The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۷ - ۴ شهریور ۱۳۹۳

حل معادلات تک بعدی و دو بعدي گرما با ضرايب متغير،توسط روشVIM

حجت اله ادیبی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
محمد علی فریبرزی عراقی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
حسین جالب، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب
(عضو هیأت علمی،عضو هیأت علمی، دانشجوی دکتری)

چکیده: روش تکراری تغییراتی روشی ساده، توانا و سودمند برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیرخطی است که در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است.در این مقاله، روش تکراري تغييراتي براي حل معادله تک بعدی و دو بعدی گرما با ضرايب متغير بحث و بررسي خواهد شد. در این روش جوابهاي مسائل به صورت بسته محاسبه خواهد شد.

کلمات کلیدی:معادله ديفرانسيل جزئي ، روش تكراري تغييراتي ، معادله گرما

مقدمه

امکان تعیین جواب تئوری دقیق برای اکثر مسائل غیرخطی وجود ندارد. برای حل این نوع مسائل می توان از روشهای عددی استفاده نمود. جهت حل مسائل غیرخطی ، می توان از روشهای دیگری که به روشهای تکرار تحلیلی تقریبی معروفند ، استفاده نمود. در این روشها با استفاده از یک تقریب اولیه و با استفاده از یک فرآیند تکرار ،تقریبی برای جواب مسأله غیر خطی به دست می آوریم. به طوریکه تکرارها به جواب واقعی همگرا می شوند.

تحلیل روش

برای نشان دادن ایده اصلی روش تکرار ی تغییراتی معادله

$$Lu + Nu = g \qquad (۱)$$

را در نظر می گیریم ، که L در آن عملگر خطی N، عملگر غیرخطی و g طرف دوم معادله می باشد. مشخصه اصلی VIM ، ساختار تابع تصحیح برای معادله (۱) است که به صورت

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s)[Lu_n(s) + Nu_n(s) - g(s)]ds \qquad (۲)$$

تعریف می شود که λ در آن ضریب عمومی لاگرانژمی باشد به طور بهین توسط شرایط پایایی تعیین میگردد.

به عنوان n امین تقریب از جواب و متغیرمحدود شده قراردمیدهیم. $\delta\hat{u}_n = 0$

حل معادله تک بعدی ودوبعدی موج با ضرایب متغیر

مثال: معادله دو بعدی گرما با ضرایب متغیر را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u_t(x,y,t) - \frac{y^2}{2}u_{xx}(x,y,t) - \frac{x^2}{2}u_{yy}(x,y,t) = 0 \qquad (۳)$$

با شرط اولیه $u(x,y,0) = y^2$ تابع تصحیح معادله (۳) به صورت

$$u_{n+1}(x,y,t) = u_n(x,y,t) + \int_0^t \lambda(s)[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial y^2}]ds \qquad (۴)$$

ساخته می شود. با اعمال تغییرات در طرفین معادله (۴) و با فرض $\delta\hat{u}_n = 0$ داریم :

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\int_0^t \lambda(s)\frac{\partial u_n}{\partial s}ds + \delta\int_0^t \lambda(s)[-\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial y^2}]ds$$

با توجه به تغییرات محدود شده ، تغییرات جمله سوم سمت راست برابر صفر میشود. و با اعمال قاعده انتگرالگیری جزء به جزء روی جمله دوم طرف راست داریم : $\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta[\lambda(s)u_n]_0^t - \delta\int_0^t \lambda'(s)u_n ds$

با قرار دادن $\delta u_{n+1} = 0$ برای شرایط پایایی داریم :

$$\delta u_n : \lambda'(s) = 0, \delta u_n : 1 + \lambda(s)|_{s=t} = 0 \qquad (۵)$$

و از حل دستگاه (۵) داریم

$$\lambda = -1$$

لذا تابع تصحیح رابطه (۴) به صورت زیر در می آید:

$$\delta u_{n+1} = u_n - \int_0^t [\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}]ds \qquad (۶)$$

با توجه به شرط اولیه و رابطه بازگشتی (۶) برای یافتن تقریبات بعدی جواب داریم

$u_0 = y^2$

$u_1 = y^2 + x^2 t$

$u_2 = x^2(t) + y^2(1 + \frac{t^2}{2!})$

$u_3 = x^2(t + \frac{t^3}{3!}) + y^2(1 + \frac{t^2}{2!})$

$$u_n(x,y,t) = x^2(t + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}) + y^2(t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^{2n}}{(2n)!})) \qquad (۷)$$

درنتیجه چون $u(x,y,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y,t)$ لذا $u(x,y,t) = x^2 sinht + y^2 cosht$

نتایج

در این مقاله روش تکراری تغییراتی خی را برای حل معادله گرمابا ضرایب متغیر در بعد دوم بکار بردیم و ملاحظه کردیم که روش فوق روشی ساده ، توانا و سودمند برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی است. مهمترین ویژگی روش تکراری تغییراتی این است که حجم محاسباتی کم ، جواب های عددی با دقت بالا می باشد.

مراجع

[1] Ali AHA, Raslan KR. Variational iteration method for solving partial differential equations with variable coefficients.Chaos, Solitons and Fractals 2009;40:1520–9.

[2] He JH. Variational iteration method—Some recent results and new interpretations.J of ComputlApplMath ;2007:207 3 – 17.

[3] Tatari M, DehghanM.On the convergence of He's variational iteration method. J of ComputlAppl Math 2007; 207: 121 – 128.