The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

آنتروپی روی شبه $MV-$ جبر با افرازهای شمارا

**زهرا اسلامی گیسکی ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سیرجان، گروه ریاضیات، سیرجان، ایران، zahra@yahoo.com_eslamig
معصومه طاهریان ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سیرجان، گروه ریاضیات، سیرجان، ایران، taheriyan@yahoo.com_masomeh
۱-عضو هیأت علمی ۲-دانشجوی دکتری

چکیده: در این مقاله، ابتدا آنتروپی روی شبه $MV-$ جبر با افرازهای شمارا معرفی گردیده و سپس شبه سیستم دینامیکی روی شبه $MV-$ جبر تعریف شده و خواص آنتروپی این شبه سیستم بررسی می گردند.

کلمات کلیدی: آنتروپی، افراز شماراٰ ، شبه سیستم دینامیکی، شبه $MV-$ جبر

مقدمه

آنتروپی مفهومی رایج در علوم، بویژه در ریاضی و فیزیک می باشد. در ابتدا این مفهوم توسط کلاسیوس برای قانون دوم ترمودینامیک معرفی گردید اما بعد این مفهوم گسترش یافت[$1,2,4$]. کولموگروف وسینا آنتروپی روی فضای احتمال را ارائه دادند[$5,7$] و این آنتروپی بعنوان ابزاری برای اندازه گیری مقدار عدم قطعیت متغیرهای تصادفی مورد استفاده قرار گرفت. بعضی محققان با در نظر گرفتن یک ساختار جبری بعنوان فضای احتمال، آنتروپی فازی روی آن تعریف نمودند[$2,4$]. اخیراً شبه $MV-$جبر توسط حسنخانی و برومندتعریف شده است[3]. در این مقاله ابتدا تعاریف لازم برای تعریف آنتروپی شبه سیستم دینامیکی روی شبه $MV-$جبر با افرازهای شمارا داده شده و بعد از معرفی آنتروپی خواص آن بررسی می گردند.

پیش نیازها و تعاریف

●تعریف: جبر $M=(M,+,\cdot,\acute{},0)$ از نوع $(2,2,1,0)$ یک $MV-$جبر است اگر " $+$ " شرکت پذیر و جابجایی و 0 یک عضو خنثی بوده و روابط زیر برای هر $x,y\in M$ ، برقرار باشند: $\acute{0}=1$، $\acute{1}=0$، $x+1=x$، $x\cdot y=(\acute{x}+\acute{y})\acute{}$ و $y+(y+\acute{x})\acute{}=x+(x+\acute{y})\acute{}$.

●تعریف: $(G,+,\leq)$ یک $l-$گروه است اگر $(G,+)$ یک گروه جابجایی و $(G,\leq)$ یک شبکه مرتب بوده و $a\leq b$ نتیجه دهد $a+c\leq b+c$.
عنصر $u>0$را قوی گوییم اگر برای هر $g\in G$ وجود داشته باشد $n\in N$ بطوریکه $nu\geq g$. روی بازه $[0,u]=\{h\in G:0\leq h\leq u\}$, اعمال زیر را تعریف می کنیم:

$$g^*=u-g, g\oplus h=u\wedge(g+h), g\odot h=0\vee(g+h-u),$$

آن گاه $MG=([0,u],\oplus,\odot,*,u,0)$ یک$MV-$ جبر است.

●قضیه: فرض کنید M یک $MV-$ جبر باشد. یک $l-$گروه جابجایی G با عنصر قوی u وجود دارد بطوریکه $M = MG$.[۶]

●تعریف: گوییم جبر M دارای خاصیت تجزیه ریس است اگر $x \leq y_1 + y_2$ نتیجه دهد که عناصر x_1, x_2 وجود داشته باشند بطوریکه $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$ و $x = x_1 + x_2$.

●تعریف : فرض کنید $\alpha \in [0,1]$ و x عضوی از M باشد.مجموعه فازی x_α از M را یک نقطه فازی گوییم اگر برای هر $y \in M$ داشته باشیم

$$x_\alpha\left(y\right) = \begin{cases} \alpha & x = y \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}.$$

●تعریف: فرض کنید $M = (M, +, \cdot, \acute{}, 0)$ یک $MV-$جبر و FP(M) مجموعه ی همه ی نقاط فازی M باشند. اعمال$\oplus$ ، $\odot$ و $*$ را برای هر $x_\alpha, y_\beta \in FP(M)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\oplus : FP(M) \times FP(M) \to FP(M)$$

$$(x_\alpha, y_\beta) \mapsto (x + y)_{min\{\alpha,\beta\}},$$

$$\odot : FP(M) \times FP(M) \to FP(M)$$

$$(x_\alpha, y_\beta) \mapsto (x \cdot y)_{min\{\alpha,\beta\}},$$

$$* : FP(M) \to FP(M)$$

$$(x_\alpha)^* \mapsto (\acute{x})_\alpha.$$

● تعریف : [3] $(FP(M), \oplus, \odot, *)$ را یک شبه $MV-$جبر گوییم.

●تعریف : دنباله ی $A = \{x^i_{\alpha_i}\}_{i=1}^\infty$یک افراز شمارا برای FP(M) است اگر $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} x^i_{\alpha_i} = u_\alpha$ باشد و افراز شمارا $B = \{y^j_{\beta_j}\}_{j=1}^\infty$ را یک تظریفی از افراز A گوییم و با $A \preceq B$ نشان می دهیم اگر برای هر $x^i_{\alpha_i}$ وجود داشته باشد $\eta_i \subset N$ بطوریکه $x^i_{\alpha_i} = \underset{j\in\eta_i}{\oplus} y^j_{\beta_j}$، $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\bigcup}} \eta_i = N$ و $\eta_k \cap \eta_j = \emptyset$ اگر $k \neq j$.

● تعریف: تابع $m : FP(M) \longrightarrow [0,1]$ را تابع حالت گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف- به ازای هر $\alpha \in [0,1]$ داشته باشیم $m(u_\alpha) = 1$.

ب- اگر $x_\alpha = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} x^i_{\beta_i}$ آن گاه $m(x_\alpha) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} m(x^i_{\beta_i})$.

ج- اگر $x_\alpha \leq y_\beta$ آن گاه $m(x_\alpha) \leq m(y_\beta)$.

●تعریف: فرض کنید $A = \{x^i_{\alpha_i}\}_{i=1}^\infty$ و $B = \{y^j_{\beta_j}\}_{j=1}^\infty$ دو افراز شمارا از $FP(M)$ باشند. گوییم $\{z^{ij}_{\gamma_{ij}}\}_{i,j=1}^\infty$ یک الحاق ریس از B و A است و با $A \vee B$ نشان می دهیم اگر $x^i_{\alpha_i} = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} z^{ik}_{\gamma_{ik}}$ و $y^j_{\beta_j} = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} z^{kj}_{\gamma_{kj}}$ و داشته باشیم $\sup m(z^{ij}_{\gamma_{ij}}) \geq \sup m(x^i_{\alpha_i}) \sup m(y^j_{\beta_j})$.

●تعریف : فرض کنید m یک تابع حالت و $A = \{x^i_{\alpha_i}\}_{i=1}^\infty$ یک افراز شمارا روی شبه جبر $FP(M)$ باشند آنتروپی A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(A) = -\log \sup_{i\in N} m(x^i_{\alpha_i}).$$

●تعریف: فرض کنید $C = \{z^{ij}_{\gamma_{ij}}\}_{i,j=1}^\infty$ یک الحاق ریس از B و A باشد. آنتروپی A به شرط B را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_C(A \mid B) = -\log \sup_{i,j} \frac{m(z^{ij}_{\gamma_{ij}})}{m(y^j_{\beta_j})}, m(y^j_{\beta_j}) > 0.$$

●تعریف: اگر $A_1, A_2, ..., A_n$ افرازهای شمارایی از $FP(M)$ با خاصیت تجزیه ریس باشند تعریف می کنیم:

$$H_*(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n) := \inf\{H(C) : C \in Ref(A_1, A_2, ..., A_n)\},$$

$$H^*(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n) := \sup\{H(C) : C \in Ref(A_1, A_2, ..., A_n)\},$$

$$H_*(A \mid B) := \inf\{H_C(A \mid B) : C \in Ref(A, B)\},$$

$$H^*(A \mid B) := \sup\{H_C(A \mid B) : C \in Ref(A, B)\}.$$

●تعریف: سه تایی $(FP(M), m, \varphi)$ را شبه سیستم دینامیکی گوییم اگر $FP(M)$ یک شبه $MV-$جبر با خاصیت تجزیه ریس، m یک تابع حالت و $\varphi : FP(M) \to FP(M)$ نگاشتی با خواص زیر باشد:

الف - $\varphi(u_\alpha) = u_\alpha$,

ب - $\varphi(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} x^i_{\alpha_i}) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} \varphi(x^i_{\alpha_i})$,

ج - $m(\varphi(x^i_{\alpha_i})) = m(x^i_{\alpha_i})$.

●تعریف: فرض کنید A یک افراز شمارا و φ یک تبدیل روی $FP(M)$ با خاصیت تجزیه ریس باشد. تعریف می کنیم:

$$H^n_*(A, \varphi) := H_*(A, \varphi(A), ..., \varphi^{n-1}(A)),$$
$$H^*_n(A, \varphi) := H^*(A, \varphi(A), ..., \varphi^{n-1}(A)).$$

●تعریف : فرض کنید $(FP(M), m, \varphi)$ یک شبه سیستم دینامیکی و P مجموعه شامل افرازهای شمارای $FP(M)$ باشد. آنتروپی های پایین و بالا آن بصورت زیر تعریف می شوند:

$$h_*(\varphi) := \sup\{h_*(A, \varphi) : A \in P\}, \text{ و}$$
$$h^*(\varphi) := \sup\{h^*(A, \varphi) : A \in P\},$$

که

$$h_*(A, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} H^n_*(A, \varphi), \text{ و}$$
$$h^*(A, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} H^*_n(A, \varphi).$$

تعریف : دو شبه سیستم دینامیکی $(FP(M_1), m_1, \varphi_1)$ و $(FP(M_2), m_2, \varphi_2)$ را ایزومورفیک گوییم اگر تابع یک به یک و پوشا $\psi : FP(M_1) \to FP(M_2)$ وجود داشته باشد بطوریکه :

الف - $\psi(u^1_\alpha) = u^2_\alpha$,

ب - $\psi(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus_1}} x^i_{\alpha_i}) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus_2}} \psi(x^i_{\alpha_i})$,

و برای هر $x_\alpha \in FP(M_1)$ داشته باشیم:

ج - $m_2(\psi(x_\alpha)) = m_1(x_\alpha)$,

د- $\varphi_2(\psi(x_\alpha)) = \psi(\varphi_1(x_\alpha))$.

نتایج

●قضیه: اگر $MV-$ جبر Mدارای خاصیت تجزیه ریس باشد آن گاه $FP(M)$ نیز دارای خاصیت تجزیه ریس می باشد.

●قضیه: فرض کنید A و B افراز های شمارا یی از $FP(M)$ باشند آن گاه:

الف- $H(A) \geq 0$,

ب- $\max\{H(A), H(B)\} \leq H(A \vee B) \leq H(A) + H(B)$,

ج- اگر $A \preceq B$ آن گاه $H(A) \leq H(B)$.

●قضیه: فرض کنید C یک الحاق ریسی از A و B با شد آن گاه :

الف - $H(A \vee B) \geq H_C(A \mid B)$,

ب - $H(C) \geq H_C(A \mid B) + H(B)$.

●نتیجه : فرض کنید C یک الحاق ریسی از A و B با شد آن گاه:

الف-

$$\max\{H(A_1), ..., H(A_n)\} \leq H_*(A_1 \vee ... \vee A_n) \leq H^*(A_1 \vee ... \vee A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(A_i)$$

ب- $H^*(A \vee B) \geq H^*(A \mid B) + H(B)$,

ج - $H_*(A \vee B) \geq H_*(A \mid B) + H(B)$.

●قضیه: اگر $A = \{x^i_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ افراز شمارایی از شبه جبر $FP(M)$ با خاصیت تجزیه ریس باشد آن گاه $\varphi(A) = \{\varphi(x^i_{\alpha_i})\}_{i=1}^{\infty}$ یک افراز شمارا است و $H(\varphi(A)) = H(A)$.

●قضیه: اگر $C = A \vee B$ آن گاه $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(A)$.

●قضیه: اگر $(FP(M), m, \varphi)$ یک شبه سیستم دینامیکی باشد برای هر افراز شمارا A حدود زیر موجودند:

$$h_*(A,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_*^n(A,\varphi),$$
$$.h^*(A,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n^*(A,\varphi)$$

●قضیه: فرض کنید A افراز شمارایی از $FP(M)$ باشد آن گاه :

الف - $h_*(\varphi, A) \leq H(A)$,

ب - $.h^*(\varphi, A) \leq H(A)$

●قضیه: اگر دو شبه سیستم دینامیکی $(FP(M_1), m_1, \varphi_1)$ و $(FP(M_2), m_2, \varphi_2)$ با خاصیت تجزیه ریس، ایزومورفیک باشند آن گاه :

الف- $h_*(\varphi_1) = h_*(\varphi_2)$,

ب - $.h^*(\varphi_1) = h^*(\varphi_2)$

مراجع

[۱] J.S. Cánovas، J.Kupka، Topolog- ical entropy of fuzzified dynami- cal systems، Fuzzy Sets and Sys- tems ۱۶۵ (۲۰۱۱) ۳۷-۴۹.

[۲] M.Ebrahimi and B.Mosapour، The concept of entropy on D- posets، cankaya University Jour- nal of Science and Engineering ۱۰ (۲۰۱۳)،۱۵۱-۱۳۷.

[۳] M. Hasankhani and A. Bo- rumand Saeid، Semi MV -Algebras، Cankaya Univer- sity Journal of Science and Engineering، ۱۰ (۲۰۱۳)، ۵۱-۶۴.

[۴] W. Jia-Mei، W. JunDe and Ch. Minhyung، Mutual information and relative entropy of sequential effect algebras، Theor. Phys. (Beijing، China) ۵۴ (۲۰۱۰)، ۲۱۵-۲۱۸.

[۵] A. N. Kolmogorov، New met- ric invariant of transitive dynam- ical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces. Doklady of Russian Academy of Sciences، ۱۱۹(۵)(۱۹۵۸)، ۸۶۱ - ۸۶۴.

[۶] D. Mundici، Interpretation of AFC*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus. J. Functional Analysis، ۶۵ (۱۹۸۶)، ۱۵ - ۶۳.

[۷] Ya. G. Sinai، On the notion of entropy of a dynamical system. Doklady of Russian Academy of Sciences، ۱۲۴ (۱۹۵۹)، ۷۶۸ - ۷۷۱.