The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

روش های عناصر محدود تطبیقی برای مسائل بیضوی با ضرایب ناپیوسته

سولماز انکاری، solmazenkari@yahoo.com

چکیده: معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی با ضرایب انتشار ناپیوسته در حیطه‌های کاربردی هم چون انتشار از طریق رسانه متخلخل، انتشار میدان الکترو مغناطیس در رسانه‌های ناهمگن، روی می‌دهند. روش استاندارد برای حل عددی این مسایل با استفاده از روش‌های عناصر متناهی است. نظریه اختلال معلول برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDE)[۱] مرزهایی برای اختلال ضرایب در نورم L_∞ در نظر می‌گیرد، این مساله مستلزم اینست که ناپیوستگی کاملا همسان بوده اما ضرایب تقریبی باشند. در این مقاله روشی جدید بر اساس اختلال ضرایب در نورم L_q برای $q < \infty$ ارائه می‌کنیم که به همین دلیل نیازی به تطابق دقیق ضرایب ندارد. از این تئوری جدید برای فرموله کردن روش‌های عناصر محدود سازگار پذیر استفاده می‌کنیم تا مسایل ناپیوستگی را حل کنیم.

کلمات کلیدی: مسائل بیضوی، ضرایب ناپیوسته، برآورد اختلال، روش های عناصر محدود سازگار پذیر، همگرایی

مقدمه

معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f, & \text{on} \quad \Omega, \\ u = \circ, & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{۱}$$

در معادله (۱)، Ω دامنه چند وجهی در R^d با $d \geq ۱$ می‌باشد. $A = (a_{ij})_{i,j=۱}^{\infty}$ برابر با یک ماتریس معین مثبت از توابع L_∞ است. الگوریتم سازگارپذیری که پیشنهاد و تحلیل می‌کنیم بر اساس سه الگوریتم، RHS[۲]، COEFF[۳]، PDE می‌باشد. که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[\mathcal{T}_{k+۱}, U_{k+۱}] = \mathrm{PDE}(\mathcal{T}_k, A, f, \varepsilon_k),$$

ورودی‌های PDE عبارتند از افراز $\mathcal{T}_k$ ، ماتریس A ، fسمت راست و خطای هدف ε_k .

$$[\hat{\mathcal{T}}, \hat{f}] = \mathrm{RHS}(f, \mathcal{T}, \varepsilon),$$

در فرمول فوق $\hat{\mathcal{T}}$ افراز سازگاری است که $\mathcal{T}$ را اصلاح می‌کند و $\hat{f}$ چندجمله‌ای تکه‌ای است. RHS تقریبی از f با استفاده از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای را ارایه می‌کند.

$$[\hat{\mathcal{T}}, \hat{A}] = \mathrm{COEFF}(A, \mathcal{T}, \varepsilon),$$

.

زیرروال COEFF تقریب $\hat{A}$ به A در L_q ایجاد می‌کند. در نهایت، بر اساس PDE روش استاندارد AFEM ارایه می‌شود، این کار را بر اساس تقریب سمت راست $\hat{f}$ و ضریب انتشار $\hat{A}$ که

[۱] Partial Differential Equation
[۲] Right Hand Side
[۳] Coefficient

در RHS و COEFF ارائه شده اند، انجام دادیم. قضیه اختلال را مطرح می‌کنیم که در آن می‌توان تقریب A را به جای نورم ضعیف تر از L_∞ به کار برد.

قضیه ۱. (اختلال): برای هر $P \geq 2$، تابع u و $\hat{u}$ را داریم:

$$\begin{aligned}\|u-\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq& \hat{r}^{-1}\|f-\hat{f}\|_{H^{-1}_{(\Omega)}} \\ &+ \hat{r}^{-1}\|\nabla u\|_{L_P(\Omega)}\|A-\hat{A}\|_{L_q(\Omega)}, \\ &q := \frac{2p}{p-2} \in [2,\infty].\end{aligned}$$

روش عناصر متناهی تطبیقی(AFEM)[4] برای ماتریس‌های انتشار ناپیوسته

فرض کنید Ω دامنه چند وجهی بوده، $\mathcal{T}_0$ افراز اولیه از Ω باشد که دارای تعداد مشخصی نواحی مثلثی شکل است و هر یک از آنها دارای برچسب راس می‌باشند. اگر بخواهید یک سلول را تظریف کرده و آن را با استفاده از ضلع مقابل به جدیدترین راس به دو نیمه تقسیم کنید، دو سلول فرزند خواهد داشت. قانون دو نیم کردن روندی تظریفی است و تضمین کننده ظهور جنگل F از ریشه $\mathcal{T}_0$ می‌باشد. با این روش می‌توان افرازهای سازگار $\{\mathcal{T}_k\}_{k\geq 0}$ از Ω را از $\mathcal{T}_0$ به وجود آورد. افراز $\mathcal{T}_{k+1}$ با استفاده استراتژی سازگاری از $\mathcal{T}_k$، برای $k \geq 0$ به دست می‌آید.

AFEM با PDE فرق دارد چون در AFEM از هر دو تقریب f و A استفاده کردیم. با داشتن افرازی مانند $\mathcal{T}_k$ و خطای هدف مثل ε_k، AFEM ابتدا افراز سازگار مجاز $\mathcal{T}'$ را می‌یابد که همان اصلاح شده $\mathcal{T}_k$ است. سپس خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\|f-f_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon'_k, & \\ \|A-A_k\|_{L_q(\Omega)} \leq \varepsilon'_k, & \varepsilon'_k = w\varepsilon_k; \\ \hat{r} \leq \lambda_{\min}(\hat{A}), \lambda_{\max}(\hat{A}) \leq \hat{M}, & \end{cases}$$

بر اساس تخمین اختلال و $\hat{r}$ که یک مرزبندی برای حداقل مقدار ویژه A_k است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|u-U_{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq& \hat{r}^{-1}(1+C_p\|f\|_{w^{-1}(L_p(\Omega))})\varepsilon'_k \\ &+ \frac{C_U}{2}\varepsilon_k \leq C_U\varepsilon_k.\end{aligned}$$

با استفاده از شبکه اولیه $\mathcal{T}_0$ و پارامترهای w، β و ε_0 و در نظر گرفتن $k := 0$، تکرارها عبارتند از:

$$\begin{aligned}{}[\mathcal{T}_k(f), f_k] &= \mathrm{RHS}(\mathcal{T}_k, f, w\varepsilon_k), \\ [\mathcal{T}_k(f), A_k] &= \mathrm{COEFF}(\mathcal{T}_k(f), A, w\varepsilon_k), \\ [\mathcal{T}_{k+1}, U_{k+1}] &= \mathrm{PDE}(\mathcal{T}_k(A), A_k, f_k, \frac{\varepsilon_k}{2}), \\ \varepsilon_{k+1} &= \beta\varepsilon_k; \quad k \leftarrow k+1.\end{aligned}$$

هدف اصلی AFEM ایجاد تقریب خوبی از U به u با خطای اندازه گیری شده $\|\cdot\|_{H_0^1}$ می‌باشد. برای هر $n \geq 1$، $\Sigma_n^{m_u}$ را اجتماعی از همه فضاهای عناصر متناهی $v(\mathcal{T}) \subset H_0^1(\Omega)$ با $\mathcal{T} \in F_n$ تعریف می‌کنیم. با هر تابع $v \in H_0^1(\Omega)$ خواهیم داشت:

$$\sigma_n(v)_{H_0^1(\Omega)} := \inf_{V\in\Sigma_n^{m_u}} \|v-V\|_{H_0^1(\Omega)},$$

برای هر $s > 0$ می‌توانیم $A^s := A^s(\mathcal{T}_0, H_0^1(\Omega))$ را به عنوان مجموعه ای از همه $v \in H_0^1(\Omega)$ تعریف کنیم:

$$|v|_{A^s} : \sup(n^s\sigma_{n(v)_{H_0^1(\Omega)}}) < \infty.$$

می‌توانیم عملکرد تقریب f را نیز به همین شیوه اندازه‌گیری کنیم. فرض کنید $\Sigma_n^{m_f}$ فضای همه چندجمله‌ای‌های تکه‌ای با بیشترین $m_f \geq 0$ باشد که زیر مجموعه افراز $\mathcal{T} \in F_n$ هستند. تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_n(f)_{H^{-1}(\Omega)} := \inf_{S\in\Sigma_n^{m_f}} \|f-S\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

در مقایسه با رده A^s، فرض می‌کنیم که $B^s(\mathcal{T}_0, H^{-1}(\Omega))$ $S \geq 0$ برای همه توابع $f \in H^{-1}(\Omega)$ صدق می‌کند:

$$|f|_{B^s} : \sup_{n\geq 1}(n^s\sigma_{n(f)_{H^{-1}(\Omega)}}) < \infty.$$

بهترین خطای تقریب A در $\Sigma_n^{m_A}$ عبارتست از :

$$\sigma_n(A)_{L_q(\Omega)} := \inf_{S\in\Sigma_n^{m_A}} \|A-S\|_{L_q(\Omega)}.$$

[4]Adaptive Finite Eelement Method

با استفاده از رده $M^s = M^s(\mathcal{T}_۰, L_q(\Omega))$ همه ماتریس ها را به شکل زیر تعیین می‌کنیم:

$$|A|_{M^s} : \sup_{n\geq ۱}(n^s\sigma_{n(A)_{L_q(\Omega)}}) < \infty.$$

این روند بر اساس تقریب پذیری L_q انجام می‌شود.
عملکرد و کاربردAFEM : با داشتن رده‌های تقریب A^s ، B^s، M^s ، هدف از استفاده AFEM ، $u \in A^s$، $f \in B^s$، $A \in M^s$ خواهد بود. AFEM یک توالی $\{\mathcal{T}_k\}_{k\geq ۰}$ از مثلث سازی لانه ای به صورت $(\mathcal{T}_{k+۱} \geq \mathcal{T}_k)$ برای مقادیر $k \geq ۱$ خواهد داشت:

$$\|u - U_k\|_{H_۰{}^۱(\Omega)} C(|u|_{A^s} + |f|_{B^s} + |A|_{M^s})(\neq \mathcal{T}_k - \neq \mathcal{T}_۰)^{-s}.$$

میزان پیچیدگی $\mathcal{T}$ را می‌توان بر اساس تعداد $n(\mathcal{T})$ از دو قسمتی‌ها بدست آورد. در واقع

$$\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_۰ = n(\mathcal{T}).$$

الگوریتم‌های مطلوب برای تقریب سازگاری یک تابع

الگوریتم‌های RHS و COEFF بر اساس تخمین گرهای محلی شناخته شدند. ساخت الگوریتم‌ها در این نوع را می‌توان در دو سطح عملی و تیوری انجام داد. سطح عملی زمانی بکار می‌رود که f و A تابع‌های خفیف تکه‌ای شناخته شده بوده که بر روی افراز شناخته شده ثابتی قرار دارند. در سطح تیوری، اغلب کاربردهای AFEM شناخته شده هستند، f یا A را نمی‌شناسیم اما می‌توانیم آنها را محاسبه کنیم. با داشتن $g \in L_q(\Omega)$، خطای محلی L_q را در یک سلول چند ضلعی T به شرح زیر را ارایه می‌کنیم:

$$E(T) := E(g, T)_{L_q(T)} := \inf_{p\in P_m(T)} \|g - p\|_{L_q(T)},$$

در معادله فوق $P_m(T)$ فضای چندجمله‌ایها از درجه کمترمساوی m روی T است. با داشتن $\mathcal{T}$ ، بهترین تقریب برای g با یک چندجمله‌ای تکه‌ای از درجه کمتر مساوی به m دست می‌آید. برای این کار باید بهترین تقریب چندجمله‌ای P_T به g را روی T برای هر $T \in \mathcal{T}$ بدست آورد و تعریف می‌کنیم:

$$S_{\mathcal{T}} := \sum_{T\in\mathcal{T}} p_T\chi_T,$$

که در فرمول فوق χ_T تابع مشخصه T است و خطای کلی آن برابر است با:

$$\varepsilon(g, \mathcal{T}) := \|g - S_{\mathcal{T}}\|_{L_{q(\Omega)}} = \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} E(g, T)^q_{L_q(T)}\Big)^{\frac{۱}{q}},$$

بنابراین یافتن تقریب‌های خوب برای g روند یافتن افرازهای $\mathcal{T}$ خوب با اعداد اصلی کمتر را کوتاه‌تر می‌کند. این دو الگوریتم از $\mathcal{T}_۰$ آغاز شده و افرازهای $\mathcal{T}_n$ ، مثل $\mathcal{T}_n \in F_n$ را می‌سازند.

$$\varepsilon(g, \tau_n) \leq C\sigma_{n(g)_{L_q(\Omega)}}, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

این الگوریتم‌ها هر دو برای تقریب L_q مطلوب هستند، ولی بیشتر با استراتژی‌های ساده‌تر نشانه‌گذاری جایگزین می‌شوند و فقط سلول‌های با خطای محلی بیشتر را اصلاح می‌کنند.

ما یکی از استراژی ها به نام الگوریتم حریص[۵] را بررسی می‌کنیم. با داشتن هر $\mathcal{T}$ اصلاح شده از شبکه اولیه $\mathcal{T}_۰$ ، پروسه $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'(\Omega) = \mathrm{GREEDY}(\mathcal{T}, g, \varepsilon)$ اصلاحات سازگارپذیری به نام $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ می سازد مثل : $\varepsilon(g, \mathcal{T}') \leq \varepsilon$ روند $\mathcal{T}' = \mathrm{REFINE}(\mathcal{T}, T)$ با دو فرزندش جایگزین T می‌گردد. T به گونه‌ای انتخاب می‌گردد تا منجر به شکستن حلقه شود. تا زمانی که این چرخه ادامه دارد، اصلاحات دیگری هم توسط CONF روی $\mathcal{T}'$ صورت می‌گیرد تا کوچکترین افراز سازگار $\mathcal{T}(\varepsilon)$ که شامل $\mathcal{T}'$ باشد بدست آید.

مشخصه مهم خطای محلی یکنواخت بودن آن است.

$$E(T_۱)^q + E(T_۲)^q \leq E(T)$$

در فرمول فوق $T_۱$ و $T_۲$ دو فرزند T هستند. این مسئله به مشخصه یکنواختی کلی منجر می‌شود.

$$\varepsilon(g, \mathcal{T}') \leq \varepsilon(g, \mathcal{T}),$$

فرمول فوق برای همه اصلاحات $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ صادق است چه سازگارپذیر باشد و چه نباشد.

اگرچه ثابت نشده که الگوریتم حریص برای بدست آوردن همه مقادیر $o(n^{-s})$ برای همه رده $B^s(L_q(\Omega))$ مطلوب می‌باشد اما می‌دانیم که برای رده فرعی B^s مطلوب است. GREEDY عنصر $T \in \mathcal{T}'$ با بزرگترین خطای $E(g, T)$ را انتخاب کرده و دو فرزندش را جایگزین T می‌کند تا اصلاحات بعدی ناسازگاری $\mathcal{T}'$ را انجام دهد. این کار ادامه می‌یابد تا خطای $\varepsilon(g, \mathcal{T}')$ به

[۵] GREEDY

پایین تر از خطای تعیین شده ε برسد.

عملکرد GREDDY: اگر $g \in B^s_\infty(L_{\mathcal{T}}(\Omega))$ با $\frac{s}{d} > \frac{1}{\mathcal{T}} - \frac{1}{q}$ و $0 < s \leq m+1$ باشد، $GREEDY$ می‌تواند تعداد محدودی از مراحل را خاتمه داده و کل عناصر را نشانه‌گذاری کند

$$N(g) := \#\mathcal{T}' - \#\mathcal{T}$$

$$N(g) \leq C_3 |g|^{\frac{d}{s}}_{B^s_\infty(L_T(\Omega))} \varepsilon^{\frac{-d}{s}},$$

در فرمول فوق مقدار ثابت C_3 به $\mathcal{T}_0$ ، $|\Omega|$ ، $\mathcal{T}$ ، Sو q بستگی دارد. بنابراین خواهیم داشت:

$$g \in B^{\frac{s}{d}}(\mathcal{T}_0, L_q(\Omega)), \quad |g|_{B^{\frac{s}{d}}(\mathcal{T}_0, L_q(\Omega))} \leq |g|_{b^s_\infty(L_\tau(\Omega))}$$

فرض کنید $A \in L_\infty(\Omega)$ تابع ارزش ماتریس معین مثبت است که مقادیر ویژه آن در فرمول زیر صدق می‌کنند:

$$r \leq \lambda_{min}(A) \leq \lambda_{max}(A) \leq M,$$

که به معنای

$$r \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) z_i z_j = z^t A(x) z \leq M, \ |z| = 1,$$

است. ساخت الگوریتم COEFF برای تقریب A بر اساس عناصر $B \in \Sigma_n^m$ دارای دو رکن است. اولی یافتن تقریب‌های $B \in L_q(\Omega)$ برای $q < \infty$ است. دومی اطمینان از معین مثبت بودن است.

فرض کنید A تابع ارزشی ماتریس معین مثبت متقارن در $L_q(\Omega)$ است که مقادیر ویژه آن در $[r, M]$ بصورت $M > 1$ می باشد. فرض کنید $T \subset \Omega$ سلول چند ضلعی است که از دو نیم کردن راس $\mathcal{T}_0$ بدست آمده است. اگر ماتریس تابع ارزشی B را داشته باشیم که چندجمله‌ای از درجه کمتر مساوی m بر روی $\mathcal{T}$ است خواهیم داشت :

$$\|A - B\|_{L_q(T)} \leq \varepsilon,$$

سپس ماتریس معین مثبت $\tilde{B}$ خواهیم داشت که ورودی هایش هم چندجمله‌ای از درجه کمتر مساوی m و مشابه با مقادیر ویژه $\tilde{B}$ می‌باشد:

$$\frac{r}{2} \leq \lambda_{min}(\tilde{B}) \leq \Lambda_{max}(\tilde{B}) \leq CM,$$

$$\|A - \tilde{B}\|_{L_q(T)} \leq \tilde{C}\varepsilon,$$

در فرمول بالا c به d ، m و افراز اولیه $\mathcal{T}_0$ بستگی دارد و $\tilde{C}$ به $\frac{M}{r}$ بستگی دارد. حال به تقریب A در $L_q(\Omega)$ بدون در نظر گرفتن قطعیت مثبت تمرکز می‌کنیم. توجه داشته باشید که $A \in M^s(\mathcal{T}_0, L_q(\Omega))$ معادل هر ورودی $a_{i,j}$ در $B^s(\tau_0, L_q(\Omega)$ می‌باشد. تحلیل فوق نشان می‌دهد که ساخت الگوریتم مطلوب COEFF از روند ساخت الگوریتم های مطلوب برای تابع L_q پیروی می‌کند. اگر بتوانیم خطای محلی $E(a_{i,j}, T)_{L_q}$ را برای هر ضریب $a_{i,j}$ و هر عنصر T محاسبه کنیم، سپس یک الگوریتم COEFF برای $M^s(\mathcal{T}_0, L_q(\Omega))$ ساخته ایم که نزدیک به رده مطلوب است. علاوه بر آن، COEFF تضمین می‌کند که تقریب‌ها معین مثبت بوده است.

نتایج

نشان دادیم که سطح تئوری محدودیت قطعیت مثبت $\hat{A}$ بر مرتبه تقریب L_q تاثیری ندارد. اما استخراج الگوریتم های قابل اجرای عددی که تضمین کننده قطعیت مثبت بوده ودر شرایط $L_q(\Omega)$ عملکرد بهتری داشته باشند یک مسئله فرعی است. و فهمیدیم که هر استفاده از COEFF با خطاهای هدف کوچکتر و $q = \infty$ همگرا نخواهد بود. و در نهایت توانستیم $AFEM$ استاندار بر اساس تقریب سمت راست $\hat{f}$ و ضریب انتشار $\hat{A}$ که در RHS و COEFF ارائه شدند، انجام دهیم.

References

[1] P.Binev, W.Dahmen, R.Devore, P.Petrushev. Approximation classes for adaptive method

[2] R.H.Nochetto, K.G.Siebert, A.Veeser. Theory of adaptive finite element methods

[3] P.Binev, W.Dehmen, R.Devore. Adaptive finite element methods with convergence rates

□