کلاس های خاصی از چندجمله ایهای متعامد بدست آمده از مسأله‌ی اشتروم- لیوویل

اعظم عابدزاده ، دانشجوی کارشاسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، azam.abedzadeh@modares.ac.ir
محمدرضا اصلاحچی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس ، eslahchi@modares.ac.ir

چکیده: مدل بلک-شولز به عنوان یک مدل پایه برای قیمت‌گذاری بازار مشتقات دارای معایبی است که از جمله معایب آن، ثابت در نظر گرفتن نوسانات بازار می‌باشد که منطبق بر واقعیت بازارهای مالی نیست. به همین دلیل این مدل نمی‌تواند تغییرات قیمت را به خوبی توضیح دهد. برای رهایی از این محدودیت در این مقاله از مدل نوسان تصادفی هستون استفاده می‌کنیم و با به کار گرفتن روش‌های عددی به ارزیابی اختیارات متعارف می‌پردازیم.
کلمات کلیدی: قیمت‌گذاری اختیارات، اختیارات متعارف، اختیار وابسته به مسیر، روش‌های عددی، شبیه سازی مونت کارلو

مقدمه

سیستم چندجمله ای متعامد کلاسیک (OPS) [۱] به وسیله هرمیت، لاگور و ژاکوبی به عنوان جوابی چندجمله‌ای برای مسأله‌ی اشتروم-لیوویل، معرفی می‌شوند. بنابر قضیه‌ی بوشنر: اگر دنباله‌ای نامتناهی از چندجمله‌ایها $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ که در معادله‌ی مقدار ویژه‌ی مرتبه‌ی دو به فرم زیر

$$p(x)P_n''(x)+q(x)P_n'(x)+r(x)P_n(x)=\lambda_n P_n(x) \quad (۱)$$

صدق کند آنگاه چندجمله‌ایهای $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ باید به ترتیب از درجه ی 2، 1 و 0 باشد [1]. بعلاوه اگر دنباله $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ جوابی چندجمله‌ای برای مسأله‌ی اشتروم-لیوویل، باشد آنگاه بانضمام لحاظ کردن تغییر متغیر آفینی باید یکی از چندجمله‌ایهای متعامد کلاسیک ژاکوبی، لاگور یا هرمیت باشد. مسأله‌ی اشتروم- لیوویل در حالت کلی به فرم (1) که در آن چندجمله‌ایهای $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب از درجه‌ی $m+2$، $m+1$ و m است. به عنوان مثال مسأله‌ی اشتروم- لیوویل X_1−ژاکوبی معرفی شده در [2] به صورت زیر است:

$$T_{\alpha,\beta}(y)=(x^2-1)y''+2(a)\left(\frac{1-bx}{b-x}\right)((x-c)y'-y), \quad (۲)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب از درجه ی 3، 2 و 1است. توجه کنید که

$$a=\frac{1}{2}(\beta-\alpha), b=\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}, c=b+\frac{1}{a}. \quad (۳)$$

در این مقاله دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای متعامد را معرفی می‌کنیم که توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتروم لیوویل

[۱] Orthogonal Polynomial Systems

به فرم (1) می باشد که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب از درجه‌ی 4، 3 و 2 است. این دنباله با چندجمله‌ای از درجه‌ی دو آغاز می‌شود. در بخش دوم نشان می دهیم که این دو دنباله از عملگر گرام اشمیت روی دنباله‌ای از چندجمله‌ایها و تابع وزنی گویا بدست می‌آید و هم چنین معادله دیفرانسیل مرتبه دو مربوط به آنها را معرفی می کنیم. در بخش سوم ثابت می‌کنیم که این دو دنباله چندجمله ای اصلاح شده در فضای L^2 مربوطه چگال است. در بخش چهارم ویژگی هایی از قبیل نمایش رودریگز، نرم چندجمله‌ایهای متعامد، رابطه‌ی بازگشتی و ریشه‌های این چندجمله‌ایها را بررسی می‌کنیم.
در پایین قسمتی از مطالبی را که قرار است در بخش یکم مطرح کنیم را می آوریم تا خواننده با نحوه ی بدست آوردن چندجمله ایها آشنا شود.
چندجمله ایهای اصلاح شده ژاکوبی تحت عملگر گرام اشمیت روی چندجمله ایهای

$$u_2 = (x+d)^2, u_i = (x+d)^2 x^{i-2}, i \geq 3. \quad (۴)$$

و تابع وزن $W(x)$ بدست می آید.

$$W(x) = \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x+d)^4} \quad (۵)$$

که در آن

$$\alpha, \beta > -1, sgn\alpha = sgn\beta \quad (۶)$$

و $|d| > 1$ است.
مسأله ی اشتروم لیوویل چندجمله ی اصلاح شده ژاکوبی به فرم زیر است:

$$(x+d)^2 p(x) z''(x) + (q(x)(x+d)^2 - 4(x+d)) z'(x) +$$

$$(6p(x) - 2q(x)(x+d)) z(x) = \lambda_n z(x) \quad (۷)$$

که $p(x)$ و $q(x)$ همان ضرایب موجود در مسأله اشتروم ژاکوبی کلاسیک است و

$$\lambda_n = (n-2)(\alpha+\beta+n-1), n \geq 2. \quad (۸)$$

چندجمله ایهای اصلاح شده لاگور و مسأله ی اشتروم لیوویل آن به همین ترتیب بدست می آید.

مراجع

[۱] S. Bochner، Uber Sturm-Liouvillsche Polynomsysteme، Z. Math. ۲۹. (۱۹۲۹) ۷۳۰-۷۳۶

[۲] D. Gomez-Ullate، N. Kamran، R. Milson، An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem، J. Math. Anal. Appl. ۳۵۹ (۲۰۰۹) ۳۵۲-۳۶۷

[۳] M. A. Al-Gwaiz، Sturm-Liouville theory and its applications، Springer-Verlag London Limited ۲۰۰۸