The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
دانشگاه سمنان
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

دور پذیری گوی یکه زیر مجموعه های سره از فضای عملگرهای هیلبرتی

*مهدی ایرانمنش، عضو هیأت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شاهرود، m.iranmanesh۲۰۱۲@gmail.com

فاطمه سلیمانی، دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه شاهرود enfazh.bmaam@gmail.com

چکیده: در این مقاله دورپذیری گوی یکهٔ برخی زیر مجموعه های فضای عملگرهای هیلبرتی را بررسی کرده و مشخصه ای برای نقاط دور مجموعه ای کراندار از یک نقطه مشخص از فضا را با استفاده از برد عددی ارائه می کنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه های دور پذیر، دور پذیر یکه، توپولوژی قوی و ضعیف ، برد عددی.

مقدمات

در دهه های اخیر نظریه یافتن نقطه دور، به عنوان یکی از شاخه های نظریه تقریب که امروزه کاربرد مختلفی در علوم مختلف از جمله اقتصاد و علوم کامپیوتر و..در هندسه فضاهای باناخ کاربرد فراوان نیز دارد، مورد توجه بسیاری ریاضیدانان قرار گرفته است. فرانکتین و سینگر در سال ۱۹۶۵ با استفاده از توابع خطی به بیان مشخصه برای این نقاط پرداخته اند. در سال ۱۹۶۶ آسپلاند[۱] [۳] به این نظریه در فضاهای یکنواخت محدب و درسال ۱۹۷۸ به بعد افرادی چون کاپور[۲] و پاندا[۳] [۱] به بررسی این مسئله در فضا های کلاسیک پرداخته اند. درسال ۱۹۷۴ توسط لئو و زیلز، مفهوم دورپذیری چگال مجموعه های کراندار در فضای نرمدار مطرح و توسیع یافت. همچنین از آنجا که گوی یکه در هر فضای نرمدار X، یک مجموعه دورپذیر است، این سوال مطرح شد که به ازاء چه زیر مجموعه های سره ای مانند Y از X، گوی یکه B_Y مجموعه ای دور پذیر از فضای X است. در سال ۲۰۰۹ دورپذیری گوی یکه زیرمجموعه ی فضای توابع پیوسته توسط باندیوپادهیای[۴] [۲] مطرح گردید. در این مقاله دور پذیری گوی یکه برخی زیرمجموعه های سره از جبر عملگرهای هیلبرتی را نشان داده و به بیان مشخصه ای برای نقاط دور و نیز شرایط یکتایی این نقاط خواهیم پرداخت.

[۱] E. Asplund
[۲] O.P. Kapoor
[۳] B.B. Panda
[۴] Bandyopadhyay

۱ دور پذیری گوی یکه

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار و A زیر مجموعه ای کراندار از X و $x \in X$ باشد. در این صورت دورترین فاصله مجموعه A تا x را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$S_A(x) = \sup_{g \in A} \|x - g\|.$$

فرض کنیم $y_0 \in A$، در اینصورت y_0 را دورترین نقطه از x در A نامیم در صورتی که:

$$\| x - y_0 \| = S_A(x).$$

همچنین برای هر $x \in X$ تعریف می کنیم:

$$\mathbf{F}_A(x) := \{a \in A \mid \| x - a \| = S_A(x)\}.$$

تعریف ۲.۱. مجموعه کراندار غیر تهی A را دور پذیر[۵] گوییم، در صورتی که به ازای هر $x \in X$، $\mathbf{F}_A(x) \neq \emptyset$ باشد.

فرض کنیدK زیر مجموعه ای از X باشد، در این صورت مجموعهٔ B_K را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B_K := \{y \in K : \ \|y\| \leq 1\}.$$

تعریف ۳.۱. مجموعه غیر تهی K را دور پذیر گوی یکه[۶] گوییم، اگر به ازای هر $x \in X$، $\mathbf{F}_{B_K}(x) \neq \emptyset$.

قضیه ۴.۱. *فرض کنید $Y \subseteq X$ اگر Y در یکی از شرایط زیر صدق کند:*

۱) Y زیرمجموعه فشرده ای از X باشد.

۲) Y زیرفضای متناهی البعدای از X باشد.

آنگاه Y دور پذیرگوی یکه است.

اثبات: رجوع شود به [۲]

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. و $B(H)$ متشکل از تمام توابع خطی کراندار ازH باشد. بروی این فضا توسط خانواده شبه نرم های جدا شونده توپولوژی های موضعاً محدب مختلفی تعریف می شود که در ذیل به دو مورد از آنها اشاره شده است:

[۵] remotal

[۶] ball remotal

تعریف ۵.۱. توپولوژِی قوی (ضعیف): توپولوژی تولید شده توسط شبه نرم های $(p_x)_{x\in H}$ که در آن p_x به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_x : B(H) \rightarrow R^+, \ \ u \mapsto \|u(x)\|,$$

$$(p_x : B(H) \rightarrow R^+ \ \ u \rightarrow | < u(x), y > |, x, y \in H)$$

را توپولوژِی قوی(ضعیف) می گویند.

تعریف ۶.۱. توبولوژی ضعیف* : توپولوژی تولید شده توسط شبه نرم های $(p_x)_{x\in H}$ که در آن p_x به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_x : B(H) \rightarrow R^+ \ \ u \rightarrow |tr(uv)|, \ v \in L^1(H),$$

را توپولوژِی ضعیف* میگویند.

قضیه ۷.۱. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت و Y یک مجموعه بسته ضعیف* از $B(H)$ باشد. در این صورت Y دور پذیرگوی یکه است.*

اثبات: فرض کنید $T \in B(H)$ و $r = S_{B_y}(T)$. در این صورت یک دنباله T_n از B_Y موجود است که $\lim_{n\rightarrow\infty} \|T_n - T\| = r$. از اینکه B_Y یک مجموعه فشرده ضعیف* است، پس زیر دنباله T_{n_k} و $A \in B_Y$ وجود دارد به قسمی که $T_{n_k} \xrightarrow{w^*} A$. از اینکه توپولوژی ضعیف*، قویتر از توپولوژی ضعیف است نتیجه می شود $T_{n_k} - T \xrightarrow{w} A - T$ و لذا برای هر $x, y \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n_k\rightarrow\infty} |\langle (T_{n_k} - T)x, y\rangle| &= |\langle (T - A)x, y\rangle| \\
&\leq \|(T - A)x\|\|y\| \\
\sup_{\|y\|=1} |\langle (T_{n_k} - T)x, y\rangle| &\leq \|(A - T)x\| \\
\sup_{\|x\|=1} \|(T_{n_k} - T)x\| &= \|T_{n_k} - T\| \\
&\leq \|A - T\|
\end{aligned}$$

بنابراین

$$r = \lim_{n_k\rightarrow\infty} \|T_{n_k} - T\| \ \ \leq \ \ \|A - T\|$$

بنابراین $A \in \mathbf{F}_{B_Y}(T)$ و Y دور پذیرگوی یکه است.

نتیجه ۸.۱. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت و A یک مجموعه محدب بسته قوی از $B(H)$ باشد. در این صورت A دور پذیرگوی یکه است.*

اثبات: چون A یک مجموعه محدب بسته قوی است لذا بنا به قضیه۴.۲.۷ [۴]، A مجموعه بسته ضعیف است و چون توپولوژی ضعیف روی مجموعه های کراندار معادل است با توپولوژیِ ضعیف* لذا بنا به قضیه ۷.۱ A دور پذیرگوی یکه است. ■

تعریف ۹.۱. فرض کنید $K\subseteq H$ و B زیر مجموعه ای از $B(H)$ باشد

$$Alg(K)=\{T\in B(H):T(K)\subseteq K\}.$$

$$Lat(\mathtt{B}):=\{M\subseteq H:TM\subseteq M\ (\forall T\in\mathtt{B})\}.$$

نتیجه ۱۰.۱. *فرض کنید K یک زیر فضای H باشد.*

۱) *در این صورت $Alg(K)$ دور پذیرگوی یکه از $B(H)$ است.*

۲) *اگر $Y\in Lat(Alg(K))$ آنگاه Y به طور چگال دور پذیرگوی یکه است.*

اثبات: چون $Alg(K)$ یک مجموعه بسته ضعیف است لذا به طور ضعیف* بسته است و بنا به قضیه ۷.۱ زیر مجموعهٔ دور پذیرگوی یکه از $B(H)$ است.
(۲) اثبات رجوع شود به [۲]. ■

$$K_Y=\{t\in H:\ \|g(t)\|=\|g\|,\ g\in B_Y\}.$$

قضیه ۱۱.۱. *فرض کنید Y یک زیر فضای $B(H)$ باشد، بقسمی که K_Y متناهی باشد. در این صورت Y دور پذیرگوی یکه است.*

اثبات: توسط نگاشت تحدید می توان مجموعه Y را در $B(K_Y)$ نشاند. به عبارت دیگر

$$\phi:Y\longrightarrow B(K_Y),\quad g\mapsto g\,|_{K_Y},$$

و بنا به تعریف K_Y نگاشت ϕ ایزومتری است و لذا $ker\phi=\{0\}$ از رابطه $dim(Y)=dimker\phi+dimIm\phi$ و اینکه K_Y متناهی است نتیجه می شود که $B(K_Y)$ متناهی است. پس Y متناهی البعد است در نتیجه گوی یکه آن یک مجموعه فشرده و لذا دور پذیر است. ■

فرض کنید $f\in B(H)$ در این صورت

$$Z_f:=\{\{x_n\}\in H:\|x_n\|=1,\ \lim_{n\to\infty}\|f(x_n)\|=\|f\|\}.$$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $f,g\in B(H)$ در این صورت برد عددی g^*f نسبت به f را با $W(g^*f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\{\lambda\in C:\lambda=\lim_{n\to\infty}\langle g^*f(x_n),x_n\rangle,\ \ \{x_n\}\in Z_f\}.$$

لم ۱۳.۱. *فرض کنید B زیر مجموعه کرانداری از $B(H)$، $f\in B(H)\setminus B$ و $g'\in\mathbf{F}_B(f)$ باشد. در این صورت برای هر $h\in B$، $\{x_n^h\}_{n\in N}\in Z_{f-h_1}$ وجود دارد بقسمی که*

$$\lim_{n\to\infty}Re\langle(f-h)(x_n^h),(g'-h)(x_n^h)\rangle=0.$$

قضیه ۱۴.۱. *فرض کنید B زیر مجموعه کرانداری از $B(H)$، $f\in B(H)\setminus B$ و $g_0\in B$ باشد. در این صورت $g_0\in\mathbf{F}_B(f)$ اگر و فقط اگر برای هر $h\in B$،*

$$\min ReW((g_0-h)^*(f-h))\le 0. \qquad (۱)$$

اثبات: *فرض کنید برای هر $h\in B$ نامساوی (۱) درست باشد و $\{x_n^h\}_{n\in N}\in Z_{f-h}$ در شرط $lim_{n\to\infty}Re\langle(f-h)(x_n^h),(g_0-h_1)(x_n^h)\rangle\le 0$ صدق کند در این صورت داریم:*

$$\begin{aligned}
\|f-g_0\|^2 &\ge \lim_{n\to\infty}\|f-g_0(x_n^h)\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\|(f-h)(x_n^h)-(g_0-h(x_n^h)\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\|(f-h)(x_n^h)\|^2\\
&+ \|(h-g_0)(x_n^h)\|^2\\
&- 2Re\langle(f-g_0)(x_n^h),(g_0-h)(x_n^h)\rangle\\
&\ge \lim_{n\to\infty}\|(f-h)(x_n^h)\|^2=\|f-h\|^2.
\end{aligned}$$

بنابراین $\|f-h\|\le\|f-g_0\|$ لذا $g_0\in\mathbf{F}_B(f)$. برعکس فرض کنیم $g_0\in\mathbf{F}_B(f)$ در این صورت بنا به لم ۱۳.۱ وجود دارد $\{x_n^h\}_{n\in N}\in Z_{f-h}$ به قسمی که

$$Re\langle(f-h)(x_n^h),(g_0-h)(x_n^h)\rangle=0,$$

بنابراین $\min ReW((g' - h)^*(f-h)) \leq 0.$ ■

قضیه ۱۵.۱. فرض کنید B زیر مجموعه کراندار از $B(H)$، $f \in B(H)\backslash B$ و $g_0 \in \mathbf{F}_B(f)$ باشد. درصورتیکه وجود داشته باشد $-K_f > 0$ به قسمی که

$$\min ReW((g_0-h)^*(f-h)) < -K_f\|h-g_0\|^2 \quad (۲)$$

آنگاه $\mathbf{F}_B(f) = \{g_0\}$.

اثبات: فرض کنید برای هر $h \in B$ نامساوی (۲) درست باشد و $\{x_n^h\}_{n\in N} \in Z_{f-h}$ به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h)(x_n^h), (g_0-h)(x_n^h)\rangle < -K_f\|h-g_0\|^2,$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\|f-g_0\|^2 &\geq \lim_{n\to\infty} \|(f-g_0)(x_n^h)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f-h)(x_n^h) - (g_0-h)(x_n^h)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f-h)(x_n^h)\|^2 \\
&+ \|(g_0-h)(x_n^h)\|^2 \\
&- 2Re\langle (f-h)(x_n^h), (h-g_0)(x_n^h)\rangle \\
&\geq \|f-h\|^2 + K_f\|h-g_0\|^2,
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $h \in B$ داریم

$$\|f-g_0\|^2 \geq \|f-h\|^2 + K_f\|h-g_0\|^2,$$

حال فرض کنیم $g_1 \in \mathbf{F}_B(f)$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
\|f-g_0\|^2 &\geq \|f-g_1\|^2 + K_f\|g_1-g_0\|^2, \\
&= \|f-g_0\|^2 + K_f\|g_1-g_0\|^2.
\end{aligned}$$

و این رابطه تنها زمانی اتفاق می افتد که $\|g_1-g_0\|^2 = 0$ لذا $g_1 = g_0$ ■

مراجع

[۱] *B.B. Panda، O.P. Kapoor، On farthest points of sets، Journal of Mathematical Analysis and Applications،* ۶۲ ،(۱۹۷۸) .۳۴۵-۳۵۳

[۲] *P. Bandyopadhyay، Bor-Luh Lin and T. S. S. R. K. Rao، Ball remotal subspaces of Banach spaces، Colloq. Math.،* ۱۱۴ ،(۲۰۰۹) ۱۱۹-۱۳۳

[۳] *E. Asplund، Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces، Israel Journal of Mathematics،* ۴ ،(۱۹۶۶) .۲۱۳-۲۱۶

[۴] *G. Murphy $c^* - algebra$ and operator theory، New york،* .۱۹۹۰