The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از ماتریس انتگرال گیری گگن‌بائر ترکیبی

یعقوب محمودی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز، mahmoudi@mail.com

*سیمین آقایی امیرخیزی، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز، aghaei.s۱a@gmail.com

چکیده: در این مقاله روش ماتریس انتگرال گیری گگن بائر ترکیبی را برای حل مسائل مقدار مرزی معرفی می کنیم. فرآیند مورد نظر مسأله اصلی را به فرم انتگرالی تبدیل می کند، سپس با استفاده از ماتریس انتگرال گیری گگن بائر، آن را به دستگاه معادلات خطی تبدیل می کنیم، زیرا دستگاه های خطی خوش حالت بوده و می تواند با استفاده از روش های حل استاندارد معادلات خطی به راحتی حل شود. این روش کاربرد گسترده ای در مسائل ریاضی دارد و نتایج حاصل از مثالهای عددی دقت بالای روش را نشان می دهد.

کلمات کلیدی: چندجمله ایهای‌گگن‌بائر، نقاط گاوس گگن‌بائر، انتگرال‌گیری گگن‌بائر، ماتریس انتگرال‌گیری گگن‌بائر.

مقدمه

تعداد زیادی از پدیده های فیزیکی بصورت معادلات دیفرانسیل مدل بندی می شوند. روش طیفی یکی از مشهورترین روش ها برای حل این معادلات می‌باشند. آنها یک فرآیند محاسباتی فراهم می کنند که در سه دهه گذشته محبوبیت زیادی کسب کرده است و بصورت گسترده ای برای حل اینگونه معادلات بکار می‌رود. روش های طیفی در حل معادلات دیفرانسیل به دستگاههای جبری می رسد که اغلب بد حالت هستند. در این مقاله ابتدا چند جمله ایهای گگن بائر را معرفی کرده سپس ماتریس انتگرال گیری گگن بائر ترکیبی را برای حل معادلات دیفرانسیل بیان می کنیم.

بخش یک

تعریف ۱. *براي چند جمله ایهای گگن بائر درجه n نماد $C_n^{(\alpha)}(x), n \in Z^+, \alpha > -\frac{1}{2}$ را بکار می برند. چندجمله‌ایهای گگن بائر استاندارد را می توان با رابطه بازگشتی زیر نمایش داد*

$$\begin{aligned}
&C_0^{(\alpha)}(x) = 1,\\
&C_1^{(\alpha)}(x) = x,\\
&(j+2\alpha)C_{j+1}^{(\alpha)}(x) =\\
&\qquad 2(j+\alpha)xC_j^{(\alpha)}(x) - jC_{j-1}^{(\alpha)}(x), j \geq 1.
\end{aligned} \tag{۱}$$

چند جمله ایهای گگن بائر استاندارد نسبت به تابع وزن $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ در بازه $[-1,1]$ متعامد می باشند.

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} C_m^{(\alpha)} C_n^{(\alpha)} dx = \lambda_n^{(\alpha)} \delta_{mn}, \quad m,n \in Z^+$$

که در آن $\lambda_n^{(\alpha)}$ عامل نرمالسازی می باشد

$$\lambda_n^{(\alpha)} = \frac{2^{2\alpha-1} n! \Gamma^2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(n+\alpha)\,\Gamma\left(n+2\alpha\right)}. \qquad (۲)$$

بخش دو

قضیه ۲. *فرض کنیم*

$$S_N^{(\alpha)} = \{x_k \mid C_{N+1}^{(\alpha)}(x_k) = 0, k = 0, \cdots, N\} \quad (۳)$$

مجموعه گرههای (ریشه های) گاوس-گگن بائر باشند و $f(x) \in C^\infty[-1,1]$ تابعی باشد که با استفاده از چند جمله ایهای گگن بائر تقریب زده شده باشد. دراینصورت ماتریسی مانند

$$\widehat{P}^{(1)} = \left(\widehat{p}_{ij}^{(1)}\right), i,j = 0,1,\cdots,N \qquad (۴)$$

و عددی مانند $\xi_i \in [-1,1]$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N}\left(\widehat{p}_{ik}^{(1)}\right) f(x_k) + E_N^{(\alpha)}(x_i,\xi_i) \qquad (۵)$$

که در آن

$$\widehat{p}_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^{N}\left(\lambda_j^{(\alpha)}\right)^{-1} \omega_k^{(\alpha)} C_j^{(\alpha)}(x_k) \int_{-1}^{x_i} C_j^{(\alpha)}(x)\,dx \qquad (۶)$$

$$\left(\omega_j^{(\alpha)}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{N}\left(\lambda_j^{(\alpha)}\right)^{-1}\left(C_j^{(\alpha)}(x_k)\right)^2 \qquad (۷)$$

$$\lambda_j^{(\alpha)} = \frac{2^{2\alpha-1} j! \Gamma^2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(j+\alpha)\,\Gamma\left(j+2\alpha\right)} \qquad (۸)$$

$$E_N^{(\alpha)}(x_i,\xi_i) = \frac{f^{N+1}(\xi_i)}{(N+1)!k_{N+1}^{(\alpha)}} \int_{-1}^{x_i} C_j^{(\alpha)}(x)\,dx. \qquad (۹)$$

برهان. برای اثبات به [۱] مراجعه شود. □

$\widehat{P}-$ماتریس، ماتریسی $(N+1)\times(N+1)$ می باشد و ماتریس عملیاتی انتگرال گیری گگن بائر نامیده می‌شود. $E_N^{(\alpha)}(x_i,\xi_i)$ نشان دهنده خطای تولید شده توسط انتگرال $\widehat{P}-$ماتریس به ازای هر x_i می باشد. چون مقدار خطای حاصل بستگی به پارامتر α دارد، برای کاهش خطای انتگرال‌گیری مقدار بهینه برای α انتخاب می کنیم و در نتیجه با مینیم کردن خطای برشی انتگرال‌گیری به ماتریس انتگرال گیری گگن بائر بهینه می رسیم که باعث افزایش دقت در محاسبات می‌شود.

قضیه ۳. *فرض کنیم*

$$S_{N,M} = \{z_{i,k} \mid C_{M+1}^{(\alpha_i^*)}(z_{i,k}) = 0, i = 0,\cdots,N, \quad k = 0,\cdots,M\} \qquad (۱۰)$$

مجموعه گره های (ریشه های) گاوس-گگن بائر تعمیم یافته یا الحاقی باشد، که در آن

$$\alpha_i^* = arg \min_{\alpha > -\frac{1}{2}} \eta_{i,M}^2(\alpha) \qquad (۱۱)$$

$$\eta_{i,M}(\alpha) = \int_{-1}^{x_i} C_{M+1}^{(\alpha)}/k_{M+1}^{(\alpha)} dx \qquad (۱۲)$$

$$k_{M+1}^{(\alpha)} = 2^M \frac{\Gamma(M+\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(M+2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} \qquad (۱۳)$$

همچنین فرض کنیم $f(x) \in C^\infty[-1,1]$ تابعی باشد که با استفاده از بسط سری گگن با ئر تقریب زده شده باشد، دراینصورت ماتریسی مانند

$$P^{(1)} = \left(p_{ij}^{(1)}\right) i = 0,\cdots,N, j = 0,\cdots,M. \qquad (۱۴)$$

و عددی مانند $\xi_i \in [-1,1]$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(1)}(\alpha_i^*) f(z_{i,k}) + E_M^{(\alpha_i^*)}(x_i,\xi_i). \qquad (۱۵)$$

برهان. برای اثبات به [۲] مراجعه شود. □

بخش سه

برای حل معادله دیفرانسیل با استفاده از ماتریس انتگرال گیری گگن باثر ترکیبی (HGIM) جواب معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر را

$$y''(x) = f(x)\,y'(x) + g(x)\,y(x) + r(x), \quad (۱۶)$$

$$y(0) = \beta, y(1) = \gamma. \quad (۱۷)$$

را در گره های گاوس-گگن بائر

$$x_i \in S_N^{(\alpha)} \qquad i = 0, 1, \cdots, N$$

پیدا می کنیم. برای این منظور ابتدا معادله دیفرانسیل را به معادله انتگرال تبدیل می کنیم و سپس با استفاده از انتگرال گیری P-ماتریس معادله انتگرال حاصل را به دستگاه جبری از معادلات تبدیل می کنیم. دستگاه خطی حاصل را می توانیم بفرم ماتریسی $Aw = b$ نشان دهیم. ماتریس $A = (a_{ij})$ و بردار ستونی $b = (b_i)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \left(\widehat{p}_{ij}^{(1)} - \widehat{p}_{N+1,j}^{(1)} x_i\right) f_j + \left(\widehat{p}_{ij}^{(2)} - \widehat{p}_{N+1,j}^{(2)} x_i\right)(F_j - g_j) \quad (۱۸)$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(2)} r_{ij} - x_i \left(\sum_{j=0}^{M} p_{N+1,j}^{(2)} r_{N+1,j} + \beta - \gamma\right) + \beta \quad (۱۹)$$

که در آن $f' = F$. با استفاده از حل کننده های دستگاه خطی جواب تقریبی برای دستگاه فوق حاصل می شود.

یکی از محاسن این فرمول بندی این است که دستگاه خطی حاصل در حالت کلی خوش حالت است.

مثال ۴. *مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی زیر را درنظر می گیریم*

$$y''(x) - 40xy(x) = 2,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

با جایگذاری معادله فوق در روابطه (۱۸) و (۱۹) داریم

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \left(\widehat{p}_{ij}^{(2)} - \widehat{p}_{N+1,j}^{(2)} x_i\right)(-40x_j),$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(2)} r_{ij} - x_i \left(\sum_{j=0}^{M} p_{N+1,j}^{(2)} r_{N+1,j}\right)$$

جدول(۱) نشان می‌دهد که روش ماتریس انتگرال‌گیری گگن بائر ترکیبی با انتخاب α و Nها های مختلف برای حل مسائل مقدار مرزی می تواند تقریبی بهتر از روش [۳] بدست آورد.

نتایج

دراین مقاله به حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از ماتریس انتگرال گیری گگن بائر ترکیبی می پردازیم. ایده کلیدی این روش، تبدیل مسائل مقدار مرزی به فرمول بندی انتگرالی می باشد. سپس تبدیل آنها بفرم ماتریس انتگرال گیری گگن‌بائر ترکیبی و در نهایت حل دستگاه خطی حاصل از معادلات با استفاده از حل کننده های کارآمد دستگاه خطی در فضای فیزیکی. ارائه روش ماتریس انتگرال گیری گگن بائر ترکیبی منجر به دستگاه خطی خوش حالتی شده و از تنزل دقت جلوگیری می کند. الگوریتم ارائه شده بطور عددی پایدار است و دقت طیفی را با استفاده از تعداد نسبتاً کمی از نقاط جواب ارائه می دهد که یکی از ویژگی‌های مهم برای یک روش طیفی می باشد.

ماتریس انتگرال‌گیری گگن بائر ترکیبی، قابلیت تقریب مرتبه بالاتر بدون نیاز به افزایش تعداد گره ها را دارد. نحوی اجرای روش پیشنهادی در مثالی مطرح شده است و نتایج بدست آمده با عملکرد روش پیشنهادی بهتر از سایر تکنیک هایی است که در متن های اخیر در مورد دقت جواب مطرح شده است.

مراجع

[1] K.T. Elgindy, K. A. Smith-Miles, *Solving boundry value problems, integral and integro-differential equations using Gegenbauer integration matricess*, Journal of Computational and Applied Mathematics,Vol. 237, 2013, pp. 307-325.

[2] K.T. Elgindy, K. A. Smith-Miles, *Optimal Gegenbauer quadrature over arbitrary integration nodes*, Journal of Computational and Applied Mathematics,Vol. 242, 2013, pp. 82-106.

[3] L.U. Junfeng, *Variational iteration method for solving two-point boundary value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 207,2007, pp. 92-95.

جدول ۱: مقایسه روش ماتریس انتگرال گیری گگن بائر ترکیبی با روش[۳]

x_i	جواب دقیق	روش HGIM $N=8$ $\alpha=1.5$	روش HGIM $N=12$ $\alpha=0.4$	روش تکرار وردشی	روش آدومیان	روش G–M
-0.8	-0.0509	-0.0285	-0.0272	0.3487	0.2538	0.0513
-0.6	-0.0833	0.1599	-0.0109	0.3920	0.2968	0.0840
-0.4	-0.1140	-0.0823	-0.0158	0.2859	0.1473	0.1151
-0.2	-0.1356	-0.0242	0.0289	0.1458	-0.0250	0.1377
$0.$	-0.1194	-0.1662	0.0351	0.0471	-0.1188	0.1228
0.2	-0.0259	-0.0887	-0.0052	0.0251	-0.1354	0.0306
0.4	0.1463	-0.3456	-0.0973	0.0748	0.1141	-0.1418
0.6	0.2964	-0.7681	-0.4445	0.1508	-0.0839	-0.2942
0.8	0.2542	0.1087	0.0433	0.1677	-0.5241	-0.2544