The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

# درباره ۲-همبندی گراف توان گروه‌های ساده

*،**نرگس اکبری، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی-جبر، دانشگاه کاشان، nargesakbari۱۳۹۱@gmail.com
علی رضا اشرفی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، ashrafi@kashanu.ac.ir

**چکیده:** گراف توان یک گروه متناهی، گرافی است که مجموعه رئوس آن عناصر گروه می‌باشد و دو رأس $g$ و $h$ از این گراف مجاورند اگر و تنها اگر یکی برابر توانی از دیگری باشد. این مقاله به مطالعه ۲-همبندی گراف‌های توان گروه‌های ساده پراکنده، گروه‌های ساده ری نوع ${}^2F_4(q)$ و گروه‌های تصویری $PSL(3,q)$ می‌پردازد.

**کلمات کلیدی:** گراف توان، گروه ساده پراکنده، گروه ساده ری نوع ${}^2F_4(q)$، گروه تصویری $PSL(3,q)$، ۲-همبندی.

## مقدمه و مفاهیم اولیه

فرض کنید $G$ یک گروه متناهی است. گراف توان $P(G)$ گرافی است با مجموعه رئوس $G$ که در آن دو عنصر متمایز $x$ و $y$ مجاورند اگر و تنها اگر یکی از آن‌ها توانی از دیگری باشد.

گراف توان سره که با حذف رأس همانی از $P(G)$ به‌دست می‌آید با $P^*(G)$ نشان داده می‌شود. در واقع $P^*(G) = P(G) - \{e\}$. درجه $x$ در گراف توان را با $deg(x)$ و مجموعه مرتبه‌های عناصر $G$ را با $\pi_e(G)$ نشان می‌دهند. رأس برشی در یک گراف، رأسی است که حذف آن موجب افزایش تعداد مولفه‌های همبندی گراف می‌گردد. گراف $\Gamma$، ۲-همبند گفته می‌شود هرگاه رأس برشی نداشته باشد.

**لم ۱.** ([۱]) *گراف توان $P(G)$ کامل است اگر و تنها اگر برای هر دو زیرگروه دوری $G_1$ و $G_2$ از $G$ داشته باشیم $G_2 \subseteq G_1$ یا $G_1 \subseteq G_2$.*

این مسئله که چه هنگام گراف توان یک گروه دوری کامل است از جمله مسائلی است که بلافاصله بعد از تعریف این گراف به ذهن متبادر می‌شود. در قضیه زیر چاکرابارتی ([۱])، و دیگران به این سئوال پاسخ داده‌اند.

**قضیه ۲.** *گراف توان $P(G)$ کامل است اگر و تنها اگر $G$ یک $p$-گروه دوری باشد.*

به سادگی می‌توان دید که اگر $G$ یک گروه متناهی و $x \in G$ آن‌گاه

$$deg(x) = |\{g \in G / <g> \leq <x> \text{ یا } <g> << x>\}| - 1$$

در ادامه نیاز داریم تا روابطی برای محاسبه درجه رئوس در گراف توان داشته باشیم. یکی از این روابط که بسیار مورد استفاده ما خواهد بود نتیجه‌ای از پورقلی و دیگران است که در ([۵]) به اثبات رسیده است.

**لم ۳.** *فرض کنید $Z_n$ گروه دوری از مرتبه $n$ باشد. در این‌صورت داریم:*

$$deg(x) = o(x) + \sum_{ko(x)|n, k\neq 1} \varphi(ko(x)) - 1$$

نتیجه زیر از چاکرابارتی و دیگران ([۱])، در خصوص تعداد یال‌های گراف توان از جمله نتایج زیبایی است که مسائل زیادی حول و حوش آن بوجود آمده است.

**نتیجه ۴.** *فرض کنید $G$ گروه متناهی از مرتبه $n$ باشد. در این‌صورت*

$$2e = \sum_{a\in G}(2o(a) - \varphi(o(a)) - 1)$$

*که در آن $e$ تعداد یال‌های گراف و $o(a)$ مرتبه رأس $a$ است.*

توجه کنید که همبندی $P^*(G)$ با ۲-همبندی $P(G)$ معادل است. ما در این مقاله به جای ۲-همبندی $P(G)$ به همبندی $P^*(G)$ می‌پردازیم.

## چند مثال

این بخش به محاسبه گراف توان چند دسته معروف از گروه‌ها اختصاص دارد. به طور دقیق گراف‌های توان گروه‌های دو وجهی، دو دوری و نیم دو وجهی محاسبه خواهند شد. گروه دو وجهی به صورت زیر معرفی می‌شود: $D_{2n} =< a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} >$ به سادگی می‌توان دیدکه گراف توان گروه فوق اجتماع $n$ نسخه از $K_4$ و گراف توان $Z_n$ است.

گروه نیم دو وجهی $SD_{8n}$ با نمایش زیر معرفی می‌شود:

$$SD_{8n} =< a, b \mid a^{4n} = b^2 = 1, bab = a^{2n-1} > .$$

در این صورت گراف توان گروه فوق اجتماع $2n$ نسخه از $K_2$، $n$ نسخه از $K_4$ و گراف توان $Z_{4n}$ است به طوری‌که $K_4$ ها و $P(Z_{4n})$ در یک یال چنان مشترکند که یک رأس آن یال، همانی و رأس دیگر آن $a^{2n}$ می‌باشد.

حال گروه دو دوری $T_{4n}$ در نظر می‌گیریم. این گروه با نمایش زیر ساخته می‌شود:

$$T_{4n} =< a, b \mid a^{2n} = 1, a^n = b^2, aba = b > .$$

در این صورت گراف توان گروه فوق اجتماع $n$ کپی از $K_4$ و گراف توان $Z_{2n}$ است که همگی در یک یال مشترکند به طوری‌که یک رأس یال، همانی و رأس دیگر آن عنصر منحصربفرد از مرتبه ۲ در $T_{4n}$ می‌باشد.

## نتایج اصلی

پورقلی و دیگران در مرجع [۵] مسئله وجود گروه‌های ساده‌ای که گراف توان آن‌ها ۲-همبند است را مطرح ساختند. در این بخش ثابت می‌شود که گراف توان تمامی گروه‌های ساده پراکنده ۲-همبند نیستند. به علاوه گروه‌های ساده ری نوع $^2F_4(q)$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

بنابر رده بندی گروه‌های ساده، ۲۶ گروه وجود دارند که در هیچ دسته نامتناهی از گروه‌های ساده قرار نمی‌گیرند. این گروه‌ها را گروه‌های ساده پراکنده می‌نامند. گروه‌های ساده پراکنده عبارتند از:

$$\left\{\begin{array}{c} M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, \\ J_4, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}, HS, \\ Msl, He, Ru, SUZ, O'N, HN, Ly, Th, B, M \end{array}\right\}$$

می‌دانیم در گراف توان یک گروه در صورتی میان دو رأس یال وجود دارد که یکی به صورت توانی از دیگری قابل نوشتن باشد. حال با توجه به این‌که در صورت متباین بودن مرتبه دو رأس یالی میان آن دو وجود ندارد، گراف توان گروه‌های پراکنده را در نظر می‌گیریم.

جدول ۱. گروه‌های ساده پراکنده همراه با تعدادی عامل اول متباین با سایر مرتبه عناصر گروه

| | | |
|---|---|---|
| $M_{11}$ | $M_{12}$ | $M_{22}$ |
| 11 | 11 | 11 |
| $M_{23}$ | $M_{24}$ | $J_1$ |
| 23 | 23 | 19 |
| $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ |
| 7 | 19 | $\{23, 29, 31, 37, 43\}$ |
| $Co_1$ | $Co_2$ | $Co_3$ |
| 23 | $\{11, 23\}$ | 23 |
| $He$ | $HN$ | $Mcl$ |
| 17 | 19 | 11 |
| $O'N$ | $Ly$ | $Ru$ |
| 31 | 67 | 29 |
| $Hs$ | $Th$ | $Suz$ |
| $\{7, 11\}$ | $\{13, 19, 31\}$ | $\{11, 13\}$ |
| $B$ | $M$ | $Fi_{22}$ |
| $\{31, 47\}$ | $\{41, 71\}$ | $\{13, 17\}$ |
| $Fi_{23}$ | $Fi_{24}$ | – |
| $\{17, 23\}$ | 29 | – |

با یک بررسی ساده روی محاسبات داده شده در جدول ۱، می‌توان دید که در میان مجموعه مرتبه‌های کلاس های تزویج هر یک از گروه‌های پراکنده فوق هیچ عددی یافت نمی‌شود که اعداد مشخص شده زیر هر گروه را عاد کند و یا توسط آن عاد شود. بنابراین قضیه زیر را داریم:

**قضیه ۵.** *گراف توان گروه‌های پراکنده، ۲-همبند نیستند.*

با محاسباتی خسته کننده و استفاده از نتایج دنگ و شی ([۳])، قضیه زیر به اثبات می‌رسد.

**قضیه ۶.** *گراف توان گروه‌های ری نوع $^2F_4(q)$، ۲-همبند نیستند.*

دوست آبادی و فرخی ([۴])، ثابت نمودند گروه‌های $PSL(2, p^m)$، دارای $\frac{(p^{2m+1}-1)}{p-1}$ مولفه همبندی هستند. حال طبیعی است که به گروه‌های $PSL(3, q)$ بپردازیم. با استفاده از نتایج درفشه و دیگران ([۲])، می‌توان ۲-همبندی گروه‌های $PSL(3, q)$ را نیز بررسی نمود. به طور دقیق:

**قضیه ۷.** *گراف توان گروه‌های $PSL(3, q)$، ۲-همبند نیستند.*

## مراجع


[1] I. Chakrabarty, S. Ghosh and M. K. Sen, *Undirected power graphs of semigroups*, Semigroup Forum 78 (2009) 410–426.

[2] M. R. Darafsheh, A. R. Moghaddamfar and A. R. Zokayi, *A recognition of simple groups PSL(3,q) by their element orders*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 24 (1) (2004) 45-51

[3] H. Deng and W. Shi, *The characterization of ree groups $^2F_4(q)$ by their element order*, J. Algebra **217**, 180-187 (1999).

[4] A. Doostabadi and M. Farrokhi D. G., *On the connectivity of proper power graphs of finite groups*, Submitted.

[5] G. R. Pourgholi, H. Yousefi-Azari and A. R. Ashrafi, *The undirected power graph of a finite group*, to appear in Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.