The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

مدل های مکان‌یابی میانه کلاسیک و معکوس روی فضای حقیقی چند بعدی تحت نرمهای خطی و چبیشف

سمیه بخته *، دانشجوی کارشناسی ارشد،گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، bakhtehs@yahoo.com
بهروز علی‌زاده، عضو هیأت علمی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، alizadeh@sut.ac.ir
رقیه اعتماد، دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، etemad/ro@yahoo.com

چکیده: در این مقاله مسائل ۱-میانه کلاسیک و معکوس با تغییرات وزن نقطه‌ای روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرمهای خطی و چبیشف مورد مطالعه قرار می‌گیرند. روش ارائه شده برای حل مسأله ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$، بر اساس حل k مسأله میانه وزن‌دار روی فضای ۱-بعدی می‌باشد، در صورتیکه این خاصیت برای مدل معکوس متناظر برقرار نمی باشد و یک استراتژی جواب متفاوت را می طلبد. بعلاوه برای حل مسائل ۱-میانه کلاسیک و معکوس تحت نرم چبیشف، الگوریتم های ترکیبیاتی چند جمله ای ارائه می شود که مبتنی بر حل مسائل شبکه ای جریان ۲-متعادل و b-تطابق کسری هستند.

کلمات کلیدی: مسائل مکان‌یابی، مسئله میانه وزن‌دار، بهینه‌سازی معکوس، مسئله جریان ۲-متعادل، b-تطابق کسری.

۱ مقدمه و بیان مسائل

مسائل مکان‌یابی جزو مدل‌های پایه‌ای در بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشند که با توجه به کاربردهای فراوان، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند [۳]. یک مدل خاص از مسائل مکان‌یابی، مدل p-میانه کلاسیک می‌باشد که بصورت زیر روی فضای $\mathbb{R}^k$ بیان می‌گردد:
فرض کنید تعداد n نقطه $A_i = (x_{i1}, \cdots, x_{ik})$، $i = 1, \cdots, n$ روی فضای $\mathbb{R}^k$ بعنوان مشتریان با وزن‌های نامنفی w_i داده شده باشند. هدف، یافتن تعداد p نقطه روی فضای $\mathbb{R}^k$ جهت استقرار سرویس‌دهنده‌ها می‌باشد، بطوریکه مجموع فواصل وزن‌دار مشتریان از نزدیکترین سرویس دهنده به حداقل برسد. بعبارتی دیگر هدف، پیدا کردن جواب بهین برای مدل برنامه‌ریزی زیر می‌باشد:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \min_{j=1,\cdots,n} w_i d(A_i, u_j) \tag{1}$$
$$\text{s.t.} \quad u_j = (u_{j1}, \cdots, u_{jk}) \in \mathbb{R}^k, \quad \forall j = 1, \cdots, p,$$

که درآن $d(A_i, u_j)$ فاصله بین دو نقطه A_i و u_j برحسب نرم چبیشف، خطی یا اقلیدسی می‌باشد.
در تقابل با مسائل p-میانه کلاسیک، مدل معکوس این مسائل نیز بصورت زیر بیان می‌گردد:
فرض کنید نقاط $A_i = (x_{i1}, \cdots, x_{ik})$، $i = 1, \cdots, n$ با وزن‌های نامنفی w_i بعنوان مکان مشتریان و مجموعه H بعنوان مکان سرویس‌دهنده‌ها روی فضای $\mathbb{R}^k$ داده شده باشند. هدف، تغییر وزن نقاط داده شده به

می‌باشد بطوریکه تعداد p مکان از $\tilde{w}_i = w_i + q_i^+ - q_i^-$ قبل معین $H \supseteq \{A_1^*, \cdots, A_p^*\}$ مکان p-میانه روی فضای $\mathbb{R}^k$ باشد. q_i^+ و q_i^- بترتیب مقدار افزایش و کاهش وزن w_i می‌باشد. فرض کنید c_i^+ و c_i^- بترتیب هزینه افزایش و کاهش وزن w_i باشد و $\bar{w}_i$ و $\underline{w}_i$ کران بالای مجاز برای اندازه افزایش و کاهش وزن w_i باشد. تعریف کنید

$$\mathscr{S} = \{S : S \subseteq H, |S| = p\}.$$

در این صورت یک مسأله مکان‌یابی p-میانه معکوس با تغییرات وزن نقطه‌ای بصورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (c_i^+ q_i^+ + c_i^- q_i^-) \qquad (2)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i \Big(\min_{j=1,\cdots,p} d(A_i, A_j^*) - \min_{A_j' \in S} d(A_i, A_j')\Big) \leq 0$$

$$\forall S \in \mathscr{S},$$

$$0 \leq q_i^- \leq w_i - \underline{w}_i, \qquad \forall i = 1, \cdots, n,$$

$$0 \leq q_i^+ \leq \bar{w}_i - w_i, \qquad \forall i = 1, \cdots, n.$$

هاماخر و نیکل در [۲] یک الگوریتم خطی برای حل مدل (۱) روی صفحه تحت نرم خطی و چبیشف ارائه داده‌اند. در این مقاله نیز مسأله (۱) روی فضای کلی‌تر $\mathbb{R}^k$ در نظر گرفته شده و برای آن یک روش حل ارائه می‌گردد.

۲ مسأله ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم خطی

فرض کنید در مسأله ۱-میانه کلاسیک فاصله بین نقاط تحت نرم خطی باشد. حل مسأله ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم خطی مبتنی بر حل k مسأله میانه وزندار روی فضای حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد. الگوریتم ۱ را برای پیدا کردن میانه وزندار نقاط $X_1 = \{x_{11}, \cdots, x_{n1}\}$ درفضای ۱-بعدی درنظر بگیرید.

الگوریتم ۱: محاسبه میانه وزندار $X_1 = \{x_{11}, \cdots, x_{n1}\}$

گام ۱. اگر $n = 1$، آنگاه x_{11} میانه وزندار است و اگر $n = 2$ نقطه‌ای که وزن مربوطه‌اش بیشتر باشد بعنوان میانه وزندار است.

گام ۲. اگر $n > 2$، آنگاه

۱.۲. x_{j1} را بعنوان میانه آرایه X_1 بدست آورید و قرار دهید

$$R = \{x_{i1} \in X_1 : x_{j1} < x_{i1}\},$$

$$L = \{x_{i1} \in X_1 : x_{j1} > x_{i1}\}.$$

۲.۲. قرار دهید

$$W_R = \sum_{x_{i1} \in R} w_i, \quad W_L = \sum_{x_{i1} \in L} w_i.$$

۳.۲. اگر $W_R > W_L$، آنگاه قرار دهید

$$B = \{x_{i1} \in X_1 : x_{j1} \leq x_{i1}\}$$

و $w_j = w_j + W_L$. الگوریتم ۱ را برای بدست آوردن میانه وزندار آرایه B فراخوانی کنید.

۴.۲. اگر $W_R < W_L$، آنگاه قرار دهید

$$B = \{x_{i1} \in X_1 : x_{j1} \geq x_{i1}\}$$

و $w_j = w_j + W_R$. الگوریتم ۱ را برای بدست آوردن میانه وزندار آرایه B فراخوانی کنید.

همواره می توان نتیجه گرفت:

قضیه ۱.۲. *مسأله ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم خطی در زمان $O(n)$ حل‌پذیر می‌باشد.*

۳ مسأله ۱-میانه معکوس روی فضای $\mathbb{R}^2$ تحت نرم خطی

در مدل مکان‌یابی ۱-میانه معکوس، فرض کنید نقاط داده شده روی صفحه بوده و فاصله بین آنها تحت نرم خطی باشد. همچنین فرض کنید نقطه از قبل معین $A_0 = (x_{01}, x_{02})$ نیز دارای وزن w_0 و هزینه افزایش c_0^+ و کاهش c_0^- باشد. روشی که برای حل این مسأله پیشنهاد شده است استفاده از روش حریصانه می‌باشد. در این

روش، ابتدا نقاط را بطور صعودی در یک لیست بر حسب هزینه‌های داده شده مرتب کرده، سپس با انتخاب یک نقطه با کمترین هزینه، وزن آن را با توجه به ناحیه‌ای که نسبت به نقطه A_0 قرار دارد تغییر می‌دهیم. این عمل را تا زمانی انجام می‌دهیم که شکاف بهینگی که بصورت زیر تعریف می‌شود، به صفر برسد

$$D=\max\{0,|WX_< - WX_>|-WX_=,$$
$$|WX_< - WY_>|-WY_=\}$$

که در آن $X_\sim=\{i: x_{i1}\sim x_{01}\}$، $WX_\sim=\sum_{i\in X_\sim} w_i$ و $Y_\sim=\{i: x_{i1}\sim x_{02}\}$، $WY_\sim=\sum_{i\in Y_\sim} w_i$. نماد $\sim$ یکی از روابط $=$، $<$، $\le$، $>$ و $\ge$ می‌باشد. بطور خلاصه الگوریتم ۲ برای حل مسأله ۱-میانه معکوس روی صفحه تحت نرم خطی در زمان $O(n\log n)$ ارائه می‌گردد.

الگوریتم ۲: حل مسأله ۱-میانه معکوس روی صفحه تحت نرم خطی

گام ۱. معیار بهینگی D را بصورت زیر تعریف کنید:

$$D=\max\{\max_{Z=X,Y}|WZ_< - WZ_>|-WZ_=,0\}.$$

گام ۲. اگر $D=0$، آنگاه به اجرای الگوریتم خاتمه دهید. در غیر این صورت

۱.۲. فرض کنید $Z\in\{X,Y\}$ و $F\in\{<,>\}$، همچنین قرار دهید $D=WZ_F-WZ_{\bar{B}}$.

۲.۲. اگر فرض کنید $Z=Y$، آنگاه قرار دهید $\bar{Z}=X$ و برعکس.

۳.۲. اگر فرض کنید $F=<$، آنگاه قرار دهید $B=>$ و $\bar{B}=\ge$ و برعکس.

۴.۲. قرار دهید

$$b_1=\frac{1}{2}(D+W\bar{Z}_\ge - W\bar{Z}_<),$$
$$b_2=\frac{1}{2}(D+W\bar{Z}_\le - W\bar{Z}_>).$$

گام ۳. ضرایب هزینه c_i^+ را برای $A_i\in Z_{\bar{B}}$ و c_i^- را برای $A_i\in Z_{\bar{F}}$ بطور صعودی در یک لیست قرار دهید.

گام ۴. یک نقطه A_i را با کمترین هزینه که تاکنون انتخاب نشده است، اختیار کنید. در صورت عدم وجود چنین نقطه‌ای به اجرای الگوریتم خاتمه دهید، جواب شدنی وجود ندارد.

۱.۴. اگر $A_i\in Z_{\bar{B}}\cap\bar{Z}_=$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(\bar{w}_i-w_i,D)$، $D=D-\delta$ و $w_i=w_i+\delta$.

۲.۴. اگر $A_i\in Z_{\bar{B}}\cap\bar{Z}_<$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(\bar{w}_i-w_i,D,b_1)$، $w_i=w_i+\delta$، $D=D-\delta$ و $b_1=b_1-\delta$

۳.۴. اگر $A_i\in Z_{\bar{B}}\cap\bar{Z}_>$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(\bar{w}_i-w_i,D,b_2)$، $w_i=w_i+\delta$، $D=D-\delta$ و $b_2=b_2-\delta$.

۴.۴. اگر $A_i\in H_F\cap\bar{Z}_=$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(w_i-\underline{w}_i,D,b_1,b_2)$، w_i، D، b_1 و b_2 را به اندازه δ کاهش دهید.

۵.۴. اگر $A_i\in Z_F\cap\bar{Z}_<$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(w_i-\underline{w}_i,D,b_2)$، $w_i=w_i-\delta$، $D=D-\delta$، $b_2=b_2-\delta.$

۶.۴. اگر $A_i\in Z_F\cap\bar{Z}_>$، آنگاه قرار دهید $\delta=\min(w_i-\underline{w}_i,D,b_1)$، $w_i=w_i-\delta$، $D=D-\delta$ و $b_1=b_1-\delta$.

گام ۵. اگر $D=0$، آنگاه به اجرای الگوریتم خاتمه دهید در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

۴ مسأله ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم چبیشف

فرض کنید در مدل مکان‌یابی ۱-میانه کلاسیک (۱) بردار متغیرهای تصمیم‌گیری مدل بصورت $u=(u_1,\cdots,u_k)$ تعریف شود. همچنین فرض کنید فاصله بین نقاط A_i و u تحت نرم چبیشف باشد که با نماد $d_\infty(u,A_i)$ نشان داده می‌شود. در این صورت مدل

(۱) یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی خواهد بود. بازای هر $i = ۱, \cdots, n$ قرار دهید

$$z_i = \max(|x_{i۱} - u_۱|, \cdots, |x_{ik} - u_k|).$$

می‌توان مدل برنامه‌ریزی غیرخطی ایجاد شده را با روش حذفی فوریه-موتزکین بصورت مدل برنامه‌ریزی خطی معادل زیر بازنویسی کرد:

$$\min \sum_{i=۱}^{n} w_i z_i \qquad (۳)$$
$$\text{s.t.} \quad z_i + z_r \geq d^{ir}, \quad \forall r = ۱, \cdots, n, i = r+۱, \cdots, n,$$
$$z_i \geq ۰, \quad \forall i = ۱, \cdots, n.$$

که درآن $d^{ir} = \max_{j=۱,\cdots,k}(x_{ij} - x_{rj})$.

ثابت شده است که دوآل مسأله (۳) هم ارز با یک مسأله ترکیبیاتی b-تطابق کسری می‌باشد. در [۱] نشان داده شده است که از طریق حل یک مدل جریان نوع حداقل هزینه معادل می‌توان جواب مسأله b-تطابق کسری را در زمان $O(n^۳ \log n)$ بدست آورد. بنابراین نتیجه می‌شود:

قضیه ۴.۱. *مدل مکان‌یابی ۱-میانه کلاسیک روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم چبیشف در زمان $O(n^۳ \log n)$ حل‌پذیر می‌باشد.*

۵ مسأله ۱-میانه معکوس روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم چبیشف

مدل مکان‌یابی ۱-میانه معکوس (۲) را روی فضای $\mathbb{R}^k$ بازای $k \geq ۲$ در نظر بگیرید. قرار دهید $c_i^+ = c_i^- = ۱$. همچنین بازای $i = ۱, \cdots, n$ قرار دهید $w_i \geq ۰$. در این صورت مسأله تحت مطالعه بصورت مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر مدل‌بندی می‌گردد:

$$\min \sum_{i=۱}^{n} |w_i - \tilde{w}_i| \qquad (۴)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=۱}^{n} \tilde{w}_i d_\infty(A_i, A) \geq \sum_{i=۱}^{n} \tilde{w}_i d_\infty(A_i, A^*), \ \forall A \in \mathbb{R}^k,$$
$$\tilde{w}_i \geq ۰, \qquad \forall i = ۱, \cdots, n.$$

می‌توان نشان داد که جواب بهین مدل ۱-میانه معکوس مورد نظر می‌تواند از جواب یک مسأله جریان ۲-متعادلی که بصورت زیرساخته می‌شود،بدست می‌آید:
یک گراف دو بخشی $G = (V_۱ \cup V_۲, E)$ در نظر گرفته می‌شود بطوریکه مجموعه $V_۱$ شامل n رأس متناظر نقاط $A_۱$،$\cdots$،A_n از مدل ۱-میانه می‌باشد. مجموعه $V_۲$ نیز شامل $۲k$ رأس متناظر با مخروطهای

$$Q_j^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_j \geq ۰, \ \ |x_j| > |x_r|, \forall r \neq j\},$$
$$Q_j^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_j \leq ۰, \ \ |x_j| > |x_r|, \forall r \neq j\}$$

می‌باشد بطوریکه $Q_j^{\geq}$ و $Q_j^{\leq}$ یک جفت مخزن در مسأله جریان ۲-متعادل را تشکیل می‌دهند. بعلاوه یک منبع s و یال‌های (s, A_i) با ظرفیت‌های $c(s, A_i) = w_i$ به گراف اضافه می‌شوند. همچنین از هر نقطه A_i یک یال با ظرفیت نامتناهی به مخروطهای $Q_j^{\geq}$ و $Q_j^{\leq}$ تعریف می‌شود اگر و فقط اگر در بستار مخروط متناظر قرار داشته باشند. همواره جواب مدل جریان ۲-متعادل روی شبکه تعریف شده به جواب یک مدل b-تطابق کسری کاهش می‌یابد. از آنجایی که این مسأله در زمان $O(n^۳ \log n)$ قابل حل است [۱]، لذا می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه ۵.۱. *مدل ۱-میانه معکوس روی فضای $\mathbb{R}^k$ تحت نرم چبیشف در زمان $O(n^۳ \log n)$ حل‌پذیر می‌باشد.*

مراجع

[1] R. P. Anstee, "A polynomial algorithm for b-matchings: an alternative approach," Inform. Process. Lett, vol. 24(3), pp. 153-157, 1987.

[2] H. W. Hamacher, S. Nickel, "Mathematical Models and Solution Procedures for Location Problems: An Introduction," 1999.

[3] B. P. Mirchandani, "Discrete Location Theory," John Wiley, New York, 1990.