حل هندسی مساله سینماتیک معکوس یک ربات سریالی با استفاده از فرمول ضرب نگاشت نمایی

سمیه سادات علوی صفت*، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه سمنان، s.alavisefat@gmail.com
مریم حجتی پور**،دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه سمنان،maryamhojatipoor@gmail.com
دکتر سید ابراهیم اکرمی، عضو هیأت علمی دانشگاه سمنان،akrami@profs.semnan.ac.ir

شهریور۱۳۹۳

چکیده: دراین مقاله؛ یک روش هندسی برای حل تحلیلی سینماتیک معکوس ربات سریالی ارائه شده، دراین روش از فرمول ضرب نگاشت نمایی که به اختصارPOE می نامیم استفاده می کنیم، این نگاشت نمایی روی جبر گروه لی$SE(3)$ تعریف می شود. در این روش مساله سینماتیک معکوس به چند زیر مساله متعارف تجزیه شده که هر کدام ازآن ها قادرند مساله سینماتیک معکوس را به زیر بخش های مجزا تبدیل و آن را حل کنند.

کلمات کلیدی:
مفصل، سینماتیک مستقیم، سینماتیک معکوس، تاب، POE

مقدمه

همگام با صنعتی شدن زندگی بشر نیاز به استفاده از ابزاری که بتواند کارهای تکراری و پیچیده را انجام دهد افزایش یافت. این نیاز موجب بوجود آمدن علم رباتیک شد. در رشته رباتیک از علوم زیادی از جمله برق، مکانیک، فیزیک،ریاضی و ...استفاده می‌شود. شاخه‌های مهم علم رباتیک که از علم ریاضی استفاده می‌کنند عبارتنداز کنترل ربات، طراحی حرکت ربات، سینماتیک مستقیم ومعکوس که در این مقاله به مطالعه سینماتیک معکوس پرداخته شده‌است. در سینماتیک معکوس با داشتن موقعیت اولیه و نهایی ربات قصد داریم چگونگی اتصال مفصل‌ها، نوع حرکت، اندازه حرکت ربات را تا رسیدن به موقعیت نهایی توصیف کنیم. یکی از روش‌های معمول برای حل تحلیلی مساله سینماتیک معکوس براساس روش پارامتری‌سازی دناویت-هارتنبرگ است که به اختصار $(D-H)$ نمایش می‌دهیم. در روش$D-H$ که یک روش جبری است از مفاهیم هندسی استفاده نمیشود، روش ارائه شده در این مقاله که به اختصار POE نامیده می‌شود روشی هندسی است که بر اساس نوع هندسه قرار گرفتن مفصل‌ها نسبت به هم تعریف می‌شود. برای حل مساله سینماتیک معکوس با این روش یازده زیر مساله بیان می شود.

پیشنیازهای هندسی

در این بخش پیش نیازهای هندسی مورد نیاز برای فرمول POE بیان می‌شود. یک جسم صلب عبارت است از یک جسم B به طوری که حرکت این جسم در فضا کاملا توسط حرکت یک نقطه دلخواه $q \in B$ و حرکت یک دستگاه محتصات متعامد اولیه $\{v, u, w\}$ که مبدا آن نقطه P می‌باشد، مشخص می‌شود و حرکت صلب حرکتی است که در طول حرکت فاصله بین نقاط و زاویه بین بردارها حفظ می‌شود.

گروه خاص اقلیدسی $SE(3)$ از حرکت جسم صلب را به صورت زیر

$$SE(3) = \left\{ g \mid g = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R \in SO(3), P \in R^3 \right\}$$

و جبرلی $SE(3)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$se(3) = \left\{ \hat{\xi} \mid \hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\omega} \in so(3), v, \omega \in R^3 \right\}$$

هر $\hat{\xi} \in se(3)$ را یک تاب می‌نامیم. نگاشت نمایی را روی جبرلی $SE(3)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\exp : se(3) \longrightarrow SE(3)$ که $\hat{\xi} \longmapsto e^{\hat{\xi}}$.

سینماتیک مستقیم

در این بخش نگاشت سینماتیک مستقیم را برای یک ربات با $n-$ درجه آزادی بدست می‌آوریم.

یک ربات با $n-$ درجه آزادی را به اختصار با $n-DOF$ نشان می‌دهیم، برای توصیف هندسی سینماتیک مستقیم فرض کنید M یک جسم صلب، A دستگاه مختصات استاندارد و ثابت R^3 با مبدا $O = (0,0,0)$ و B دستگاه مختصات متصل به جسم M با مبدا O باشد. در این صورت اگر جسم صلب طوری حرکت کند که نقطه O ثابت بماند و نقطه $q \in M$، ثابت می‌شود که $q_a = R_{ab} q_b$ که q_a مختصات نقطه q نسبت به دستگاه مختصات A باشد و q_b مختصات نقطه q نسبت به دستگاه مختصات B باشد و $R_{ab} = (\tilde{R})^{-1}$ که $\tilde{R} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$ ، (u, v, w) مختصات دستگاه B و $\tilde{R}$ ماتریس تبدیل مختصات B نسبت به دستگاه A است. حال اگر جسم صلب M حرکت کند، دستگاه B هم با آن حرکت می‌کند پس مختصات هر نقطه $q \in M$ در هر لحظه t نسبت به دستگاه مختصات A برابر با $q_a(t) = R_{ab}(t) q_b(t)$ به ماتریس $R_{ab}(t)$ ماتریس پیکربندی گوییم و به مجموعه تمام ماتریس‌های پیکربندی، فضای پیکربندی گوییم.

اگر p_{ab} را مختصات مبدا دستگاه B نسبت به A فرض کنیم خواهیم داشت $q_a = p_{ab} + R_{ab} q_b$ که R_{ab} ماتریس دوران وعضو گروه لی $SO(3)$ است، قرار می‌دهیم $g_{ab} = (R_{ab}, p_{ab}) \in SE(3) = SO(3) \times R^3$. در ادامه، حرکت مفاصل را به طور منحصر به فرد متناظر با یک تاب در نظر می‌گیریم، یعنی تاب‌ها متناظر محور مفصل‌ها هستند. هرتاب یک بردار 6×1است که با ξ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌شود نگاشت سینماتیک متناظر این تاب به صورت $g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)$ است که $g_{ab}(\theta) \in SE(3)$ موقعیت نهایی ربات بعد از تبدیل حول ξ به اندازه θ می‌باشد. مفاصل ربات‌های مورد بحث در این مقاله شامل مفصل دورانی و انتقالی می‌باشند. برای مفاصل انتقالی هر ξ_i بصورت $\xi_i = \begin{bmatrix} 0 \\ v_i \end{bmatrix}$ که $v_i \in R^{3\times1}$ یک بردار یکه در جهت انتقال است.

و برای مفاصل دورانی هر ξ_i بصورت $\xi_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_i \times q_i \end{bmatrix}$ است که $\omega_i \in R^{3\times1}$ یک بردار یکه درجهت محور تاب و $q_i \in R^{3\times1}$ یک نقطه دلخواه روی محور تاب است.

ثابت می‌شود برای یک ربات با $n-$ درجه آزادی سینماتیک مستقیم آن به صورت زیر است:

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1\theta_1} e^{\hat{\xi}_2}\theta_2 \ldots e^{\hat{\xi}_n}\theta_n g_{st}(0) \qquad (۱)$$

سینماتیک معکوس

در سینماتیک معکوس با معلوم بودن $g_{ab}(0)$ و $g_{ab}(\theta)$ هدف یافتن مقادیر $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ است. برای اینکار باتکنیک‌هایی هندسی یکسری زیر مساله تعریف می‌کنیم وبا استفاده ازاین زیر مساله‌ها، مساله سینماتیک معکوس حل می‌شود.

نتایج

ارائه یک روش تحلیلی برای حل مساله سینماتیک معکوس ربات‌ها. مزیت این روش نسبت به دیگر روش ها استفاده از تکنیک‌های هندسی است. با روش ارائه شده ربات‌های با ۴ درجه آزادی بطور کامل، ربات‌های با ۵ درجه آزادی تا ۹۰درصد و ربات‌های با ۶ درجه آزادی تا ۵۰درصد قابل حل هستند.

مراجع

[۱] I. Chen، Y. Gao، Closed-form inverse kinematics solver for reconfigurable robots، in: International Conference on Robotics and Automation، ۲۰۰۱، pp. ۲۳۹۵—۲۴۰۰.

[۲] R.M. Murray، Z.X. Li، S.S. Sastry، A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation، CRC Press، Boca Raton، FL، ۱۹۹۴

[۳] J.M. Selig، Geometric Methods in Robotics، second ed. Springer، New York، ۲۰۰۵.