The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

ارزش گذاری اوراق قرضه تحت مدل CIR با استفاده از روش طیفی

زهرا معلمی، دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، zahra.moalemi@modares.ac.ir

محمدرضا اصلاحچی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، eslahchi@modares.ac.ir

چکیده: هدف ما در این مقاله ارائه‌ی یک روش طیفی برای ارزش‌گذاری اوراق قرضه تحت مدل CIR است. در پیاده سازی روش طیفی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل، از فرمول بندی گالرکین استفاده می کنیم. دامنه‌ی تعریف معادله‌ی مدنظر یک بازه‌ی نیمه متناهی است، در حالیکه بیشتر روش‌های طیفی بر اساس چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و روی بازه‌ی متناهی $[-1,1]$ دسته بندی می شوند. لذا با معرفی یک سیستم متعامد روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ ،که برگرفته از چندجمله ای های ژاکوبی است، جواب معادله را تقریب می زنیم. همگرایی روش نیز ثابت می شود.

کلمات کلیدی: ارزش گذاری اوراق قرضه، مدل CIR ، روش های طیفی، روش گالرکین، توابع کسری ژاکوبی.

مقدمه

در سازمان های پولی و مالی، برای پژوهش گران و تحلیل گران اقتصادی تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از اهمیت بالایی برخوردار است. بدون داشتن یک مدل ریاضی در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از جمله اوراق قرضه، سهام و اوراق مشتقه، اشتباهاتی پیش خواهد آمد که نمی توان آن ها را نادیده گرفت.

یکی از فرآیندهای مشهور که امروزه به طور گسترده در مدل سازی مورد استفاده قرار می گیرد، فرآیند ککس- اینگرسل- راس[۱] ،که به اختصار با نماد CIR نمایش داده می شود، می باشد. این فرآیند برای اولین بار توسط ککس ، اینگرسل و راس جهت مدل سازی نرخ بهره معرفی شد و از آنجا که یک فرآیند نامنفی است و دارای ویژگی های مناسبی هم چون خاصیت بازگشت به میانگین می باشد، مورد توجه است. ما در اینجا از مدل ذکر شده برای نرخ بهره‌ی کوتاه مدت[۲] استفاده می کنیم.

معرفی مسأله

فرض می کنیم P ارزش کوپن اوراق قرضه‌ی صفر باشد که تابعی از t و $r(t)$ می باشد و به صورت

[۱] Cox-Ingersoll-Ross

[۲] short-term interest rate

$P = P(r,t,T)$ نمایش داده می شود که در آن T سررسید (تاریخ انقضا) می باشد. همچنین فرض می کنیم که قیمت ورق قرضه $\{r_t, 0 \le t \le T\}$ در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dr_t = k(\bar{r} - r_t)dt + \sigma r_t^{1/2} dB_t, \qquad 0 \le t \le T,$$

صدق کند که در آن k نرخ بازده مورد انتظار، $\bar{r}$ سطح بازگشت، σ پارامتر تلاطم (نوسان پذیری) و $\{B_t, t \ge 0\}$ یک حرکت براونی استاندارد است. در این صورت یک معادله دیفرانسیل برای تعیین قیمت اوراق قرضه تحت مدل CIR به صورت زیر ارائه می شود:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (k(\bar{r} - r) - qr)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0 \qquad (۱)$$

که در آن qr ارزش افزوده ای است که بابت پذیرش ریسک وابسته به انتخاب $q(r,t)$ به صورت $q(r,t) = -\frac{qr^{1/2}}{\sigma}$ ، ایجاد می گردد.

معادله‌ی فوق، یک معادله‌ی سهمی گون تباهیده[۳] در $r = 0$ است. این معادله با شرط مرزی $P(r,T,T) = 1$ یک مسأله‌ی خوش حالت است؛ یعنی جواب دارد و جواب آن یکتاست. لازم به ذکر است که در اینگونه مسائل، P ، وقتی $r \to \infty$ در شرایط مرزی مجانبی خاصی صدق می کند و شرط مرزی در $r = 0$ به ضرایب معادله‌ی ۱ بستگی دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل های مالی غالباً به صورت یک معادله دیفرانسیل ظاهر می شوند و در اکثر آن ها جمله‌ی تصادفی وجود دارد. در بیشتر موارد حل تحلیلی این معادلات با مشکلات زیادی همراه است. به خصوص اعمال شرایط مرزی این محدودیت ها را افزایش می دهد. به همین دلیل محققین به بررسی و ارائه‌ی روش های عددی در زمینه‌ی ریاضیات مالی پرداخته اند. برخی از روش های عددی که تا کنون مورد استفاده قرار گرفته اند، عبارتند از روش تفاضلات متناهی، روش تفاضلات محدود، روش مونت کارلو، روش کمترین مربعات و سایر روش ها.

هدف ما در این مقاله ارائه‌ی روش طیفی برای حل عددی معادله‌ی ۱ است. در روش طیفی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از فرمول بندی گالرکین و از توابع کسری ژاکوبی به عنوان توابع کوششی، استفاده می کنیم.

توابع کسری ژاکوبی

توابع کسری ژاکوبی با رابطه‌ی

$$R_l^{(\alpha,\beta)}(x) = J_l^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \qquad l = 0,1,2,\ldots$$

داده می شوند که در آن $J_l^{(\alpha,\beta)}(y)$ چندجمله ای ژاکوبی از درجه‌ی l می باشد. این توابع، توابع مشخصه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر هستند:

$$\partial_x(x^{\beta+1}(x+1)^{-\alpha-\beta}\partial_x\nu(x)) + \lambda x^\beta (x+1)^{-\alpha-\beta-2}\nu(x) = 0$$

$$, x \in \Lambda = (0,\infty)$$

و مقادیر ویژه‌ی مربوطه عبارتند از

$$\lambda_l^{(\alpha,\beta)} = l(l+\alpha+\beta+1), \qquad l = 0,1,2,\ldots$$

تابع وزن $\chi_R^{(\alpha,\beta)}(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_R^{(\alpha,\beta)}(x) = x^\beta (x+1)^{-\alpha-\beta-2}, \quad \alpha,\beta > -1$$

در این صورت توابع متعامد کسری ژاکوبی برای فضای هیلبرت $L^2_{\chi_R^{(\alpha,\beta)}}(\Lambda)$ یک سیستم متعامد کامل بدست می دهند:

$$\int_\Lambda R_l^{(\alpha,\beta)}(x) R_{l'}^{(\alpha,\beta)}(x) \chi_R^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \gamma_l^{(\alpha,\beta)} \delta_{l,l'}$$

که در آن $\delta_{l,l'}$ تابع دلتای کرونکر می باشد و

$$\gamma_l^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(l+\alpha+1)\Gamma(l+\beta+1)}{(2l+\alpha+\beta+1)\Gamma(l+1)\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}$$

[۳] degenerate

و بنابراین برای هر $\nu \in L^2_{\chi_R^{(\alpha,\beta)}}(\Lambda)$ داریم

$$\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{v_l}^{(\alpha,\beta)} R_l^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\widehat{v_l} = (\gamma_l^{(\alpha,\beta)})^{-1} \int_{\Lambda} \nu(x) R_l^{(\alpha,\beta)}(x) \chi_R^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

آنالیز خطا

ضریب جمله‌ی پیشرو در معادله‌ی ۱ ممکن است در نقاطی خاص $(r = 0, r \to \infty)$، رو به انحطاط بگذارد و یا رشد کند. با توجه به این ویژگی خاص، مقایسه‌ی جواب های عددی با جواب واقعی در فضای سوبولف معمولی غیرممکن است. در حالیکه این کار می تواند در فضاهای سوبولف وزن دار غیریکنواخت خاصی که جواب واقعی متعلق به آن فضاست، انجام شود. این نکته در مورد تقریبات کسری ژاکوبی نیز درست است.

برای بررسی همگرایی، فضاهای مورد نیاز را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Lambda) = \{\nu | \nu : \text{اندازه پذیر است} \,, \parallel \nu \parallel_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta} < \infty\}$$

با نرم

$$\parallel \nu \parallel_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \left(\left(| \nu |^2_{1,\chi_R^{(\alpha,\beta)}} + \parallel \nu \parallel^2_{\chi_R^{(\gamma,\delta)}}\right)^{1/2}$$

توجه داریم که $H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Lambda)$ همان $L^2_{\chi_R^{(\gamma,\delta)}}(\Lambda)$ است. با فرض اینکه در $r = 0$ داریم $P(0,t) = 0$،لازم می شود فضای زیر را نیز تعریف کنیم:

$${}_0H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Lambda) = \{\nu | \nu \in H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Lambda) \text{ و } \nu(0) = 0\}$$

مراجع

[1] J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica, 53(1985), 385-407. MR785475

[2] Z.Wang, B.Guo, *Jacobi Rational Approximation and Spectral Method for Differential Equations of Degenerate Type*. Mathematics of Computation, 77(2007), 883-907.

[3] S. Dimas, P. G. L. Leach, *Complete Specification of some Partial Differential Equations that Arise in Finantial Mathematics*. J.Nonlinear Mathematical Physics, 16(2009), 73-92.