} اکیداً مانا هستند و توزیع توام پیوسته $F(\gamma)$ را دارند که نسبت به هردو متغیر مشتق پذیر است. فرض کنید $f(\gamma)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی توأم باشد و $f_i(\gamma)=\frac{\partial F(\gamma)}{\partial\gamma_i}$. فرض می‌کنیم که $\circ<f_i(\gamma)\le\overline{f_i}<\infty$ برای $i=1,2$. این مفروضات برای سازگاری براورد مقادیر آستانه لازم می‌باشند. با فرض

معلوم بودن $\gamma = (\gamma_۱, \gamma_۲)$، براوردگر حداقل توان‌های دوم (CLS) برای $\beta^{(j)}$ به صورت

$$\hat{\beta}^{(j)}(\gamma) = (X' I_j(\gamma) X)^{-۱} X' I_j(\gamma) Y \qquad (۳)$$

و مجموع توان دوم باقیمانده به شکل

$$RSS_T(\gamma) = || \sum_{j=۱}^{۴} I_j(\gamma^\circ) X \beta^{(j)} + U - \sum_{j=۱}^{۴} I_j(\gamma) X \hat{\beta}^{(j)}(\gamma) ||^۲$$

است. براوردگر γ° را به عنوان مقداری که $RSS_T(\gamma)$ را مینیمم می‌کند به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\gamma} = arg \min_{\gamma \in \Omega} RSS_T(\gamma). \qquad (۴)$$

براوردگرهای ساختاری مبتنی بر مقادیر آستانه به، به صورت

$$\hat{\beta}^{(j)}(\hat{\gamma}) = (X' I_j(\hat{\gamma}) X)^{-۱} X' I_j(\hat{\gamma}) Y. \qquad (۵)$$

هستند. می‌توان نشان داد که براوردگرهای $(\hat{\gamma}_۱, \hat{\beta}^{(j)}(\hat{\gamma}))$ سازگار هستند.

آزمون و براورد آستانه

برای تعیین تعداد رژیم‌ها، ابتدا فرض صفر را بدون اثر آستانه به صورت $H_\circ : \beta^{(۱)} = \beta^{(۲)} = \beta^{(۳)} = \beta^{(۴)}$. در نظر می‌گیریم تحت فرض صفر، تنها یک رژیم وجود دارد. آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت

$$J_T = max_{\gamma \in \Omega} (T-p) \frac{\tilde{\sigma}^۲ - \hat{\sigma}^۲(\gamma)}{\hat{\sigma}^۲(\gamma)}. \qquad (۶)$$

تعریف می‌شود که $(T-p)\tilde{\sigma}^۲$ مجموع توان دوم تحت فرض صفر است، در حالیکه $(T-p)\hat{\sigma}^۲(\gamma)$ مجموع توان دوم باقیمانده تحت فرض مقابل است. اگر $H_\circ$ رد نشود، پس مدل یک مدل اتورگرسیو AR ساده است. رد فرض صفر بیان می‌کند که بیش از یک رژیم در مدل وجود دارد. براوردگر آستانه به صورت $\hat{\gamma} = arg \min \hat{\sigma}^۲(\gamma) = arg \max J_T(\gamma)$ تعریف می شود. چون γ تحت فرض صفر نامعلوم است پس توزیع مجانبی $J_T(\hat{\gamma})$ خی‌دو $(\chi^۲)$ استاندارد نیست. هَنسن (۱۹۹۶) نشان داد که توزیع مجانبی با روش بوت‌استرپ زیر تقریب زده می‌شود.

فرض کنید $u_t^*; (t = ۱, ..., T)$ ها مستقل و هم‌توزیع نرمال استاندارد ($N(\circ, ۱)$) باشند. $y_t^* = u_t^*$ را محاسبه، سپس y_t^* را روی $x_t = (۱, y_{t-۱}^*, y_{t-۲}^*, ..., y_{t-p}^*)$ رگرس می‌کنیم و $J_T^*(\gamma) = (T-p)\frac{\tilde{\sigma}^{*۲} - \hat{\sigma}^{*۲}(\gamma)}{\hat{\sigma}^{*۲}(\gamma)}$ را محاسبه و سرانجام $J_T^* = \max_{\gamma \in \Omega} J_T^*(\gamma)$ را بدست می آوریم. توزیع J_T^* تحت فرض صفر، همگرایی ضعیف در احتمال به توزیع J_T دارد. بنابراین می‌توان مقدار بوت‌استرپ J_T^* را برای تقریب توزیع مجانبی (تحت فرض صفر) J_T استفاده کرد. برای تعیین تعداد رژیم‌ها از یک رویکرد کل به جزء استفاده می شود. ابتدا مدل دارای سه رژیم در مقابل‌مدل دارای چهار رژیم آزمون می‌شود. هر کدام از فرض‌های

$$\begin{array}{llll} (I) & H_\circ : \beta^{(۱)} = \beta^{(۲)} & (II) & H_\circ : \beta^{(۱)} = \beta^{(۳)} \\ (III) & H_\circ : \beta^{(۱)} = \beta^{(۴)} & (IV) & H_\circ : \beta^{(۲)} = \beta^{(۳)} \\ (V) & H_\circ : \beta^{(۲)} = \beta^{(۴)} & (VI) & H_\circ : \beta^{(۳)} = \beta^{(۴)} \end{array}$$

را در مقابل فرض مقابل وجود ۴ رژیم آزمون می کنیم.

برای انجام آزمون فرض‌های دو تایی بالا از آزمون نسبت درستنمایی مشابه (۶) و شیوه بوت استرپ استفاده می‌شود.

در بررسی‌های تجربی، مرتبه اتورگرسیو، مقادیر آستانه و ضرایب مدل با یک الگوریتم ساده به این ترتیب براورد می‌شوند. در گام اول یک مدل TAR مرتبه اول براورد و سپس براورد اولیه برای براورد مقادیر آستانه ($\hat{\gamma}_t$) مورد استفاده قرار می‌گیرد. در گام دوم به شرط مقادیر آستانه بدست آمده از گام اول، معیار اطلاع آکائیکه (AIC) به منظور انتخاب مرتبه‌ی اتورگرسیو در هر رژیم به کار می‌رود (تی‌سِی،۱۹۹۸). در گام سوم برای تعیین تعداد رژیم‌ها آزمون نسبت درستنمایی ترتیبی(متوالی) اجرا می‌شود. در گام چهارم نتیجه بدست آمده از گام سوم برای اصلاح مقادیر آستانه به کار می‌رود و گام دوم و سوم را تا زمانی که همه‌ی براوردگرها همگرا

شوند تکرار می‌شود.

داده‌ها و براوردها

مدل پیشنهادی، به سری‌های بازده روزانه شاخص داوجونز برازش شده است. دوره نمونه از ۱ ژانویه سال ۲۰۰۲ تا ۳۱ دسامبر سال ۲۰۱۲ می‌باشد. سری‌های بازده به عنوان تفاضل لگاریتمی شاخص داوجونز تعریف و با y_t نشان داده می‌شوند. بیش از ۲۷۰۰ مشاهده در نمونه وجود دارد. دو متغیر آستانه برون زا مشابه با گِرانویل (۱۹۶۳)، لی و سوامیناتان (۲۰۰۰) تعریف شده‌اند. اولین و دومین متغیر آستانه به صورت

$$Z_{۱t} = \frac{P۲۰_t}{P۲۵۰_t}, \quad Z_{۲t} = \log(V_{t-۱}) - V۲۵۰_{t-۱},$$

تعریف مي‌شوند و

$$P۲۵۰_t = \frac{\sum_{j=۱}^{۲۵۰} P_{t-j}}{۲۵۰}, \quad P۲۰_t = \frac{\sum_{j=۱}^{۲۰} P_{t-j}}{۲۰}.$$

$P۲۰_t$ و $P۲۵۰_t$ به ترتیب متوسط قیمت برای ۲۵۰ و ۲۰ روز معاملاتی گذشته هستند.از طرفی $V۲۵۰_t = \frac{\sum_{j=۱}^{۲۵۰} \log(V_{t-j})}{۲۵۰}$، که V_t حجم معاملات بازار در زمان t است. مدل برازش شده در زیر نشان داده شده است. رژیم I بازده بالا وباثبات، رژیم II بازده کم و نوسانی و رژیم III رژیم خنثی را نشان می دهد.

$$\begin{array}{lll}
z_{۱t} > ۰/۲۷, z_{۲t} < ۰/۹۲ & y_t = ۰/۰۰۰۳ - ۰/۰۶۶x_{t-۱} + ۰/۰۲۰x_{t-۲} & I \\
 & -۰/۰۲۴x_{t-۳} - ۰/۰۰۲x_{t-۴} - ۰/۰۶۴x_{t-۵} & \\
z_{۱t} < ۰/۲۷, z_{۲t} > ۰/۹۲ & y_t = ۰/۰۰۰۵ - ۰/۰۵x_{t-۱} - ۰/۲۷x_{t-۲} & \\
 & +۰/۲۳x_{t-۳} & II \\
 & y_t = -۰/۰۰۱ - ۰/۲۳x_{t-۱} & III
\end{array}$$

نتایج

معمولاً مدل‌های آستانه‌ای متعارف تنها شامل یک متغیر آستانه هستند. یک مدل اتورگرسیو با دو متغیر آستانه مورد بررسی قرار گرفته است. از آزمون نسبت درستنمایی برای تشخیص اثر آستانه استفاده شده است. مدل پیشنهادی برای شناسایی رژیم‌های بازار سهام داوجونز به‌کار رفته است. دو متغیر برون زا به عنوان متغیرهای آستانه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که بازده شاخص داوجونز را می‌توان در سه رژیم، رژیم با بازده بالا و باثبات، رژیم با بازده پایین و نوسانی و یک رژیم خنثی طبقه‌بندی کرد. می‌توان مبانی نظری و عملی پیش‌بینی با این‌گونه مدل‌ها را در پژوهش‌های آتی مورد مطالعه قرار داد.

مراجع

References

[1] Chen, H. Chong, T. T and Bai, J.(2012). Theory and applications of TAR model with two threshold variables. Econometric Reviews, 31(2):142-170 .

[2] Granville, J. (1963). Granvilles New Key to Stock Market Profits. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[3] Hansen, B. E. (1996). Inference when a nuisance parameter is not identified under the nullhypothesis. Econometrica 64: 413-430.

[4] Lee, M. C., Swaminathan, B. (2000). Price momentum and trading volume. Journal of Finance IV: 2017-2069.

[5] Tong,H. (1990). Non-linear time series:a dynamical system approach.Oxford University Press.

[6] Tong, H. and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycle and cyclical data. J. R. Statistic. Soc.42(B), 245-292.

[7] Tsay, R. S. (1998). Testing and modeling multivariate threshold models. J. Amer. Statist. Assoc. 93:1188-1202.