روش محلی جواب‌های خاص تقریبی برای معادلات ناپایدار دو بعدی برگر

جواد اکبری ، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، javad.akbari@birjand.ac.ir

ابوالفضل عبداله زاده ، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، aboalfazl.zadeh@yahoo.com

امین کرابی ، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه دامغان، amin.karrabi۱۹۸۷@gmail.com.com

چکیده: روش محلی جواب‌های خاص تقریبی $(LMAPS)$ اولین بار برای معادلات برگر پیشنهاد شد. در اجتناب از مسائل بدوضع، ضرایب وزن ترکیب خطی، با توجه به مقادیر تابع و مشتقاتش، می‌توانند با حل سیستم خطی کم مرتبه درون دامنه‌ی محلی حاصل شوند. سپس جواب‌های سراسری با فرموله‌کردن ماتریس محلی در ماتریس سراسری و تنک حاصل شوند. سیستم‌های خطی تنک و بزرگ نتیجه‌شده، به جای استفاده از روش تکراری پیچیده، به طور مستقیم حل شده‌اند. آزمایش‌های عددی نشان داده‌اند که روش پیشنهادی برای حل معادلات ناپایدار دو بعدی برگر از دقت و کارایی بالایی برخوردار می‌باشند.

کلمات کلیدی: توابع پایه شعاعی $(RBFs)$، جواب‌های خاص، روش بدون شبکه، روش محلی، معادلات برگر.

مقدمه

معادلات برگر یک مدل سودمند برای بسیاری از مسائل جذاب فیزیکی می‌باشند. روش‌های عددی بسیاری همچون روش تفاضلات متناهی (FDM)، روش عناصر متناهی (FEM) و روش عناصر مرزی (BEM) معرفی شده بودند که به طور موفق قادر به حل معادلات برگر بودند. این درحالی است که روش‌های بدون شبکه در دو دهه‌ی گذشته، به خاطر توانایی‌شان در بکاربردن داده‌های پراکنده بدون استفاده از شبکه‌بندی، توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده است.

به طور معمول، یک روش سراسری با استفاده از یک تعداد نقطه‌ی هم‌مکانی در تمام دامنه شکل می‌گیرد که ماتریس حاصل از این روش کامل و متراکم می‌باشد. این موضوع مانع استفاده از روش‌های مبتنی بر تابع پایه شعاعی برای حل مسائل بزرگ‌مقیاس می‌باشد. برخی از تکنیک‌های جدید برای دور زدن این مشکل پیشنهاد شده‌اند که می‌توان به تجزیه‌ی دامنه [۳]، فرمول‌بندیهای محلی‌شده [۴]، تکنیک‌های بسط چندقطبی سریع [۵] و غیره اشاره کرد. در بین این تکنیک‌های جدید، طرح محلی مبتنی بر درون‌یابی محلی به نظر می‌رسد در سروکار داشتن با یک تعداد زیاد از نقاط هم‌مکانی کارامدتر باشد. هدف از

این مقاله، نشان دادن قابلیت و فرمول‌بندی روش محلی‌شده‌ی جدید $LMAPS$، برای حل معادلات دو بعدی غیرخطی ناپایدار برگر می‌باشد.

فرمول‌بندی $LMAPS$ برای معادلات تراکم‌پذیر برگر

سیستم معادلات دو بعدی ناپایدار برگر دو متغیره‌ی:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \quad (2)$$

با شرایط اولیه‌ی:

$$\begin{aligned} u(x,y,t_0)&=\varphi_1(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,\\ v(x,y,t_0)&=\varphi_2(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

و شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}u(x,y,t)&=\varphi_3(x,y,t), \quad (x,y)\in\partial\Omega,\\ \mathcal{B}v(x,y,t)&=\varphi_4(x,y,t), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

را در نظر می‌گیریم که Re عدد رینولدز، $\mathcal{B}$ عملگر دیفرانسیل مرزی و u و v نمایانگر مولفه‌های سرعت در جهت‌های x و y می‌باشند.

تقریب محلی مشتقات

ماتریس درون‌یاب بدوضع و ماتریس متراکم با مقیاس بزرگ، مانعی برای توسعه‌ی روش‌های بدون شبکه‌ی مبتنی بر RBF می‌باشند. برای کاستن از این مشکلات، طرح‌های محلی مبتنی بر دامنه‌ی با محمل محلی [1]، با توجه به اینکه حساسیت کمتری به تغییرات در پارامترشکل دارند و از مشکل بدوضعی اجتناب می‌کنند، کارامدتر به نظر می‌رسند.

فرض کنیم $\{X_j\}_{j=1}^{n_s}$ نقاط درونیاب درونی دامنه حامی[2] باشند. برای هر نقطه‌ی X_p، دامنه‌ی حامی Ω_p، شامل نزدیکترین n_s نقطه‌ی درونیاب $\{X_j\}_{j=1}^{n_s}$ به X_p می‌باشد. مقدار یک تابع $f(X_p)$ می‌تواند بوسیله‌ی یک ترکیب خطی از n_s مقدار تابع، به فرم زیر تقریب زده شود:

$$f(X_p)\simeq\hat{f}(X_p)=\sum_{j=1}^{n_s}a_j\Phi\left(\|X_p-X_j\|\right), \quad X_P\in\Omega_p, \quad (5)$$

که در آن

$$\Delta\Phi(\|X-X_j\|)=\phi(\|X-X_j\|), \quad (6)$$

که $\|.\|$، نرم اقلیدسی و $\phi(\|X-X_j\|)$ توابع پایه شعاعی می‌باشند. تابع MQ را به خاطر تخمین بسیار دقیق آن، برای انتخاب تابع پایه شعاعی ترجیح می‌دهیم. این تابع به طور گسترده توسط محققان مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع پایه شعاعی MQ نرمال‌شده، می‌تواند به فرم:

$$\phi(\|X-X_j\|)=\sqrt{(\bar{x}-\frac{x_j}{R_i})^2+(\bar{y}-\frac{x_j}{R_i})^2+\bar{c}^2}, \quad (7)$$

باشد که $\bar{x}=\frac{x}{R_j}$، $\bar{y}=\frac{y}{R_j}$، (x,y) معرف مختصات یک نقطه در دامنه‌ی حامی در فضای فیزیکی، $(\bar{x},\bar{y})$ معرف مختصات در یک دایره‌ی واحد و R_j شعاع کوچکترین دایره‌ی محیطی تمام نقاط در ناحیه‌ی حامی برای گره X_j می‌باشد. توجه کنیم که پارامتر شکل c تابع $MQ-RBFs$ مرسوم، برابر $\bar{c}R_j$ می‌باشد. مقدار c در دقت تقریب بسیار مهم است. خطاها و عددشرطی یک ماتریس به تعداد نقاط در دامنه‌ی حامی، مقیاس دامنه‌ی حامی و توزیع نقاط حامی بستگی دارد. با تبدیل

[1] local supporting domain
[2] influence domain

بالا، ناحیه‌ی حامی محلی به یک دایره‌ی واحد تبدیل می‌شود. در اجرا، یکبار $\bar{c}$ به عنوان یک ثابت انتخاب می‌شود. با انتگرالگیری مستقیم از معادله‌ی (۶) داریم:

$$\Phi(r) = \frac{1}{3}c^2\phi(r)+\frac{1}{9}\phi(r)^3-\frac{c^3}{3}ln(c+\phi(r)), \qquad (8)$$

که $r = \|X - X_j\|$ می‌باشد. معادله‌ی (۵) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\hat{f}(X_p) = \mathbf{\Psi_{n_s} a_{n_s}}, \qquad (9)$$

که $\Psi_{n_s} = [\Phi(\|X_p - X_1\|), ..., \Phi(\|X_p - X_{n_s}\|)]$
و

$\mathbf{a_{n_s}} = [a_1, a_2, ..., a_{n_s}]^T$.

چون $\{X_j\}_{j=1}^{n_s} \subset \Omega_p$، معادله‌ی (۵) برای هر گره $\{X_j\}_{j=1}^{n_s} \subset \Omega_p$ برقرار می‌باشد. بنابراین ضرایب بسط a_j با حل یک سیستم خطی در فرم ماتریسی زیر تعیین می‌شوند:

$$\mathbf{\Phi_{n_s} a_{n_s}} = \mathbf{\hat{f}_{ns}}, \qquad (10)$$

که

$$\mathbf{\hat{f}_{n_s}} = \left[\hat{f}(X_1), ..., \hat{f}(X_{n_s})\right]$$

و

$\mathbf{\Phi_{n_s}} = [\Phi(\|X_p - X_j\|)]_{1\le i,j\le n_s}$.

ضرایب بردار $\mathbf{a_{n_s}}$ می‌توانند از معادله‌ی (۱۰) به صورت زیر بدست آیند:

$$\mathbf{a_{n_s}} = \mathbf{\Phi_{n_s}^{-1}\hat{f}_{n_s}}. \qquad (11)$$

همچنین اولین مشتق $\frac{\partial f(X_p)}{\partial x_k}$ می‌تواند توسط:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(X_p)}{\partial x_k} &\simeq \frac{\partial \hat{f}(X_p)}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n_s} a_j \Phi_{x_k}(\|X_p - X_j\|) \\ &= \mathbf{\Xi_{n_s} a_{n_s}}, \quad X_p \in \Omega_p \qquad (12)\end{aligned}$$

،

تعیین شود که $\mathbf{\Xi_{n_s}} = [\Phi_{x_k}(\|X_p - X_1\|), ..., \Phi_{x_k}(\|X_p - X_{n_s}\|)]$، x_k معرف k امین جهت مختصات و Φ_{x_k} اولین مشتق جزئی با توجه به x_k برای Φ می‌باشد که می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\Phi_{x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{1}{3}\left[c^2 + \phi(r)^2 - \frac{c^3}{c+\phi(r)}\right]\frac{x_k - x_k^j}{\phi(r)}. \qquad (13)$$

بطور مشابه، مشتق دوم $\Delta f(X_p)$ می‌تواند به فرم زیر تقریب‌زده شود:

$$\begin{aligned}\Delta f(X_p) &\simeq \Delta\hat{f}(X_p) = \sum_{j=1}^{n_s} a_j \phi(\|X_p - X_j\|) \\ &= \mathbf{\Theta_{n_s} a_{n_s}}, \quad X_p \in \Omega_p,\end{aligned} \qquad (14)$$

که $\mathbf{\Theta_{n_s}} = [\phi(\|X_p - X_1\|), ..., \phi(\|X_p - X_{n_s}\|)]$. با جانشانی معادله‌ی (۱۱) در معادلات (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$\frac{\partial \hat{f}(X_p)}{\partial x_k} = \left(\mathbf{\Xi_{n_s}\Phi_{n_s}^{-1}}\right)\mathbf{\hat{f}_{n_s}} \qquad (15)$$

و

$$\Delta\hat{f}(X_p) = \left(\mathbf{\Theta_{n_s}\Phi_{n_s}^{-1}}\right)\mathbf{\hat{f}_{n_s}}. \qquad (16)$$

به نظر می‌رسد که تقریب‌های مشتقات مکانی [3] براساس $RBFs$ درون دامنه‌ی حامی محلی که شامل یک مجموعه از نقاط توزیع‌شده‌ی دلخواه می‌باشد، توسعه داده شده‌اند. آن نیازمند به جستجوی نزدیکترین نقاط همسایگی برای معرفی یک دامنه‌ی حامی محلی برای نقطه‌ی داده شده می‌باشد.

[3] Spatial

گسسته‌سازی معادلات برگر

با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶)، معادلات حاکم (۱) و (۲) به فرم زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\frac{du_i^{(n)}}{dt} = \frac{1}{Re}\sum_{j=1}^{n_s} a_{ij} u_j^{(n)} - \left(u_i^{(n)} \sum_{j=1}^{n_s} c_{ij} u_j^{(n)} + v_i^{(n)} \sum_{j=1}^{n_s} b_{ij} u_j^{(n)} \right), \tag{۱۷}$$

،

$$\frac{dv_i^{(n)}}{dt} = \frac{1}{Re}\sum_{j=1}^{n_s} a_{ij} v_j^{(n)} - \left(u_i^{(n)} \sum_{j=1}^{n_s} c_{ij} v_j^{(n)} + v_i^{(n)} \sum_{j=1}^{n_s} b_{ij} v_j^{(n)} \right), \tag{۱۸}$$

که n شاخص گام زمانی و n_s تعداد نقاط درونیاب درون دامنه‌ی حامی محلی Ω_i برای هر نقطه‌ی $X_i \in \Omega, i = 1, 2, ..., N$ می‌باشد.
توجه کنیم که ضرایب a_{ij}، b_{ij} و c_{ij} در معادلات (۱۷) و (۱۸) می‌توانند توسط ضرایب ماتریس در معادلات (۱۵) و (۱۶) محاسبه شوند. هنگامیکه ضرایب وزن بدست آمد، ما دوباره ضرایب ماتریس محلی را بفرم سراسری و تنک، با جایگذاری صفرها در جای مناسب فرمولبندی می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به [۱، ۲] مراجعه کنید. بنابراین ما گسسته‌سازی زیر را برای معادلات وابسته‌به‌زمان (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{dU^{(n)}}{dt} = \frac{1}{Re} AU^{(n)} - (UC + VB)U^{(n)} \tag{۱۹}$$

$$\frac{dV^{(n)}}{dt} = \frac{1}{Re} AV^{(n)} - (UC + VB)V^{(n)} \tag{۲۰}$$

که A، B و C ماتریس های تنک $N \times N$، U و V بردارهایی $N \times 1$ و U و V ماتریس‌های قطری $N \times N$ هستند که عناصر قطری آنها از عناصر بردارهای U و V بدست می‌آیند. معادلات حاصل می‌توانند با اجرای دقیق شرایط مرزی حل‌شوند.

نتایج

در این مقاله، یک روش تابع پایه شعاعی محلی برای حل معادلات ناپایدار دو بعدی برگر توسعه داده شد. به منظور غلبه کردن بر ناپایداری در مسائل بدوضع، ضرایب وزن می‌توانند با حل سیستم خطی مرتبه پایین‌تر درون دامنه‌ی حامی محلی بدست آیند. مقایسه‌ی نتایج عددی بدست‌آمده با جواب تحلیلی متناظرش نشان می‌دهدطرح عددی پیشنهادشده از دقت بسیار بالایی برخوردار است.

مراجع

[1] C.S. Chen, C.M. Fan, P.H. Wen, The method of particular solutions for solving elliptic problems with variable coefficients, Int. J. Comput. Methods 8(2011) 545–559.

[2] Guangming Yao, C.S. Chen, Joseph Kolibal, A localized approach for the method of approximate particular solutions, Comput. Math. Appl. 61 (2011)2376–2387.

[3] E.J. Kansa, Y.C. Hon, Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions, comput. Math. Appl. 39 (7–8) (2000) 123–137.

[4] C.K. Lee, X. Liu, S.C. Fan, Local multiquadric approximation for solving boundary value problems, Comput. Mech. 30 (2003) 396–409.

[5] R.K. Beatson, L. Greengard, A short course on fast multipole methods, in: M. Ainsworth, J. Levesley, W. Light, M. Marletta (Eds.), Oxford University Press, 1997, pp. 1–37.