سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

برآورد پارامترهای مدل رگرسیون خطی فازی بر اساس متغیر پاسخ فازی

معصومه اسداللهی[۱]، محمدقاسم اکبری [۲]

[۱]کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، گروه آمار

[۲]عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه بیرجند

چکیده: در این مقاله، به تخمین پارامترهای مدل رگرسیون خطی فازی در حالتی‌که متغیر پاسخ فازی و ضرایب رگرسیونی دقیق هستند، با استفاده از متر پیشنهادی K_{LR} که بر اساس تفاضل $\alpha-$شک‌ها، توسط نویسنده معرفی شده، به روش کمترین قدر مطلق خطا می‌پردازیم و نتایج حاصل را با روش طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) بر اساس معیارهای نیکویی برازش، مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: عدد فازی، $\alpha-$شک، رگرسیون فازی، نیکویی برازش، روش کمترین قدرمطلق خطا.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G08 : W62J99.

۱ مقدمه

رگرسیون به عنوان روشی برای تعیین و تحلیل روابط بین متغیرهای آماری تعریف می‌شود. در این روش بر پایه مشاهدات مربوط به متغیر وابسته و متغیرهای مستقل، تابعی به منظور پیش‌بینی و کنترل متغیر پاسخ بنا می‌شود. در رگرسیون کلاسیک فرض‌هایی همچون دقیق بودن متغیرها و مشاهدات مربوط به آن‌ها و فرض‌هایی دیگر در تعیین روابط بین متغیرها در نظر گرفته می‌شود. اما ممکن است یک یا چند تا از فرضیه‌های مربوط به رگرسیون کلاسیک برقرار نباشد، مثلاً مشاهدات مربوط به متغیرها نادقیق باشند یا نادقیق گزارش شده باشند، یا متغیرهای تحت مطالعه دارای ارتباطی نادقیق باشند. در چنین شرایطی ابزارهای کلاسیک نمی‌توانند معیار مناسبی را برای مدل‌سازی داده‌ها ارائه دهند. یکی از راه‌های ممکن استفاده از مفهوم مجموعه‌های فازی است که توسط زاده (۱۹۶۵) معرفی شده و با استفاده از این مفهوم می‌توان یک معیار مناسب برای مدل‌سازی داده‌ها در نظر گرفت.

[۲]معصومه اسداللهی : m.asadollahi@birjand.ac.ir

۲ مفاهیم اولیه

مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X به صورت $\left\{(x, \tilde{A}(x)) : x \in X\right\}$ تعریف می‌شود، که $\tilde{A}(x) : X \to [0, 1]$ تابع عضویت x در $\tilde{A}$ است.

تعریف ۱.۲. مجموعه (معمولی) از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$، حداقل به بزرگی α باشد، $\alpha-$برش $\tilde{A}$ (مجموعه تراز α ام $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}[\alpha]$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$\tilde{A}\,[\alpha] = \begin{cases} \left\{x \in X \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\} & 0 < \alpha \leq 1 \\ supp(\tilde{A}) & \alpha = 0 \end{cases}$$

$\alpha-$برش $\tilde{A}$ را $\alpha-$برش قوی گوییم هرگاه نامساوی بالا به صورت اکید باشد.

تعریف ۲.۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم، اگر

۱) $\tilde{A}$ تك نمائی باشد. یعنی تنها یك $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\tilde{A}(x_0) = 1$.

۲) $\tilde{A}$ محدب باشد و $\alpha-$برش‌های آن، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، بازه‌های بسته و کراندار باشند.

مجموعه همه اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{m-x}{l}), & x \leq m, \\ R(\dfrac{x-m}{r}), & x > m, \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m; l, r)_{LR}$ نمایش می‌دهیم. عدد حقیقی m مقدار نما(میانه)، و اعداد مثبت l و r به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند. L و R توابع مرجع (شکل) نامیده می‌شود. و $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $\tilde{A} = (m; l, r)_T$ نشان می‌دهیم، اگر

$$R(x) = L(x) = \max\left\{0, 1-x\right\} = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{دیگر جاهای.} \end{cases}$$

در صورتی‌که $L = R$ و $l = r$ آن‌گاه عدد فازی را متقارن نامیده و با $\tilde{A} = (m; l)_L$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی کل اعداد فازی LR را با $F_{LR}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲. اگر $\tilde{A} = (m; l, r)_{LR}$ و $\tilde{B} = (n; l', r')_{LR}$ و $\lambda \in R$ آن‌گاه داریم:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m; l, r)_{LR} \oplus (n; l', r')_{LR} = (m+n; l+l', r+r')_{LR},$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (m; l, r)_{LR} \ominus (n; l', r')_{LR} = (m-n; l+r', r+l')_{LR},$$

$$\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda m; \lambda l, \lambda r)_{LR}, & \lambda > 0, \\ (\lambda m; -\lambda r, -\lambda l)_{RL}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

تعریف ۵.۲. لیو (۲۰۱۳) معیاری را برای مقایسه بین اعداد فازی و اعداد حقیقی معرفی کرده که از آن به عنوان درجه اعتبار (میزان کوچکی عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به مقدار حقیقی x) یاد کرده و به صورت زیر نمایش داده است:

$$C : F(\mathbb{R}) \to [۰, ۱]$$

که در آن

$$C(\tilde{A} \leq x) = \frac{\sup_{y \leq x} \tilde{A}(y) + ۱ - \sup_{y > x} \tilde{A}(y)}{۲}.$$

تعریف ۶.۲. کوچکترین کران بالای مجموعه تمام عناصری از تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ را که تابع درجه اعتبار آن‌ها حداقل به بزرگی α باشد، $\alpha-$شک $\tilde{A}$ نامیده و با $\tilde{A}_\alpha$ نمایش می‌دهیم، یعنی:

$$\tilde{A}_\alpha = \inf\{x \in supp(\tilde{A}) : C(\tilde{A} \leq x) \geq \alpha\}$$

که $\tilde{A}_\alpha$ برای $\alpha \in (۰, ۱]$ یک تابع غیر نزولی است.

فرض کنید $\tilde{A} = (m, l, r)_{LR}$ یک عدد فازی LR و $x \in \mathbb{R}$ باشد، تابع درجه اعتبار آن به صورت زیر است:

$$C(\tilde{A} \leq x) = \begin{cases} ۰ & x < m - l \\ \frac{۱}{۲} L(\frac{m-x}{l}) & m - l \leq x \leq m \\ ۱ - \frac{۱}{۲} R(\frac{x-m}{r}) & m \leq x \leq m + r \\ ۱ & x > m + r. \end{cases}$$

و همچنین $\alpha-$شک آن عبارتست از :

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} m - lL^{-۱}(۲\alpha) & ۰ < \alpha \leq \frac{۱}{۲} \\ m + rR^{-۱}(۲(۱ - \alpha)) & \frac{۱}{۲} < \alpha < ۱ \end{cases}$$

تعریف ۷.۲. فرض کنید $\tilde{M} = (m; l, r)$ ، $\tilde{N} = (n; \acute{l}, \acute{r})$ دو عدد فازی LR باشند، در این صورت فاصلهٔ بین آن‌ها براساس $\alpha-$شک را با K_{LR} نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) = \int_۰^۱ |\tilde{M}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \mathrm{d}\alpha$$

حال اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند داریم:

$$\begin{aligned} K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) &= \int_۰^۱ |(m - l(۱ - ۲\alpha)) - (n - \acute{l}(۱ - ۲\alpha))| \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_۰^۱ |(m - n) + (۱ - ۲\alpha)(l' - l))| \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

قضیه ۸.۲. $(F_{LR}(\mathbb{R}), K_{LR})$ یک فضای متریک است.

اثبات. بایستی نشان دهیم:

$$(۱)\ \forall \tilde{M}, \tilde{N} \in F_{LR}(\mathbb{R}),\ K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) > ۰,$$

$$(۲)\ K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) = ۰ \Leftrightarrow \tilde{M} = \tilde{N},$$

$$(۳)\ \forall \tilde{M}, \tilde{N} \in F_{LR}(\mathbb{R}),\ K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) = K_{LR}(\tilde{N}, \tilde{M}),$$

$$(۴)\ \forall \tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{N} \in F_{LR}(\mathbb{R}),\ K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) \leq K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{C}) + K_{LR}(\tilde{C}, \tilde{N}).$$

شرط‌های اول تا سوم بوضوح برقرار است. برای بررسی شرط چهارم، اعداد فازی $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{C} \in F_{LR}(\mathbb{R})$ را در نظر می‌گیریم، با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$\begin{aligned} K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) &= \int_۰^۱ |\tilde{M}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_۰^۱ |\tilde{M}_\alpha - \tilde{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \mathrm{d}\alpha \leq \int_۰^۱ |\tilde{M}_\alpha - \tilde{C}_\alpha| \mathrm{d}\alpha + \int_۰^۱ |\tilde{C}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \mathrm{d}\alpha \\ &\Rightarrow K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{N}) \leq K_{LR}(\tilde{M}, \tilde{C}) + K_{LR}(\tilde{C}, \tilde{N}) \end{aligned}$$

□

۳ نیکویی برازش

در رگرسیون فازی یک موضوع مهم، توان تشریح مدل می‌باشد. در این بخش، تعدادی معیار نیکویی برازش برای اندازه‌گیری برازش یک مدل رگرسیونی معرفی می‌کنیم.

معیار خطا

برای ارزیابی اعتبار یک مدل رگرسیون فازی، کیم و بیشو (۱۹۹۸) از تفاضل بین مقادیر عضویت پاسخ‌های فازی مشاهده شده و برآورد شده، به عنوان یک معیار استفاده کرده‌اند که در زیر آن را معرفی می‌کنیم.

۱. خطای نسبی برآورد:

فرض کنید $\tilde{y}_i$ و $\hat{\tilde{y}}_i$ به ترتیب متغیر وابسته مشاهده شده و برآورد شده از یک مدل رگرسیونی فازی باشند. تفاضل نسبی بین توابع عضویت بین این دو عدد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_۱(\tilde{y}_i, \hat{\tilde{y}}_i) = \frac{\int_{S_{\tilde{y}_i} \cup S_{\hat{\tilde{y}}_i}} |\tilde{y}_i(x) - \hat{\tilde{y}}_i(x)| \mathrm{d}x}{\int_{S_{\tilde{y}_i}} \tilde{y}_i(x) \mathrm{d}x}$$

که در آن $S_{\tilde{y}_i}$ و $S_{\hat{\tilde{y}}_i}$ به ترتیب تکیه‌گاه $\tilde{y}_i$ و $\hat{\tilde{y}}_i$ هستند.

۲. خطای برآورد: در تعریف خطای نسبی برآورد اگر فقط تفاضل بین توابع عضویت $\tilde{y}_i$ و $\hat{\tilde{y}}_i$ را در نظر بگیریم و مجموع تابع عضویت عدد فازی مشاهده شده را یک در نظر بگیریم، معیار دیگری به نام خطای برآورد بدست می آید که در زیر آن را مشاهده می‌کنید:

$$E_۲(\tilde{y}_i, \hat{\tilde{y}}_i) = \int_{S_{\tilde{y}_i} \cup S_{\hat{\tilde{y}}_i}} |\tilde{y}_i(x) - \hat{\tilde{y}}_i(x)| \mathrm{d}x$$

مقادیری که $E_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)$ و $E_۲(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)$ می‌توانند اختیار کنند در بازه $[۰,+\infty)$ است که با یک تغییر متغیر به شکل زیر معیارهای $G_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)$ و $G_۲(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)$ بدست می‌آید که محدوده تغییر آن‌ها بازه $[۰,۱]$ می‌باشد. هر چه این مقادیر به یک نزدیک‌تر باشند نشان از نزدیکی دو تابع عضویت است.

$$G_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)=\frac{۱}{۱+E_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}\qquad G_۲(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)=\frac{۱}{۱+E_۲(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}$$

.۳

معیار دیگری که بر اساس تفاضل مقادیر بالایی و پایینی $\alpha-$برش‌های اعداد فازی مشاهده شده و برآورد شده بدست می‌آید، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$D(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)=\frac{۱}{۲m}\sum_{k=۱}^{m}(|\hat{y}_i^L[\alpha_k]-y_i^L[\alpha_k]|+|\hat{y}_i^U[\alpha_k]-y_i^U[\alpha_k]|)$$

در عمل به منظور ارزیابی نیکویی برازش مدل، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$G_۱=\frac{\sum_{i=۱}^{n}G_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}{n}\qquad G_۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}G_۲(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}{n}$$
$$ME=\frac{\sum_{i=۱}^{n}E_۱(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}{n}\qquad MD=\frac{\sum_{i=۱}^{n}D(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}{n}$$

اندازه مشابهت

شاخص تطبیق یا اندازه مشابهت دو مجموعه فازی، میزان مشابهت آن دو را به همدیگر بیان می‌کند.

اگر $\tilde{A}$ و$\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند، مقدار مشابهت آن‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S_{UI}(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{Card(\tilde{A}\cap\tilde{B})}{Card(\tilde{A}\cup\tilde{B})}$$

هر چه میانگین اندازه مشابهت اعداد فازی برازش شده و اعداد فازی مشاهده شده پاسخ که به صورت $MSM=\frac{S_{UI}(\tilde{y}_i,\hat{\tilde{y}}_i)}{n}$ تعریف می‌شود به یک نزدیک باشد، مدل بهتر عمل کرده است.

۴ رگرسیون کمترین قدرمطلق خطای فازی

معادله گرسیونی زیر را در نظر گرفته،

$$\tilde{y}_i=a_۰\oplus(a_۱\otimes x_{i۱})\oplus(a_۲\otimes x_{i۲})\oplus\ldots\oplus(a_p\otimes x_{ip})\oplus\tilde{\varepsilon}\qquad i=۱,\ldots,n \tag{۱.۴}$$

که در آن $\tilde{y}_i=(y_i;l_i)_T$ و $\tilde{\varepsilon}=(۰;l)_T$ می‌باشد با توجه به قضیه ۴.۲ برای متغیر وابسته فازی برآورد شده $\tilde{y}$ داریم:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{y}}_i&=a_۰\oplus(a_۱\otimes x_{i۱})\oplus(a_۲\otimes x_{i۲})\oplus\ldots\oplus(a_p\otimes x_{ip})\oplus(۰;l)_T\\&=(\sum_{j=۰}^{p}a_jx_{ij}+۰;۰+l)_T\qquad i=۱,\ldots,n\ ,\ x_{i۰}=۱\end{aligned}$$

برای برآورد پارامترهای مدل ۱.۴ با استفاده از متر K_{LR} مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \quad \sum_{i=۱}^{n} \int_{۰}^{۱} \Big| (y_i - \sum_{j=۰}^{p} a_j x_{ij}) + (۱ - ۲\alpha)(l - l_i) \Big| \mathrm{d}\alpha$$

$$s.t.$$

$$a_j \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{R}^{+}, \quad j = ۰, .., p.$$

در این مقاله جهت برآورد پارامترها، با مینیمم کردن مسأله برنامه‌ریزی خطی فوق از نرم افزار $Minitab$ در مثال‌های عددی استفاده شده است. لازم به ذکر است که طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) روش خود را با روش چندین محقق دیگر از جمله چوی و باکلی (۲۰۰۸)، چن و هسو (۲۰۰۹) و حسن‌پور و همکاران (۲۰۱۰) مقایسه کرده و ادعا کرده‌اند که روش آن‌ها بر اساس معیارهای نیکویی برازش MSM، ME و MD عملکرد بهتری داشته است. ما نشان خواهیم داد که مدل رگرسیونی بر اساس متر پیشنهادی K_{LR}، به طور کلی عملکرد بهتری در مقایسه با روش طاهری و کلکین‌نما خواهد داشت.

مثال ۱.۴. مجموعه داده‌های جدول ۱ که توسط تاناکا و همکاران (۱۹۸۹) ارائه شده است، را در نظر بگیرید. مدل بهینه بر اساس روش گفته شده به صورت زیر بدست می‌آید.

جدول ۱: داده‌های مثال ۱.۴.

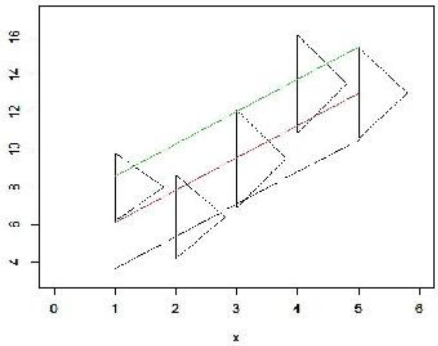
i	x_i	$\tilde{y}_i = (y_i; l_i)$
۱	۱	$(۸/۰; ۱/۸)_T$
۲	۲	$(۶/۴; ۲/۲)_T$
۳	۳	$(۹/۵; ۲/۶)_T$
۴	۴	$(۱۳/۵; ۲/۶)_T$
۵	۵	$(۱۳/۰; ۲/۴)_T$

$$\hat{\tilde{y}}_i = ۴/۴۱۱۹ \oplus ۱/۷۱۴۹ x_i \oplus (۰; ۲/۴۷۲۱)_T.$$

با توجه به برآورد پارامترها، نمودار مورد نظر را می‌توانید در شکل ۱ مشاهده نمایید. با توجه به جدول ۲، بر اساس مقادیر بدست آمده برای معیارهای MSM، $G۱$، $G۲$ و MD بر اساس روش کمترین قدر مطلق خطا با متر K_{LR}، ملاحظه می‌کنید که این مدل نسبت به مدل طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) عملکرد بهتری دارد.

جدول ۲: مقایسه مدل‌ها در مثال ۱.۴.

مدل و نویسنده	MSM	$G۱$	$G۲$	MD
طاهری و کلکین‌نما	۰/۵۱۶۸	۰/۶۳۴۵	۰/۴۸۶۳	۱/۱۵۰۰
مدل پیشنهادی بر اساس متر K_{LR}	۰/۵۱۹۹	۰/۶۳۹۵	۰/۵۱۳۵	۱/۱۳۵۷



شکل ۱: نمودار معادله خطوط رگرسیونی در مثال ۱.۴ بر اساس متر K_{LR}.

جدول ۳: داده‌های مثال ۲.۴.

i	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$\tilde{y}_i = (y_i; l_i)$
۱	۲/۰۰	۰/۰۰	۱۵/۲۵	$(۵/۸۳; ۳/۵۶)_T$
۲	۰/۰۰	۵/۰۰	۱۴/۱۳	$(۰/۸۵; ۰/۵۲)_T$
۳	۱/۱۳	۱/۵۰	۱۴/۱۳	$(۱۳/۹۳; ۸/۵۰)_T$
۴	۲/۰۰	۱/۲۵	۱۳/۶۳	$(۴/۰۰; ۲/۴۴)_T$
۵	۲/۱۹	۳/۷۵	۱۴/۷۵	$(۱/۶۵; ۱/۰۱)_T$
۶	۰/۲۵	۳/۵۰	۱۳/۷۵	$(۱/۵۸; ۰/۹۶)_T$
۷	۰/۷۵	۵/۲۵	۱۵/۲۵	$(۸/۱۸; ۴/۹۹)_T$
۸	۴/۲۵	۲/۰۰	۱۳/۵۰	$(۱/۸۵; ۱/۱۳)_T$

مثال ۲.۴. اعداد داده شده در جدول ۳ که توسط طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در نظر بگیرید. مدل بهینه بر اساس روش گفته شده به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\hat{\tilde{y}} = -۲/۴۳۵۴ \ominus ۰/۳۹۱۸x_۱ \ominus ۱/۱۴۰۷x_۲ \oplus ۰/۶۲۲۵x_۳ \oplus (۰; ۱/۰۰۶۴)_T$$

در جدول ۴ مدل پیشنهادی بر اساس متر K_{LR} با روش طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) از نظر شاخص‌های MSM، $G۱$، $G۲$، ME و MD مقایسه شده است، همان‌طور که مشاهده می‌کنید مدل پیشنهادی بر اساس متر K_{LR} از نظر شاخص‌های مذکور به استثناء MD نسبت به مدل طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) عملکرد بهتری داشته است.

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به جداول ۲ و ۴ مشاهده می‌کنیم که مدل پیشنهادی بر اساس متر K_{LR} عملکرد بهتری را نسبت به مدل طاهری و کلکین‌نما (۲۰۱۲) از نظر شاخص‌های نیکویی برازش مذکور، داراست.

جدول ۴: مقایسه مدل‌ها در مثال ۲.۴.

مدل و نویسنده	MSM	$G۱$	$G۲$	ME	MD
طاهری و کلکین‌نما	۰/۳۷۱۰	۰/۵۹۶۷	۰/۴۶۷۲	۰/۸۸۵۰	۲/۵۰۵۳
مدل پیشنهادی بر اساس متر K_{LR}	۰/۴۰۵۴	۰/۶۰۸۹	۰/۴۷۶۳	۰/۷۳۴۹	۲/۵۵۳۰

مراجع

Chen L. H. and Hsueh C. C. (2009), Fuzzy regression models using the least-squares method based on the concept of distance, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 17,1259-1272.

Choi S. H. and Buckley J. J. (2008). Fuzzy regression using least absolute deviation estimators, Soft Computing, 12:257-263.

Hassanpour H., Maleki H. R. and Yaghoobi M. A. (2010), Fuzzy linear regression model with crisp coefficients: a goal programming approach, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 7,19-39.

Kim B. and Bishu R. R. (1998). Evalaution of fuzzy linear regresssion models by comparing mem- bership functions. Fuzzy Sets and Systems, 100:343-352.

Liu B. (2013), Uncertainty Theory,4th ed, Springer-Verlag, Berlin.

Taheri S. M. and Kelkinnama M. (2012). Fuzzy linear regression based on least absolute deviations. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 9:121-140.

Tanaka H., Hayashi I. and Watada J.(1989), Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data, European Journal of Operational Research. 40,389-396.

Zadeh L. A. (1956). Fuzzy sets. Information and Control, 8:338-353.