روشی جدید برای تعیین وابستگی سویی با استفاده از تابع مفصل FGM تعمیم یافته

شقایق قمری مود، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد
محمد امینی، عضو هیأت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد
ابوالقاسم بزرگ نیا، عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

چکیده: در این مقاله کاربردی از تابع مفصل را بیان می کنیم، مفهوم وابستگی سویی را تعریف و این وابستگی را در توزیع FGM تعمیم یافته شرح داده و آن را با داده های واقعی تحلیل و بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: مفصل، وابستگی سویی، خانواده FGM ، MLE ، تابع رگرسیون.

مقدمه

کاربرد تابع مفصل برای بیان وابستگی بین متغیرها در زمینه های زیادی از قبیل بازار بورس، سهام، مدیریت ریسک و ... مورد توجه فراوان قرار گرفته است. در این مقاله مدلی برای وابستگی سویی با استفاده از تابع مفصل FGM تعمیم یافته پیشنهاد می دهیم. این مدل وابستگی سویی را به خوبی وابستگی غیر متقارن نشان می دهد و نسبت به مدل های قبلی ساده تر است.[۱]

مفهوم مفصل

مفصل تابع توزیع چند متغیره ای است که روی مکعب واحد n بعدی تعریف شده به طوری که هر توزیع حاشیه ای روی بازه $[0,1]$ یکنواخت است و ویژگی های زیر را دارد:

۱. برای $u \in [0,1]$، $C(1,...,1,u,1,...,1) = u$

۲. اگر حداقل یکی از u_i ها برابر با صفر باشد آنگاه $C(u_1,...,u_n) = 0$.

۳. تابع C جهت دار[۱] و n صعودی [۲] است.

در سال ۱۹۷۳ اسکلار[۲] پیشنهاد کرد که هر تابع توزیع چند متغیره را با استفاده از تابع مفصل می توان بر حسب تابعی از حاشیه ای هایش بیان کرد.
قضیه اسکلار: با داشتن تابع توزیع n متغیره F با توزیع های حاشیه ای $F_1,...,F_n$ مفصل n بعدی منحصر به فرد $C:[0,1]^n \to [0,1]$ وجود دارد به طوری که $F(x_1,...,x_n) = C(F(x_1),...,F(x_n))$.

[۱]- grounded
[۲]- n-increasing

مفهوم وابستگی

روش های زیادی برای تعیین ضریب همبستگی مورد بررسی قرار گرفته است، اخیرا فرمول هایی برای نشان دادن وابستگی بین دو متغیر تصادفی به وسیله رگرسیون خطی ارائه شده است.

همبستگی پیرسون: با فرض متقارن بودن ϵ همبستگی پیرسون به صورت زیر است:

$$\rho_{XY}^3=\frac{\gamma_Y}{\gamma_X},\gamma_X\neq 0$$

که γ_X و γ_Y ضرایب چولگی متغیرهای X و Y می باشد. در این تساوی وابستگی سویی در خط رگرسیونی با نوعی کوواریانس بین دو متغیر مشخص می شود. یا به صورت ساده تر $(\rho_{XY}^2)^3=\frac{\gamma_Y^2}{\gamma_X^2}$ و چون طرف چپ همیشه کمتر یا مساوی یک است، بنابراین Y به X وابسته است . با عوض کردن جای X و Y وابستگی سویی X نسبت به Y به دست می آید. [۳، ۴]

مفهوم وابستگی سویی

سانگور [۵] دو نوع وابستگی سویی با کمک خانواده مفصل های رودریگز لالنا و ابدا فلور [۳] که به صورت $C(u,v)=uv+f(u)+f(v)$ است، را پیشنهاد کرد.[۶] جهت وابستگی (بیان کننده ویژگی های توزیع حاشیه ای) و وابستگی سویی (بیان کننده ویژگی های توزیع توام). او اندازه وابستگی سویی را نیز تعریف کرد.

تعریف: زوج (U,V) در رفتار توام وابستگی سویی دارند اگر $r_{V|U}(w)\neq r_{U|V}(w)$ که:

$$E[V|U=u]=r_{V|U}(u)$$

و برای این خانواده:

$$r_{V|U}(u)=\frac{1}{2}-\rho_C f'(u)[12\int_0^1 f(u)du]^{-1}$$

$$r_{U|V}(v)=\frac{1}{2}-\rho_C g'(v)[12\int_0^1 g(v)dv]^{-1}$$

تعریف: زوج (X,Y) در حاشیه ای ها وابستگی سویی دارند اگر:

$$r_{V|U}(w)=r_{U|V}(w)\quad r_{X|Y}(z)\neq r_{Y|X}(z)$$

ضمنا در تعیین وابستگی سویی به کمک مفصل اثر حاشیه ای ها حذف می شود و زمانی که می خواهیم مدلی برای وابستگی سویی در رفتار توام تعیین کنیم نیاز به مفصل نامتقارن داریم.

وابستگی سویی در توزیع FGM تعمیم یافته:

سه نوع مختلف از توزیع FGM تعمیم یافته [۴] که حالت خاصی از خانواده مفصل های رودریگز لالنا و ابدا فلور است به صورت زیر می باشد:

۱. $C(u,v)=uv+\theta u^b v^b(1-u)(1-v)$

۲. $C(u,v)=uv+\theta u^b v^b(1-u)^{\alpha}(1-v)^{\beta},\alpha,\beta\geq 1$

۳. $C(u,v)=uv+\theta u^b v^b(1-u)^{\alpha q}(1-v)^{\beta q},p\geq 1;q\geq 1$

که درآن $0\leq u,v\leq 1$، α، β و θ و b پارامتر و p و q هر مقداری می تواند بگیرد. در این مقاله هدف برآورد پارامترهاست. با تعریف $U_i=F_X(X_i)$ و $V_i=F_Y(Y_i)$ برای تابع توزیع حاشیه ای F_X و F_Y واضح است که U_i و V_i دارای توزیع یکنواخت $(0,1)$ است،

[۳]- Rodriguez-Lallena and Ubeda-Flores

[۴]-genetalized Farli-Gumbel-Morgenstern

پس می توان تابع درستنمایی تجربی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$L(\theta;U,V)=\Pi_{i=1}^{n}c(U_i,V_i)$$

با ماکزیمم کردن این تابع θ برآورد می شود. اما α و β را نیز می توان با فرمول های زیر برآورد کرد:

$$\hat{\alpha}=\frac{\Sigma_{i=1}^{n}(b(1-u_i)\log(1-u_i)-u_i)}{\Sigma_{i=1}^{n}u_i\log(1-u_i)}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\Sigma_{i=1}^{n}(b(1-v_i)\log(1-v_i)-v_i)}{\Sigma_{i=1}^{n}v_i\log(1-v_i)}$$

وابستگی سویی U نسبت به V و V نسبت به U به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[V|U=u]=r_{V|U}(u)=1-\int_{0}^{1}\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}dv$$

$$E[U|V=v]=r_{U|V}(v)=1-\int_{0}^{1}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}du$$

سانگور اندازه وابستگی سویی را نیز به صورت زیر تعریف کرد:

$$\rho^{(2)}_{U\to V}=\rho_c^{2}\frac{\int_0^1(f'(u))^2du}{12[\int_0^1 f(u)du]^2}$$

$$\rho^{(2)}_{V\to U}=\rho_c^{2}\frac{\int_0^1(g'(v))^2dv}{12[\int_0^1 g(v)dv]^2}$$

که $\rho_c=12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv-3$ است.[۷]

تحلیل داده های واقعی

در این مثال وابستگی سویی و اندازه آن با استفاده از مفصل برای داده های واقعی تحلیل می شود. داده ها شامل ۶۰ مشاهده برای قیمت فروش روزانه دلار و یورو بازار تهران برحسب ریال در اسفند ۱۳۹۲ و اردیبهشت ۱۳۹۳ می باشد که آماره های توصیفی آن در جدول ۱ و ۲ خلاصه شده است. تغییرات یورو نسبت به دلار بیشتر و هردو گروه دارای چولگی چپ و کشیدگی هستند یعنی توزیع داده ها نامتقارن است. با ثابت فرض کردن b پارامترهای α و β مطابق فرمول های داده شده و پارامتر θ باروش برآورد درستنمایی

جدول ۱: آماره های توصیفی دلار و یورو

	میانگین	میانه	انحراف معیار
دلار	۳۱۷۲۰	۳۲۵۰۰	۱۳۵۹٫۱۸
یورو	۴۳۷۶۰	۴۴۹۰۰	۱۹۴۳٫۲۲

جدول ۲: آماره های توصیفی دلار و یورو

کشیدگی	چولگی	مینیمم	ماکزیمم
۱٫۲۴۹	−۰٫۱۲۴	۲۹۷۰۰	۳۳۴۵۰
۱٫۳۱۶	−۰٫۱۶۶	۴۰۶۰۰	۴۶۲۰۰

ماکزیمم برآورد می شود که در جدول ۳ و ۴ به ازای مقادیر مختلف b و برای هر سه نوع مفصل داده شده است. در مفصل نوع سه فرض می کنیم: $p=q=2$

جدول ۳: برآورد α و β

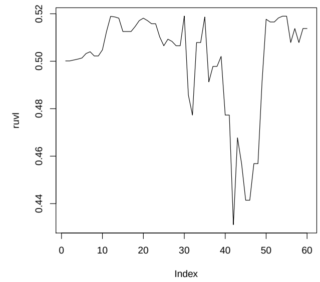
b	α	β
۱	۱٫۰۶۲	۱٫۰۶۰
۱٫۵	۱٫۲۴۲	۱٫۲۳۹
۲	۱٫۴۲۱	۱٫۴۱۸
۳	۱٫۷۷۹	۱٫۷۷۵

جدول ۴: برآورد θ در هر سه نوع مفصل

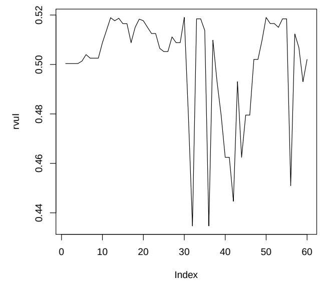
b	$\theta 1$	$\theta 2$	$\theta 3$
۱	−۱٫۱۴۵	−۱٫۱۵۵	−۱٫۰۱۳
۱٫۵	−۱٫۲۲۹	−۳٫۵۵۴	−۲٫۴۰۰
۲	−۱٫۳۱۹	−۷٫۴۰۱	−۳٫۳۱۵
۳	−۵٫۸۹۷	−۳۰٫۰۰۰	−۱٫۵۲۳

مقدار تابع رگرسیون مفصل U نسبت به V و V نسبت به U در هیچ کدام از مفصل ها با هم برابر نیست یعنی این مشاهدات وابستگی سویی در رفتار توام دارند که با رسم نمودارهای آن به خوبی واضح است.(نمودار ۱ و ۲)

در نتیجه تغییرات واریانس وابستگی سویی در رفتار توام در جدول ۵ و ۶ تعیین شده است:



شکل ۱: وابستگی سویی توام $U|V$ در مفصل نوع ۱



شکل ۲: وابستگی سویی توام $V|U$ در مفصل نوع ۱

جدول ۵: واریانس وابستگی سویی توام U نسبت به V

$var(r_{U\|V}(1))$	$var(r_{U\|V}(2))$	$var(r_{U\|V}(3))$
۰/۰۱۱۹۳۷۹	۰/۰۱۰۰۳۴۸	۰/۰۴۷۰۳۳۳
۰/۰۰۳۶۵۴۱۶	۰/۰۱۲۲۹۹۱	۰/۰۵۴۷۶۱۸
۰/۰۰۱۵۵۹۶	۰/۰۰۸۲۱۳۰	۰/۰۲۹۳۰۰۱
۰/۰۰۰۴۶۲۵	۰/۰۰۳۹۷۱۲	۰/۰۱۲۰۷۷۷

جدول ۶: واریانس وابستگی سویی توام V نسبت به U

$var(r_{V\|U}(1))$	$var(r_{V\|U}(2))$	$var(r_{V\|U}(3))$
۰/۰۱۱۹۳۱۹	۰/۰۱۰۰۳۲۹	۰/۰۴۷۰۹۳۵
۰/۰۰۳۶۵۵۴	۰/۰۱۲۳۳۰۲	۰/۰۵۴۸۶۵۳
۰/۰۰۱۵۵۷۰	۰/۰۰۸۲۱۳۷	۰/۰۲۹۳۵۱۱
۰/۰۰۰۴۶۱۳	۰/۰۰۳۹۷۸۷	۰/۰۱۲۱۲۶۱

هر سطر جدول مقدار واریانس به ازای b های مختلف است که با افزایش b هیچ روند خاصی را نشان نمی دهد.

علاوه براین ضرایب ρ_c و $\rho^2_{U\to V}$ و $\rho^2_{V\to U}$ قابل مقایسه هستند که نتایج در جدول ۷ و ۸ و ۹ ارائه شده است.

جدول ۷: اندازه وابستگی سویی در مفصل نوع ۱

b	ρ_c	$\rho^2_{U\to V}$	$\rho^2_{V\to U}$
۱	−۰/۵۰۷۷۲۴	۰/۲۵۷۷۸۴	۰/۲۵۷۷۸۴
۱/۵	−۰/۲۳۸۷۳۴	۰/۰۶۸۱۸۱	۰/۰۶۸۱۸۱
۲	−۰/۱۲۶۹۳۱	۰/۰۲۵۷۷۸	۰/۰۲۵۷۷۸
۳	−۰/۰۴۵۶۹۵	۰/۰۰۵۹۶۵	۰/۰۰۵۹۶۵

جدول ۸: اندازه وابستگی سویی در مفصل نوع ۲

b	ρ_c	$\rho^2_{U\to V}$	$\rho^2_{V\to U}$
۱	−۳/۲۶۹۴۵۵	۱۰/۷۸۲۴۶۰	۱۰/۷۴۸۸۳۳
۱/۵	−۱/۲۷۴۱۲۷	۱/۵۱۲۳۵۰	۱/۵۰۸۴۴۶
۲	−۰/۵۷۲۹۲۴	۰/۳۱۱۱۴۹	۰/۳۱۰۴۷۳
۳	−۰/۱۵۴۴۶۴	۰/۰۲۵۹۴۸	۰/۰۲۵۹۰۶

جدول ۹: اندازه وابستگی سویی در مفصل نوع ۳

b	ρ_c	$\rho^2_{U\to V}$	$\rho^2_{V\to U}$
۱	−۰/۱۵۴۴۶۴	۰/۰۲۵۹۴۸	۰/۰۲۵۹۰۶
۱/۵	−۰/۱۵۴۴۶۴	۰/۰۲۵۹۴۸	۰/۰۲۵۹۰۶
۲	−۰/۱۵۴۴۶۴	۰/۰۲۵۹۴۸	۰/۰۲۵۹۰۶
۳	−۰/۱۵۴۴۶۴	۰/۰۲۵۹۴۸	۰/۰۲۵۹۰۶

این اندازه ها در هر سه نوع مفصل از ضریب همبستگی پیرسون بیشتر است و مفصل نوع ۲ بیشترین اندازه وابستگی سویی را نشان می دهد پس مدل مناسب تری برای دادهاست.

نتایج

استفاده از تابع مفصل در تعیین وابستگی سویی این مزیت را دارد که اثرات حاشیه ای متغیرها حذف می شود. با استفاده از سه نوع تابع توزیع FGM تعمیم یافته روند وابستگی سویی و نسبت تغییرات U نسبت به V و V نسبت به U را به دست آوردیم و آن را با ضریب همبستگی پیرسون مقایسه کردیم. همچنین می توان اندازه وابستگی سویی بین چند گروه از داده ها را نیز با یکدیگر مقایسه کرد و در نتیجه اطلاعات مهمی در تصمیم گیری ها به دست آورد.

مراجع

[1] W. Breymann, A. Dias, Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance. ,Quantitive Finance, 2003, 3(1):1-16.

[2] A. Sklar,Random variables,joint distribution,and copulas, Kybernetica, 1973, 9:449–460.

[3] Y.Dodge ,V. Rousson, Direction dependence in regression line. Communications in Statistics - Theory and Methods. 2000, 29(9-10):1957-1972.

[4] M.V. Muddapur, On Direction dependence in regression line. Communications in Statistics - Theory and Methods. 2003, 3210):2053-2057.

[5] E.A. Sungur, Some observations on copula regression functions. Communications in Statistics - Theory and Methods. 2005, 34:1967-1978.

[6] J.A. Rodriguez-lallena ,M. Ubeda-Flores, A new class of bivariate copulas. Statistical Probability Letters. 2004, 66:315-325.

[7] Y.S.Jung ,J.M.Kim, J.Kim new approach of directional dependence in exchange markets using generalized FGM copula function. Communications in Statistics -Simulation and Computation. 2008, 37:772-788.