Archive of SID

مقایسه‌ی روش‌های LMAPS و LDQ برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان

ابوالفضل عبداله زاده* ، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، aboalfazl.zadeh@yahoo.com
جواد اکبری ، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، javad.akbari@birjand.ac.ir
امین کرابی ، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه دامغان، amin.karrabi۱۹۸۷@gmail.com

چکیده:
در این مقاله مقایسه‌ای را بین جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان با دو روش بدون شبکه‌ی مبتنی بر توابع پایه شعاعی $RBFs$ که عبارتند از روش محلی جواب‌های خاص تقریبی $(LMAPS)$ و روش محلی DQ مبتنی بر $RBFs$ که همان (LDQ) می‌باشد، خواهیم داشت. روش رانگ-کوتا برای طرح‌های گام زمانی اختیار شده است. آزمایشات عددی نشان می‌دهند که روش $(LMAPS)$ و روش (LDQ) قادر به حل مسائل مقدار مرزی اولیه برای معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان مکانی با دقت و بازدهی بالایی می‌باشند.
کلمات کلیدی: توابع پایه شعاعی ، تربیع دیفرانسیل محلی، روش رانگ-کوتا، روش محلی جواب‌های خاص.

مقدمه

به تازگی، روش‌های بدون شبکه‌ی مبتنی بر $RBFs$ به علت راحتی و بازدهی‌شان در حل $PDEs$ و به طور خاص در مورد معادلاتی با ابعاد بالا و دامنه‌ی نامنظم، توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند. در ابتدا توسط کانزا [۱]، خاصیت ذاتی بدون شبکه بودن $RBFs$، که به طور گسترده توسط محققان برای حل $PDEs$ خطی و غیرخطی مورد بحث قرار گرفت [۲، ۳]، پیشنهاد شد. این روش‌ها، نه فقط به خاطر دقت طیفی [۴]، بلکه به خاطر توانایی‌شان در سروکار داشتن با داده‌های پراکنده بدون استفاده از هیچ شبکه‌ای، جالب می‌باشند. اما روش‌های سراسری $RBFs$ با استفاده از تعداد معینی نقاط هم‌مکانی در کل دامنه شکل می‌گیرد، که به طور کلی باعث ایجاد ماتریس متراکم و پر می‌شود و علاوه بر این در انتخاب پارامترشکل $RBFs$ بسیار حساس می‌باشند. این مانعی برای استفاده از روش‌های مبتنی بر $RBFs$ در حل مسائل بزرگ‌مقیاس می‌باشد. تکنیک‌های مختلفی برای دور زدن این موضوع ارائه شده‌اند، در بین این

www.SID.ir

Archive of SID

تکنیک‌های جدید، روش بدون شبکه‌ی مبتنی بر $RBFs$ محلی‌شده به نظر می‌رسد در سروکارداشتن با یک تعداد زیاد از نقاط هم‌مکانی کارامدتر باشد و حساسیت کمتری نسبت به تغییر پارامترشکل داشته باشد.
در این مقاله، دو روش بدون شبکه‌ی محلی‌شده را برای معادلات سهموی مقایسه خواهیم کرد. اولین روش، $LMAPS$ است که روش محلی‌شده‌ی جواب‌های خاص تقریبی $(MAPS)$ می‌باشد. دومین روش که در نظر گرفته خواهد شد، LDQ می‌باشد.

فرمول‌بندی $LMAPS$ و LDQ

روش $LMAPS$

معادله وابسته به زمان :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u = H(X, u, u_x, u_y), \qquad X \in \Omega, \quad (۱)$$

با شرایط اولیه:

$$u(X, t_\circ) = u_o, \qquad X \in \Omega \cup \partial\Omega, \quad (۲)$$

و شرایط مرزی دیریکله:

$$Bu = g(X), \qquad t \geq t_\circ, \quad X \in \partial\Omega, \quad (۳)$$

را در نظر می‌گیریم، که λ ثابت داده شده، Δ عملگر خطی مرتبه دوم لاپلاس و B عملگر مرزی می‌باشد. برای راحتی، جمله‌ی ناهمگن $H(X, u, u_x, u_y)$ می‌تواند به‌فرم زیر بازنویسی شود:

$$H(X, u, u_x, u_y) = -au_x - bu_y - cu + f(X), \quad (۴)$$

که a، b و c ضرایب توابع داده شده‌اند. a و b وابسته به u، $X = (x, y)$ و c وابسته به X با قاعده‌ی معینی می‌باشد. فرض کنید X_p یک نقطه‌ی هم‌مکانی دلخواه در Ω باشد. Ξ_p را نزدیکترین n_sنقطه‌ی حامی $\{X\}_{j=1}^{n_s}$ به X_p، درون دامنه تأثیر مربوط به آن تعریف می‌کنیم. با روش محلی جواب‌های خاص، $u(X_p)$ می‌تواند با ترکیب خطی از n_s تابع پایه شعاعی به فرم زیر تقریب زده شود:

$$u(X_p) \simeq \hat{u}(X_p) = \sum_{j=1}^{n_s} a_j \Phi\left(\|X_p - X_j\|\right), X_P \in \Xi_p, \quad (۵)$$

که $\|.\|$، نرم اقلیدسی و $\{a_j\}_{j=1}^{n_s}$ ضرایب مجهول‌اند که باید تعیین شوند. همچنین Φ در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\Delta \Phi(\|X - X_j\|) = \phi(\|X - X_j\|). \quad (۶)$$

در این جا فقط فرض می‌کنیم که $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ که $r = \|X - X_j\|$. با انتگرالگیری مستقیم از معادله‌ی (۶) داریم:

$$\Phi(r) = \frac{1}{9}(4c^2 + r^2)(\sqrt{c^2 + r^2}) - \frac{c^3}{3} ln(c + \sqrt{r^2 + c^2}).$$

توجه کنیم که معادله‌ی (۵) می‌تواند به فرم ماتریسی زیر نوشته شود:

$$\hat{u}(X_p) = \mathbf{\Theta_{n_s}} \mathbf{a_{n_s}}, \quad (۷)$$

که $\mathbf{\Theta_{n_s}} = [\Phi\left(\|X_p - X_1\|\right), ..., \Phi\left(\|X_p - X_{n_s}\|\right)]$ و $\mathbf{a_{n_s}} = [a_1, a_2, ..., a_{n_s}]^T$. از اینکه $\{X_j\}_{j=1}^{n_s} \subset \Xi_p$ ، معادله‌ی (۷) برای هر X_j برقرار می‌باشد. بنابراین ضرایب مجهول a_j با حل سیستم خطی‌ای که به فرم زیر می‌باشد، تعیین می‌شوند:

$$\mathbf{\Phi_{n_s}} \mathbf{a_{n_s}} = \mathbf{\hat{u}_{nS}}, \quad (۸)$$

که،

$$\mathbf{\hat{u}_{n_s}} = [\hat{u}(X_1), ..., \hat{u}(X_{n_s})]^T$$

و

$$\mathbf{\Phi_{n_s}} = [\Phi\left(\|X_j - X_i\|\right)]_{1 \leq i,j \leq n_s}$$

ضرایب بردار $\mathbf{a_{n_s}}$ می‌توانند از معادله‌ی (۸) به صورت زیر بدست آیند:

$$\mathbf{a_{n_s}} = \mathbf{\Phi_{n_s}^{-1}} \mathbf{\hat{u}_{n_s}}. \quad (۹)$$

www.SID.ir

Archive of SID

بعد از آن، طرح تفاضلی تعمیم‌یافته‌ی شبه-گسسته از معادله‌ی (۱) که می‌تواند به فرم زیر تقریب زده شود را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{du(X_p)}{dt} = \mathbf{\Theta_{n_s}} \mathbf{a_{n_s}} + f(X_p), \qquad (۱۰)$$

که

$$\mathbf{\Theta_{n_s}} = (\theta_p^۱, \theta_p^۲, ..., \theta_p^{n_s})$$

و

$$\theta_p^i = \lambda\phi(\|X_P - X_j\|) - a\Phi_x(\|X_P - X_j\|) - \Phi_y(\|X_P - X_j\|) - c\Phi(\|X_P - X_j\|) \text{ b}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۹) در معادله‌ی (۱۰) داریم:

$$\frac{du(X_p)}{dt} = (\mathbf{\Theta_{n_s}} \mathbf{\Phi_{n_s}^{-۱}}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n_s}} + f(X_p), X_p \in \Xi_p \qquad (۱۱)$$

با نمادگذاری $\mathbf{\Psi_{n_s}}(X_p) = (\Theta_{n_s} \Phi_{n_s}^{-۱})$، معادله‌ی (۱۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{du(X_p)}{dt} = \mathbf{\Psi_{n_s}}(X_p) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n_s}} + f(X_p), \quad X_p \in \Xi_p, \quad t \geq t_۰. \qquad (۱۲)$$

روش تربیع دیفرانسیل محلی

برای روش LDQ، یک تابع $u(X)$ و مشتقاتش در یک نقطه‌ی X_i با یک ترکیب خطی وزن دار شده‌ی مقادیر تابع $u(X_j)$ در نقاط $\{X_j\}_{j=۱}^{n_s}$ درون یک دامنه‌ی حامی X_i تقریب زده می‌شود. آن نیازمند آن است که هر الگو شامل نقاط مجاور $\{X_j\}_{j=۱}^{n_s}$، باید به طور محلی با مرکز X_i متناظرش مرتبط باشد. تقریب DQ، mامین مرتبه مشتق یک تابع هموار $u(X)$ در X_i می‌تواند بفرم زیر بیان شود:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_k^m}|_{X=X_i} = \sum_{j=۱}^{n_s} w_{ij}^{(m)} u(X_j), \qquad (۱۳)$$

که $u(X_j)$ و $w_{ij}^{(m)}$ بترتیب مقادیر توابع در این نقاط و ضرایب وزن مربوطه می‌باشند. x_k معرف kامین جهت مختصاتی می‌باشد. برای راحتی، قرار می‌هیم: $\phi_i(X) = \phi(\|X - X_i\|)$. با جایگذاری تابع پایه شعاعی MQ در معادله‌ی (۱۳)، می‌توانیم ضرایب متناظر با mامین مرتبه مشتق را همانند زیر بدست آوریم:

$$\frac{\partial \phi_l^m(X_l)}{\partial x_i^m} = \sum_{j=۱}^{n_s} w_{ij}^{(m)} \phi_i(X_j), \quad l = ۱, ۲, ..., n_s \qquad (۱۴)$$

اگر ماتریس ضرایب معادلات خطی بالا نامنفرد باشد، یک جواب منحصر به فرد وجود دارد. در حقیقت، اگر ماتریس ضرایب به طور مشروط معین مثبت باشد [۵]، آنگاه نامنفردی ماتریس ضرایب برای نقاط حامی مجزا تضمین شده است. هنگامیکه ضرایب وزن $w_{ij}^{(m)} (j = ۱, ۲, ..., n_s)$ با حل معادله‌ی (۱۴) محاسبه شدند، آنها در معادله‌ی (۱۳) جایگزین می‌شوند. بعد از گسسته‌سازی مکانی با استفاده از تقریبات LDQ در معادله‌ی (۱)، طرح تفاضلی شبه-گسسته می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$\frac{du(X_p)}{dt} = \lambda \sum_{j=۱}^{n_s} \left(w_{pj}^{(۲x)} + w_{pj}^{(۲y)} \right) u(X_j) - a \sum_{j=۱}^{n_s} w_{pj}^{(۱x)} u(X_j) - b \sum_{j=۱}^{n_s} w_{pj}^{(۱y)} u(X_j) - cu(X_p) + f(X_p), \qquad (۱۵)$$

که $w_{pj}^{(۱x)}$، $w_{pj}^{(۱y)}$، $w_{pj}^{(۲x)}$ و $w_{pj}^{(۲y)}$ بترتیب معرف ضرایب وزن‌های محاسبه‌شده برای اولین و دومین مرتبه‌ی مشتق در مسیرهای x و y می‌باشند.

گسسته‌سازی زمان رانگ-کوتا

برای گسسته‌سازی زمانی معادلات (۱۲) و (۱۵)، $ODEs$ حاصل از شبه-گسسته‌سازی‌شده‌ی $PDEs$ از گام زمانی n تا $n+۱$ از طرح رانگ کوتا مرتبه-چهار

www.SID.ir

Archive of SID

به فرم زیر استفاده شده است:

$$u^{(1)} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^n),$$
$$u^{(2)} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)}),$$
$$u^{(3)} = u^n + \Delta t L(u^{(2)}),$$
$$u^{(n+1)} = -\frac{1}{3}u^n + \frac{1}{3}u^{(1)} + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{1}{3}u^{(3)} + \frac{1}{6}\Delta t L(u^{(3)}) \qquad (16)$$

,

که عملگر مکانی L با سمت راست معادله‌ی (۱۲) یا (۱۵) ارزیابی شده است و $u^{(1)}$، $u^{(2)}$ و $u^{(3)}$ مقادیر از پیش تعیین شده می‌باشند. از جایی که مقادیر تابعی در نقاط درونی، درون هر گام زمانی به عنوان مجهول فرض شده‌اند، همه‌ی مشتقات مکانی در این نقاط شبکه، در هر جهت مختصاتی گسسته‌سازی شده‌اند. جواب بدست‌آمده در گام زمانی پایین‌تر به عنوان شرط اولیه گرفته می‌شود. محاسبات می‌تواند گام به گام با استفاده از شرایط مرزی و اولیه‌ی مربوطه انجام شده باشد.

نتایج

در این مقاله، دقت روشهای $LMAPS$ و LDQ را بررسی کردیم. توجه کنیم که LDQ نیازمند به محاسبه ضرایب وزن برای تمام مرتبه‌های مشتق در هر جهت مختصاتی و ذخیره‌ی جواب فرایند برای استفاده‌ی آینده می‌باشد. این ممکن است از حافظه‌ی بسیار زیادی از کامپیوتر استفاده کند، بخصوص برای مسائل بزرگ‌مقیاس. علاوه براین، روش $LMAPS$ از MQی به عنوان تابع پایه استفاده می‌کند درحالیکه در روش LDQ، مشتق MQ به عنوان تابع شعاعی، استفاده می‌شود. ازاینرو، انتظار می‌رود که روش $LMAPS$ به علت استفاده از تابع پایه‌ای هموارتر، نسبت به روش LDQ باثبات‌تر و دقیق‌تر باشد. در آزمون‌های عددی، روش $LMAPS$ از نظر دقت نسبت به روش LDQ کمی بهتر است. به‌طور کلی، هر دو روش موثرند و از پتانسیل خوبی برای مسائل کاربردی برخوردار هستند. به طور کلی، روش $LMAPS$ به نظر می‌رسد برای حل $PDEs$ شامل عملگر لاپلاس مرتبه دوم جذاب باشد. برای $PDEs$ بدون عملگر لاپلاس، همانند معادله‌ی آب‌های کم‌عمق، روش $LMAPS$ ممکن است قابل اجرا باشد. روش LDQ برای حل یک کلاس گسترده از $PDEs$ مناسب‌تر می‌باشد. ضرایب وزن ترکیب خطی برای همه‌ی مراتب مشتق نیاز به محاسبه‌شدن دارند. درنتیجه، بکارگیری روش LDQ از نظر محاسباتی بسیار گران می‌باشد.

مراجع

[1] Kansa EJ. Multiquadrics, a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics.Computers and Mathematics 1990;19:127–45.

[2] Chen CS, Brebbia CA, Power H. Dual reciprocity method using for Helmholtztype operators. Boundary Elements 1998;20:495–504.

[3] Larsson E, Fornberg B. A numerical study of radial basis functions based solution methods for elliptic PDEs. Computers and Mathematics with Applications2003;46:891–902.

[4] Fornberg Bengt, Zuev Julia. The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation. Computers and Mathematics 2007;54:379–98.

[5] Micchelli CA. Interpolation of a scattered data. Constructive Approximation 1986;2:11–22.

www.SID.ir