The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

برنامه ریزی چند هدفی فازی با رویکرد دو قطبی

داریوش بخشایش، دانشجوی کارشناسی ارشد تحقیق در عملیات، دانشگاه بیرجند، dariushbakhshayesh@birjand.ac.ir

حمید بیگدلی *، دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه بیرجند، h.bigdeli@birjand.ac.ir

حسن حسن‌پور، عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، hhassanpour@birjand.ac.ir

چکیده: در این مقاله یک روش برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی با رویکرد دوقطبی ارائه می شود. در روش حل پیشنهادی، ابتدا مسئله‌ی برنامه‌ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چند هدفی معمولی تبدیل و سپس برای رسیدن به آرمان‌های تصمیم گیرنده از رویکرد دو قطبی استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی، روش دو قطبی، عملگر تجمیع

مقدمه

بسیاری از تصمیم گیری‌های مدیران تحت تاثیر عوامل مختلف کمی و کیفی قرار دارد که نکته‌ی قابل ذکر، وجود تقابل میان این عوامل است. ساکاوا [۳] یک روش برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی ارائه داد و د. دیوبی و آ. مهرا [۱] یک روش دو قطبی برای حل مسائل چند هدفی فازی با ضرایب قطعی ارائه دادند. در این مقاله، یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چند هدفی که تمام پارامترهای آن فازی‌اند، با درنظر گرفتن آرمان‌های تصمیم گیرنده، به روش دوقطبی حل می‌شود.

مفاهیم اولیه

فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع و شامل عناصری باشد که با x مشخص می‌شوند. در این صورت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X، یک مجموعه از زوج‌های مرتب به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))|x\in X\}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$ را تابع عضویت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را درجه‌ی عضویت عنصر $x\in X$ گویند. مجموعه‌ی عناصری از $\tilde{A}$ که درجه‌ی عضویت آنها بزرگتر از صفر است را تکیه‌گاه $\tilde{A}$ گویند. یعنی:

$$Supp(\tilde{A})=\{x\in X:\mu_{\tilde{A}}(x)>0\}$$

فرض کنید $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی مرجع X باشد و $\alpha\in[0,1]$. در این صورت

مجموعه‌ی α-برش $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $\tilde{A}_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}$. مجموعه‌ی فازی نرمال، مجموعه‌ای است که درجه‌ی عضویت حداقل یکی از اعضای آن برابر یک باشد. همچنین یک عدد فازی،

مجموعه‌ای فازی مانند $\tilde{M}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ با شرایط زیر می‌باشد:

۱. یک نگاشت پیوسته از $\mathbb{R}^1$ به بازه‌ی $[0,1]$ باشد.

۲. $\forall x \in (-\infty, c],\ \mu_{\tilde{M}}(x) = 0$

۳. در بازه $[c, a]$ اکیدا صعودی و پیوسته باشد.

۴. $\forall x \in [a, b],\ \mu_{\tilde{M}}(x) = 1$

۵. در بازه $[b, d]$ اکیدا نزولی و پیوسته باشد

۶. $\forall x \in [d, \infty),\ \mu_{\tilde{M}}(x) = 0$

تعریف ۱[۱] : تابع $f : I^p \longrightarrow I$ را که $I = [0,1]$ عملگر تجمیع گوییم هرگاه:

۱. به ازای $p = 1$ ، $f(x) = x$

۲. $f(0, ..., 0) = 0, f(1, ..., 1) = 1$

۳. اگر $(y_1, ..., y_p) \leq (x_1, ..., x_p)$ آنگاه $f(x_1, ..., x_p) \leq f(y_1, ..., y_p)$

تعریف ۲ : نگاشت $F : I^p \longrightarrow I$ را که به ازای هر $(a_1, ..., a_p) \in I^p$، $F(a_1, ..., a_p) = \sum_{k=1}^{p} w_k b_k$، که در آن $w_k \in [0,1]$، $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$ و b_k، k امین عنصر بزرگ مجموعه‌ی $\{a_1, ..., a_p\}$است، یک عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده با بعد p می‌نامند. برای نمونه عملگرهای max و min دو عملگر میانگین وزن‌دارمرتب شده با بردارهای وزن به ترتیب $(1, ..., 0)$ و $(0, ..., 1)$ می‌باشند.

ساختار مسئله و روش پیشنهادی

یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & \tilde{maximize}\ (\tilde{C}_1 x, ..., \tilde{C}_k x)^T \\ & s.t \\ & x \in X(\tilde{A}, \tilde{B}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}_i x \tilde{\leq} \tilde{B}_i \\ & i = 1, ..., m, x \geq 0\} \end{aligned} \tag{1}$$

که $\tilde{C}_r = (\tilde{C}_{r1}, ..., \tilde{C}_{rn})$، $\tilde{A}_i = (\tilde{A}_{i1}, ..., \tilde{A}_{in})$ و $\tilde{B}_i$ نشان دهنده‌ی پارامترهای فازی بکار رفته در توابع هدف و محدودیت‌ها هستند. نماد $\tilde{\leq}$ در قیود به معنی $\leq$ فازی و نماد $\tilde{max}$ در توابع هدف نشان دهنده‌ی بیشینه سازی فازی است. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن مقدار آرمانی (مقدار مورد انتظار) $\bar{Z}_r$ برای تابع هدف r ام مسئله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} & Find\ x \\ & s.t \\ & \tilde{C}_r x \tilde{\geq} \bar{Z}_r \quad r = 1, ...k \\ & \tilde{A}_i x \tilde{\leq} \tilde{B}_i \quad i = 1, ..., m \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

برای حل مسئله، ابتدا با در گرفتن $\alpha \in [0, 1]$ مسئله‌ی (۱) را به مسئله‌ی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \tilde{maximize}\ (c_1 x, ..., c_k x)^T \\ & s.t \\ & x \in X(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \tilde{\leq} b_i \\ & i = 1, ..., m, x \geq 0\} \\ & (a, b, c) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن
$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_\alpha = \{(a, b, c) \mid a \in \tilde{A}_\alpha, b \in \tilde{B}_\alpha, c \in \tilde{C}_\alpha\}$
را مجموعه‌ی α-برش $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ گویند. درمسئله‌ی فوق، a، b و c همچون x مجهول می‌باشند. لذا مسئله‌ی (۳) یک مسئله‌ی غیر خطی است. اما توجه به اینکه $x \geq 0$ و نواحی شدنی برای a_{ij}، c_{rj} و b_i به ترتیب بازه‌های

بسته‌ی $[a^L_{ij\alpha}, a^R_{ij\alpha}]$، $[c^L_{rj\alpha}, c^R_{rj\alpha}]$ و $[b^L_{i\alpha}, b^R_{i\alpha}]$ می‌باشند، مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & max\tilde{i}mize\ (c^R_{۱\alpha}x, ..., c^R_{k\alpha}x)^T \\ & s.t \\ & a^L_{i\alpha}x \tilde{\leq} b^R_{i\alpha}, i = ۱, ..., m \\ & x \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن $a^L_{i\alpha} = [a^L_{i۱\alpha}...a^L_{in\alpha}]$ و $b^L_{i\alpha} = [b^R_{i۱\alpha}...b^R_{in\alpha}]^T$.
اکنون توابع عضویت خطی زیر را برای توابع هدف و محدودیت‌های مسئله‌ی فوق در نظر می‌گیریم:

$$\mu_{G_r}(c^R_{r\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & c^R_{r\alpha}x < \bar{Z}_r - g_r \\ ۱ - \frac{\bar{Z}_r - c^R_{r\alpha}x}{g_r} & \bar{Z}_r - g_r \leq c^R_{r\alpha}x < \bar{Z}_r \\ ۱ & c^R_{r\alpha}x \geq \bar{Z}_r \end{cases}$$

$$\mu_{R_i}(a^L_{i\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & a^L_{i\alpha}x > b^R_{i\alpha} + r_i \\ ۱ - \frac{a^L_{i\alpha}x - b^R_{i\alpha}}{r_i} & b^R_{i\alpha} < a^L_{i\alpha}x \leq b^R_{i\alpha} + r_i \\ ۱ & a^L_{i\alpha}x \leq b^R_{i\alpha} \end{cases}$$

که g_r انحراف مجاز تابع هدف r ام از آرمان $\bar{Z}_r$ به سمت چپ و r_i انحراف مجاز $a^L_{i\alpha}x$ از $b^R_{i\alpha}$ به سمت راست می‌باشند. یکی از روش‌های حل مسائل چند هدفی فازی به شکل (۴)، روش دوقطبی است که در آن برای تجمیع توابع عضویت اهداف، از عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده و برای تجمیع توابع عضویت محدودیت‌ها، از عملگر مینیمم استفاده می‌شود [۱]. یعنی قرار میدهیم:

$$\mu_{D_P}(x) = F(\mu_{G_۱}(c^R_{۱\alpha}x), ..., \mu_{G_k}(c^R_{k\alpha}x))$$

$$\mu_{D_N}(x) = min(\mu_{R_۱}(a^L_{۱\alpha}x), ..., \mu_{R_m}(a^L_{m\alpha}x))$$

ساختار عملگر F به گونه‌ای است که اگر میزان رضایت در دستیابی به آرمان یک هدف افزایش یابد، رضایت کل تصمیم گیرنده از جواب نیز باید افزایش یابد؛ یعنی عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده، اکیداً یکنواست. پس از معرفی $\mu_{D_P}(x)$ و $\mu_{D_N}(x)$، با به کار گیری تصمیم فازی بلمن و زاده [۱] برای مجموعه‌های فازی D_N و D_P، مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & max\ min\ \{\mu_{D_P}(x), \mu_{D_N}(x)\} \\ & s.t \\ & x \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۵)$$

یا به طور معادل

$$\begin{aligned} & max\ \lambda \\ & s.t \\ & F(\mu_{G_۱}(c^R_{۱\alpha}x), ..., \mu_{G_k}(c^R_{k\alpha}x) \geq \lambda \\ & \mu_{R_i}(a^L_{i\alpha}x) \geq \lambda, \quad i = ۱, ..., m \\ & x \geq ۰ \\ & ۰ \leq \lambda \leq ۱ \end{aligned} \qquad (۶)$$

با حل این مسئله یک جواب رضایت بخش برای تصمیم گیرنده به دست می‌آید.
مثال: مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{llll} m\tilde{a}x & \widetilde{C}_{۱۱}x + ۲x_۲ \tilde{\geq} ۴ & g_۱ = ۲ \\ m\tilde{a}x & ۲x_۱ + \widetilde{C}_{۲۲}x_۲ \tilde{\geq} ۲ & g_۲ = ۱ \\ s.t & x_۱ + \widetilde{A}_{۱۲}x_۲ \tilde{\leq} ۳ & r_۱ = ۱ \\ & ۲x_۱ + x_۲ \tilde{\leq} \widetilde{B}_۲ & r_۲ = ۲ \\ & x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰ & \end{array} \qquad (۷)$$

که در آن $\widetilde{C}_{۱۱}$، $\widetilde{C}_{۲۲}$، $\widetilde{A}_{۱۲}$ و $\widetilde{B}_۲$ اعداد فازی مثلثی با توابع عضویت

$$\mu_{\tilde{C}_{۱۱}}(c_{۱۱}) = max(۱ - ۰/۵|c_{۱۱} - ۴|, ۰)$$
$$\mu_{\tilde{C}_{۲۲}}(c_{۲۲}) = max(۱ - |c_{۲۲} - ۰/۵|, ۰)$$
$$\mu_{\tilde{A}_{۱۲}}(a_{۱۲}) = max(۱ - ۲|a_{۱۲} - ۱|, ۰)$$
$$\mu_{\tilde{B}_۲}(b_۲) = max(۱ - ۲|b_۲ - ۰/۷۵|, ۰)$$

می‌باشند. برای $\alpha = ۰/۵$ و به کمک تعریف مجموعه‌ی α-برش $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$، داریم:

$$c_{۱۱} \in [۳, ۵] \quad , \quad c_{۲۲} \in [۰, ۱]$$
$$a_{۱۲} \in [۰/۷۵, ۱/۲۵] \quad , \quad b_۲ \in [۰/۵, ۱]$$

لذا مسئله‌ی (۴) را به صورت زیرداریم:

$$\begin{array}{lll} m\tilde{a}x & ۵x_۱ + ۲x_۲ \tilde{\geq} ۴ & g_۱ = ۲ \\ m\tilde{a}x & ۲x_۱ + x_۲ \tilde{\geq} ۲ & g_۲ = ۱ \\ s.t & x_۱ + ۰٫۷۵x_۲ \tilde{\leq} ۳ & r_۱ = ۱ \\ & ۲x_۱ + x_۲ \tilde{\leq} ۱ & r_۲ = ۲ \\ & x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰ & \end{array} \qquad (۸)$$

با در نظرگرفتن آرمان‌های ۴ $= \bar{Z}_۱$ و ۲ $= \bar{Z}_۲$، حدود تخلف مجاز ۲ $= g_۱$ و ۱ $= g_۲$ برای توابع هدف و ۱ $= r_۱$ و ۲ $= r_۲$ برای قیود، طبق توابع عضویت خطی درنظر گرفته شده برای توابع هدف و محدودیت‌ها داریم:

$$\mu_{G_۱}(c^R_{۱\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & c^R_{۱\alpha}x < ۲ \\ ۲٫۵x_۱ + x_۲ - ۱ & ۲ \leq c^R_{۱\alpha}x < ۴ \\ ۱ & c^R_{۱\alpha}x \geq ۴ \end{cases}$$

$$\mu_{G_۲}(c^R_{۲\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & c^R_{۲\alpha}x < ۱ \\ ۲x_۱ + x_۲ - ۱ & ۱ \leq c^R_{۲\alpha}x < ۲ \\ ۱ & c^R_{۲\alpha}x \geq ۲ \end{cases}$$

$$\mu_{R_۱}(a^L_{۱\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & a^L_{۱\alpha}x > ۴ \\ -x_۱ - ٫۷۵x_۲ + ۴ & ۳ < a^L_{۱\alpha}x \leq ۴ \\ ۱ & a^L_{۱\alpha}x \leq ۳ \end{cases}$$

$$\mu_{R_۲}(a^L_{۲\alpha}x) = \begin{cases} ۰ & a^L_{۲\alpha}x > ۳ \\ -x_۱ - ٫۵x_۲ + ۱٫۵ & ۱ < a^L_{۲\alpha}x \leq ۳ \\ ۱ & a^L_{۲\alpha}x \leq ۱ \end{cases}$$

حال اگر F را عملگر max با بردار وزن $(۱, ۰)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\mu_{D_P}(x) = ۲٫۵x_۱ + x_۲ - ۱$$

و در نهایت مسئله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} max & \lambda \\ s.t & ۲٫۵x_۱ + x_۲ - ۱ \geq \lambda \\ & -x_۱ - ۰٫۷۵x_۲ + ۴ \geq \lambda \\ & -x_۱ - ۰٫۵x_۲ + ۱٫۵ \geq \lambda \\ & ۰ \leq \lambda \leq ۱, \quad x \geq ۰ \end{array} \qquad (۹)$$

که از حل این مسئله جواب رضایت بخش $(\lambda^*, x^*_۱, x^*_۲) = (۰٫۷۸۵۷, ۰٫۷۱۴۳, ۰)$ بدست می‌آید.

نتایج

در این مقاله یک روش دو قطبی برای حل مسئله‌ی برنامه ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی و با درنظرگرفتن آرمان‌هایی برای توابع هدف، ارائه شد. در روش پیشنهادی ابتدا یک مسئله‌ی برنامه ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی به صورت یک مسئله‌ی برنامه ریزی قطعی تبدیل شده و سپس برای برآورده ساختن آرمان‌های تصمیم گیرنده برای اهداف و محدودیت‌ها به ترتیب از دو عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده و مینیمم برای تجمیع آنها استفاده می‌شود. سپس با به کار گیری تصمیم فازی بلمن و زاده [۱] یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی معمولی به دست آمد که با حل این مسئله، یک جواب رضایت بخش برای تصمیم گیرنده به دست می‌آید.

مراجع

[1] D. Dubey, A. Mehra, *A bipolar approach in fuzzy multi-objective linear programming*, Fuzzy Sets and Systems, 2013,pp.127-141.

[2] H.J. Zimmerman, *Fuzzy Programming and Linear Programming with several Objective functions*. Fuzzy Sets and Systems,1978,pp.45-55.

[3] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York and London, 1993.