

# مسئله مکان‌یابی p-هاب با ظرفیت نامتناهی\* در حضور صف

## M/G/1

معصومه رضازاده، دانشجوی کارشناسی ارشد، masoome.rezazade@yahoo.com

مهدی زعفرانیه، عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری، mehdi.zaferanieh@gmail.com

محمود امین‌طوسی، عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری، m.amintoosi@hsu.ac.ir

**چکیده:** مسئله مکان‌یابی هاب (HLP) <sup>۱</sup> یک تعمیم نسبتاً جدید از مسائل مکان‌یابی است. این مسائل با پیدا کردن مکان‌های هاب و تخصیص نقاط تقاضا به این مکان‌ها سرو کار دارد. ما هاب‌ها را که بخش‌های پر ازدحام شبکه هستند، همانند یک صف M/G/1 مدل‌بندی می‌کنیم. در این مقاله ابتدا یک برنامه‌ریزی غیر خطی با محدودیت‌های خطی برای مسئله نمایش می‌دهیم که زمان کلی حمل و نقل بین گره‌های شبکه را مینیمم می‌کند، سپس این مسئله را با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل می‌کنیم و با الگوریتم جستجوی ممنوعه مقایسه می‌کنیم. **کلمات کلیدی:** مسئله مکان‌یابی هاب، نظریه صف‌بندی، متوسط زمان تأخیر در صف

### مقدمه

مسئله شبکه هاب و پره <sup>۲</sup> به صورت زیر توصیف می‌شود: یک شبکه از گره‌هایی که هر جفت داری یک جریان هستند، تعیین مجموعه‌ای از هاب‌ها از میان گره‌های شبکه که هر واحد جریان در ابتدا از میان یک یا دو هاب قبل از رسیدن به گره مقصد عبور می‌کند که هاب‌ها به طور کامل به هم متصل هستند و گره‌های غیر هاب فقط به یک هاب تخصیص می‌یابند، گره‌های غیر

هاب یا نقاط تقاضا، پره نامیده می‌شوند. این مسائل مفید بودن حرکت روی یال‌های بین هاب‌ها را از نظر معیارهای اقتصادی تفسیر می‌کند. مسئله مکان‌یابی هاب ابتدا توسط اوکیلی <sup>۳</sup> [؟] فرمول‌بندی شد. صف مکانی است که متقاضیان برای اخذ سرویس مراجعه می‌کنند و با سیستم‌هایی در ارتباط است که در آن‌ها ورود مشتریان و هم‌چنین سرویس دهی به آن‌ها حالت تصادفی دارد. به هنگام ورود مشتری به سیستم، ارائه خدمت به مشتری جدید در صورت

Uncapacitated allocation p-hub location problem\*  
hub location problem<sup>۱</sup>  
spoke<sup>۲</sup>  
O'Kelly<sup>۳</sup>

بیکار بودن حداقل یکی از سرویس دهندگان آغاز می شود و در صورت مشغول بودن تمام سرویس دهندگان، مشتری جدید بایستی در صف منتظر بماند. از جمله کاربردهای نظریه صف بندی و مسائل هاب می توان به حرکت مسافران هواپیما و ارسال پیام در شبکه های ارتباطات از راه دور اشاره کرد. یکی از سیستم های صف، صف  $M/G/1$  است که در آن  $M$  نشان دهنده توزیع نمایی متغیر تصادفی زمان بین دو ورود متوالی و  $G$  توزیع دلخواه متغیر تصادفی مدت زمان سرویس دهی است. این سیستم دارای یک سرویس دهنده با ظرفیت صف نامتناهی است که براساس نظم اول ورود-اول سرویس دهی<sup>۴</sup> عمل می کند.

مارینو<sup>۵</sup> و سِرا<sup>۶</sup> [۲] در سال ۲۰۰۳ مسئله مکان یابی هاب در شبکه های خطوط هواپیمایی را در حضور صف  $M/D/c$  در مکان هر هاب مدل بندی کردند. محمدی<sup>۷</sup> و جولایی<sup>۸</sup> [۳] در سال ۲۰۱۱ به مدل بندی و حل مسئله مکان یابی پوششی هاب در حضور صف  $M/M/c$  در مکان هر هاب پرداختند. در بخش ۱، یک مدل برنامه ریزی غیر خطی برای مسئله معرفی می کنیم. بخش ۲، شامل توضیح مختصری از الگوریتم ژنتیک است. مثال های عددی در بخش ۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## بخش یک

یک گراف  $G = (N, E)$  با مجموعه گره  $N$  داده شده که هر گره متناظر با مکان های مبدأ، مقصد و هاب های مکان یابی شده است و مجموعه  $E$  یال های

بین گره های شبکه داده شده است. فرض کنید  $h_{ij}$  کسری از جمعیت مشتری هایی است که قصد دارند از گره  $i$  به گره  $j$  منتقل شوند که  $\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} h_{ij} = 1$ . همچنین  $t_{ij}$  مدت زمان لازم برای انتقال هر واحد جریان از گره  $i$  به گره  $j$  است. مسیر از گره مبدأ  $i$  به گره مقصد  $j$  شامل سه قسمت است: (۱) جمع آوری از گره مبدأ  $i$  به هاب  $k$  (۲) انتقال بین هاب  $k$  و هاب  $m$  و (۳) توزیع از هاب  $m$  به گره مقصد  $j$ . مدت زمان حرکت برای هر واحد جریان در مسیر  $(i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j)$  به صورت  $xt_{ik} + at_{km} + \delta t_{mj}$  نوشته می شود که  $x$  و  $\alpha$  و  $\delta$  به ترتیب هزینه های جمع آوری، انتقال و توزیع هستند. که  $\alpha < 1$  به عنوان یک ضریب کاهش برای مدت زمان حرکت روی یال های بین هاب ها در نظر گرفته می شود، و  $x = \delta = 1$  فرض می شود.

علاوه بر آن فرض می کنیم مشتریان واقع در گره های مبدأ برای دریافت سرویس و رسیدن به گره مقصد به طور تصادفی برحسب یک فرایند پواسن زمان-همگن با نرخ ورود  $\lambda_i = \lambda \sum_{j \in N} h_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$  و متوسط آهنگ ورود  $\lambda = \sum_{i \in N} \lambda_i$  به مکان هایی که به آن تخصیص داده شده اند وارد می شوند و در صورت مشغول بودن سرویس دهنده، تقاضای بی پاسخ وارد صفی می شوند که برحسب نظم اول ورود-اول سرویس دهی است که این صف از نوع  $M/G/1$  است. با این فرضیات کل زمان صرف شده در سیستم را می توان به دو بخش تقسیم کرد: (۱) مجموع مدت زمان حرکت روی یال های شبکه (۲) مجموع متوسط زمان تأخیر در صف  $M/G/1$  که در مکان هر هاب تشکیل شده است. مدت زمان تأخیر در صف همان مدت زمان انتظار در صف است. اما مدت زمان سرویس دهی به

First come first service<sup>۴</sup>

Marinov<sup>۵</sup>

Serra<sup>۶</sup>

Mohammadi<sup>۷</sup>

Jolai<sup>۸</sup>

expected queueing delay<sup>۹</sup>

زیر مدل بندی خواهد شد:

مشتریان گره مبدأ  $i$  برای انتقال از هاب  $k$  به هاب  $m$  به صورت زیر است:

$$S_{i,k,m} = \alpha t_{km} + w_i + \alpha t_{mk} \quad \forall i, k, m$$

که در آن  $t_{km}$  مدت زمان حرکت از هاب  $k$  به هاب  $m$  و  $w_i$  مدت زمان سرویس دهی در حالت سکون به مشتریان گره مبدأ  $i$  در محل هاب  $k$  و  $m$  و  $t_{mk}$  مدت زمان حرکت برگشت سرویس دهنده مکان هاب  $k$  از مکان هاب  $m$  است، که ما مدت زمان رفت و برگشت را برابر فرض می کنیم.

حال گشتاورهای اول  $\bar{S}_{k,m}(X)$  و دوم  $\bar{S}^2_{k,m}(X)$  زمان سرویس دهی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{S}_{k,m}(X) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} h_{ij} \bar{S}_{i,k,m} X_{ik} X_{jm} \quad \forall k, m$$

$$\bar{S}^2_{k,m}(X) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} h_{ij} (\bar{S}_{i,k,m})^2 X_{ik} X_{jm} \quad \forall k, m$$

که در آن  $\bar{S}_{i,k,m} = 2\alpha t_{km} + \bar{w}_i$  و با توجه به رابطه بدست آمده برای متوسط زمان تأخیر در صف [؟] می توان رابطه متوسط زمان تأخیر در محل هر هاب را که دارای یک صف M/G/1 است به صورت زیر نوشت:

$$\bar{Q}_k(X) = \begin{cases} \sum_{m \in N} \frac{\lambda (\bar{S}_{k,m}(X))^2}{2(1 - \lambda \bar{S}_{k,m}(X))} & \forall k \in N \\ 1 - \lambda \bar{S}_{k,m}(X) > 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال مجموع متوسط زمان تأخیر در صف برای تمام مکان های هاب به صورت  $\bar{Q}(X) = \sum_{k \in N} \bar{Q}_k(X)$  خواهد بود. متغیر تصمیم  $X_{ik}$  ۱، است اگر گره  $i$  به هاب  $k$  متصل باشد و در غیر این صورت ۰ است، هر هاب به خودش تخصیص می یابد و اگر  $j$  یک هاب باشد آنگاه  $X_{jj} = 1$ . با این تعاریف مسئله (UApHLP) در حضور صف M/G/1 به صورت

$$\min \sum_i \sum_j h_{ij} \left( \sum_k t_{ik} X_{ik} + \sum_m t_{jm} X_{jm} + \alpha \sum_k \sum_m t_{km} X_{ik} X_{jm} \right) + \bar{Q}(X) \quad (1)$$

subject to

$$\sum_k X_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_k X_{kk} = p \quad (3)$$

$$X_{kk} - X_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k \in N \quad (4)$$

$$X_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \in N \quad (5)$$

تابع هدف در معادله (۱) مجموع زمان های حمل و نقل و مجموع متوسط زمان انتظار در صف های تشکیل شده در مکان هر هاب را مینیمم می کند. معادله (۲) یعنی هر پره بایستی فقط به یک هاب متصل باشد. معادله (۳) یعنی باید  $p$  هاب مکان یابی شود. معادله (۴) یعنی پره  $i$  به  $k$  متصل است اگر  $k$  یک هاب باشد. معادله (۵) به این معنی است که متغیرهای مسئله به صورت صفر و یک هستند.

## بخش دو

الگوریتم ژنتیک یک الگوریتم جستجو برای یافتن جواب های نزدیک به بهینه در اندازه های بزرگ است که اولین بار توسط هلند<sup>۱۰</sup> در سال ۱۹۷۵ ابداع و توسط گلدبرگ<sup>۱۱</sup> توسعه داده شد. این روش با در نظر گرفتن مجموعه ای از جواب های مسأله به عنوان جمعیت اولیه، در هر تکرار به نحو مؤثری نواحی مختلف فضای جواب را جستجو می کند و با شکل کد شده جواب ها (کروموزوم) سر و کار دارد. در این مسأله جمعیت اولیه ۵۰ کروموزوم باینری می باشد. در هر تکرار از الگوریتم، مقدار تابع هدف برای هر

Holland<sup>۱۰</sup>

Goldberg<sup>۱۱</sup>

کروموزوم از جمعیت محاسبه خواهد شد، سپس به هر کروموزوم یک عدد برازندگی نسبت داده می‌شود. بر اساس مقدار برازندگی مجموعه‌ای از کروموزوم‌ها به عنوان والدین در نظر گرفته می‌شوند و با اعمال عمل ترکیب بر روی آن‌ها، چند جواب برای جمعیت جدید به دست می‌آید. در حین اجرای الگوریتم، جهش‌ها و مهاجرت‌هایی برای بهبود انجام می‌شود [۴].

$\lambda-\alpha$	GA.f	Ta.f	GA.t	Ta.t
۰/۱-۰/۱	۱۳۸/۵۶	۷/۴۹	۱۳۸/۵۶	۱۰۴/۴۵
۰/۱-۰/۵	۳۲۴/۳۶	۷/۸۱	۳۲۴/۳۶	۱۰۵/۶۴
۰/۱-۰/۹	۴۲۵/۸	۶/۹۹	۴۲۵/۸	۹۶/۷۶
۰/۵-۰/۱	۳۶۶/۹۱	۶/۶۱	۳۶۶/۹۱	۹۹/۱۳
۰/۵-۰/۹	۲۸۱۳/۶	۶/۰۲	۲۸۱۳/۶	۱۰۹/۴۵
۰/۹-۰/۱	۵۴۴/۸۴	۷/۴۵	۵۴۴/۸۴	۱۰۱/۱۱

(۷)

### بخش سه

در این بخش ما یک شبکه با ۲۵ گره را در نظر گرفته و مسئله را با مقادیر مختلف  $\lambda$  و  $\alpha$  با استفاده از الگوریتم ژنتیک و جستجوی ممنوعه حل کرده و مقادیر تابع هدف و زمان محاسباتی هر دو الگوریتم را در جداول زیر که اولی به ازای  $p=7$  و دومی به ازای  $p=8$  قرار می‌دهیم و آن‌ها را تفسیر می‌کنیم. ما در حل این مسئله  $\bar{w}_i$  و  $\bar{w}_i^2$  را برای تمام گره‌ها ثابت و به ترتیب ۲۰ و ۲۵ تعریف می‌کنیم و مقدار جریان‌ها و مدت زمان حمل و نقل بین هر جفت گره به عنوان ورودی به مسئله اعمال شده‌اند.

$\lambda-\alpha$	GA.f	Ta.f	GA.t	Ta.t
۰/۱-۰/۱	۱۴۰/۵۵	۶/۶	۱۴۰/۵۵	۹۰/۹۴
۰/۱-۰/۵	۲۶۶/۵۳	۵/۸۳	۲۶۶/۵۳	۹۷/۳۵
۰/۱-۰/۹	۳۶۴/۹۱	۶/۷	۳۶۴/۹۱	۹۰/۵۹
۰/۵-۰/۱	۳۶۴/۰۲	۶/۴۹	۳۶۴/۰۲	۹۰/۰۳
۰/۵-۰/۹	۱۶۷۱/۲	۶/۶	۱۶۷۱/۲	۱۰۱/۱
۰/۹-۰/۱	۵۹۹/۵۷	۶/۷۴	۵۹۹/۵۷	۱۰۱/۲۶

(۶)

### نتایج

همانطور که مشاهده می‌کنیم، با افزایش نرخ ورود  $\lambda$  و ضریب کاهش  $\alpha$  مجموع مدت زمان حمل و نقل در کل شبکه افزایش می‌یابد. همچنین زمان محاسباتی الگوریتم ژنتیک بسیار کمتر از جستجوی ممنوعه است.

### مراجع

- [۱] inte- quadratic A M.O'kelly, of location the for program ger Eu- , facilities hub interacting Operational of Journal ropean Research ۳۲ (۱۹۸۷) ۳۹۳-۴۰۴.
- [۲] system. Queueing L.Kleinrock, [۲] Wiley- York: New II. volume ۱۹۷۶ Interscience.
- [۳] J.H.Jaramillo,J.Bhadury, loca- solve the On R.Bata, Computers problems, tion (۲۰۰۲) ۲۹ Research Operations ۷۶۱-۷۷۹.

---

Location D.Serra, V.Marianov, [۴]  
behaving hubs airline for models  
Computers queues, M/D/c as  
(۲۰۰۳)۳۰ Research Operations  
۹۸۳-۱۰۰۳

F.Jolai, M.Mohammadi, [۵]  
queue M/M/c An H.Rostami  
loca- covering hub for model  
Mathematical problem, tion  
Modelling Compute and  
space .۲۶۲۳-۲۶۳۸ (۲۰۱۱)۵۴