سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۴-۲ شهریور ۱۳۹۵

آزمون استقلال سری زمانی مبتنی بر آنتروپی جایگشت

عماد اشتری نژاد[۱] و یداله واقعی[۲] و غلامرضا محتشمی برزادران [۳] و حمیدرضا نیلی ثانی[۲]

[۲]گروه آمار، دانشگاه بیرجند

[۳]گروه آمار، دانشگاه فردوسی

چکیده: در بررسی سری زمانی قبل از هر تحلیلی باید با روش یا آزمون آماری مناسب استقلال داده‌ها مورد بررسی قرار گیرد. در این مقاله یک آزمون ساده و توانا را برای تشخیص وابستگی سری زمانی مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. پس از تشریح مبنای آزمون، توزیع حدی آماره آزمون مبتنی بر آنتروپی جایگشت را بدست آوردیم. در انتها به کمک شبیه سازی به مقایسه آزمون پیشنهادی با سایر آزمون‌ها پرداختیم. نتایج بدست آمده حاکی از آن بوده که آزمون پیشنهادی برای حجم نمونه بالا عملکرد بهتری برای تشخیص وابستگی غیر خطی دارد.

واژه‌های کلیدی: آزمون استقلال، آنتروپی نمادین، دینامیک نمادین، سری زمانی غیر خطی، متغیرهای تصادفی $m-$وابسته.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 37M10، 68Q30، 62G10.

۱ مقدمه

یک سری زمانی دنباله مرتب شده‌ای از مشاهدات بر حسب زمان است. نظر به اینکه در تحلیل‌های متداول آماری لازم است داده‌ها مستقل و هم توزیع باشند، تجزیه و تحلیل سری زمانی با روش‌های معمول آماری مقدور نیست. از این رو قبل از تحلیل آماری سری زمانی بادید فرضیه‌ی مستقل و هم توزیع بودن داده‌ها آزمون گردد. طیف گسترده‌ای از آزمون‌های ناپارامتری به منظور انجام فرضیه استقلال وجود دارد که می‌توان آن‌ها را به چهار دسته زیر تقسیم‌بندی کرد:

۱. آزمون‌های مبتنی بر رتبه[۱] و گردش[۲] همانند بارتلت (۱۹۸۲) و مراجع آن.

۲. آزمون‌های مبتنی بر اندازه‌های واگرایی همانند قودی و همکاران (۲۰۰۱) و مراجع آن.

۳. آزمونی‌هایی بر مبنای تابع مشخصه همانند هانگ (۲۰۰۰) و مراجع آن.

۴. آزمونهایی بر مبنای همبستگی انتگرال همانند آزمون BDS(بروک و همکاران (۱۹۹۶)) .

[۱]عماد اشتری نژاد: emaad7@gmail.com

[۱]Rank
[۲]RUN

اما در سال های اخیر آزمون‌های استقلال مبتنی بر دینامیک نمادین[۳] مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است. ماتیلا-گارسیا (۲۰۰۷) آزمون استقلال سری زمانی را مبتنی بر دینامیک نمادین بنانهاد. او توانست با استفاده از معیار واگرایی χ^2 آزمونی را مبتنی دینامیک نمادین ارائه داد. روش دیگر به منظور آزمون استقلال مبتنی بر آنتروپی جایگشت می‌باشد که توسط ماتیلا- گارسیا و مارین (۲۰۰۸) معرفی شد. آن‌ها با استفاده از شبیه سازی آن را با برخی از آزمون های دیگر مقایسه کردند. نتایج آن‌ها حاکی از آن بوده که آزمون مبتنی بر آنتروپی نمادین برای حجم نمونه بالای ۲۰۰ عملکرد بهتری در تشخیص وابستگی غیر خطی سری زمانی خواهد داشت. در سال‌های اخیر آنتروپی جایگشت و آزمون استقلال مبتنی بر آن مورد توجه محققان زیادی بخصوص در زمینه اقتصاد بوده است. به طور مثال سنسوی و همکاران (۲۰۱۵) از آزمون استقلال مبتنی بر آنتروپی جایگشت برای مقایسه پیش بینی پذیری بازار سهام سنتی و اسلامی استفاده نمودند.

اما اِشکال ماتیلا- گارسیا و مارین (۲۰۰۸) این بوده که بردارهایی از متغیرها را که وابسته بوده را مستقل در نظر گرفته‌اند. این موضوع سبب شده که نتایج آن‌ها از واقعیت به دور بوده و آماره آزمون معرفی شده توسط ماتیلا- گارسیا و مارین (۲۰۰۸) دارای توزیع خی-دو نباشد. از این رو در این پژوهش برآنیم تا با برطرف نمودن اِشکال ماتیلا- گارسیا و مارین (۲۰۰۸) آزمونی توانا برای تشخیص وابستگی داده‌های سری زمانی ارائه دهیم. در این راستا در بخش دوم و سوم چگونگی انجام آزمون استقلال مبتنی بر آنتروپی را تشریح می‌کنیم. در بخش چهارم قضایای حدی را به منظور انجام آزمون، اثبات خواهیم نمود. در بخش پنجم به مقایسه آزمون معرفی شده و سایر آزمون‌ها خواهیم پرداخت. در انتها بحث و نتیجه گیری از نتایج بدست آمده، مطرح می‌شود.

۲ چهارچوب آزمون

مجموعه‌ای متوالی و متناهی از متغیرهای تصادفی $\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, ..., Z_{t_n}\}$ را از فرآیند تصادفی $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ در نظر بگیرد. در هر موقعیت دلخواه‌ای $t \in \{t_1, t_2, .., t_{n-m+1}\}$ بردارهای m-بعدی جدید

$$Z_t(m) = (Z_t, Z_{t+1}, ..., Z_{t+m-1})$$

را خواهیم داشت. فرض کنید $\Gamma = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{m!}\}$ مجموعه تمامی نمادهای جایگشت باشد که در آن $\pi_i = (i_1, i_2, ..., i_m)$ $(i_l \in \{0, 1, ..., m-1\}, l = 1, 2, 3, ..., m)$ است. تابع $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Gamma$ به عنوان نماد سازی جایگشت به هریک از بردارهای $Z_m(t)$ بر حسب ترتیب(بزرگتر یا کوچکتر) عناصر آن یک نماد از مجموعه Γ را منتسب می‌کند، یعنی زمانی که عناصر $Z_m(t)$ مرتب شوند اگر رابطه $Z_{t+i_1} \leq Z_{t+i_2} \leq ... \leq Z_{t+i_m}$ برقرار باشد، $(i_1, i_2, ..., i_m)$ نماد مربوط به $Z_m(t)$ می‌باشد. لازم به ذکر است اگر $Z_{t+i_{s-1}} = Z_{t+i_s}$ باشد، آنگاه $i_{s-1} < i_s$ خواهد بود. در این پژوهش هدف آزمونِ فرضیه زیر می‌باشد:

$$H_0 : \{Z_t, t \in \mathbb{Z}\} \text{مستقل و هم توزیع باشند.}$$

از این رو پس از تعیین m، تحت نمادسازی جایگشت برای فرضیه H_0 خواهیم داشت:

$$H_0 : P(Z_{t+i_1} \leq Z_{t+i_2} \leq ... \leq Z_{t+i_m}) = \frac{1}{m!} \quad \forall (i_1, i_2, ..., i_m) \in \Gamma$$

به راحتی می‌توان نشان داد که به ازای m خاص، فرض H_0 برقرار است اگروتنها اگر جایگشت‌ها دارای توزیع یکنواخت گسسته باشد.

[۳] Symbolic Dynamic

۳ آماره آزمون مبتنی بر آنتروپی جایگشت

بانت و پمپی (۲۰۰۲) اولین بار آنتروپی جایگشت را معرفی نمودند. این آنتروپی تعمیمی از آنتروپی شانون برای احتمال رخداد هر جایگشت می‌باشد، یعنی اگر p_{π_i} احتمال رخداد جایگشت π_i باشد، آنتروپی جایگشت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h(m) = -\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} log(p_{\pi_i}). \qquad (۱.۳)$$

قضیه ۱.۳. *فرض H_0 برقرار است اگر وتنها اگر $h(m)$ ماکسیمم شود.*

اثبات. با توجه به نامساوی جنسن و با عنایت به مقعر بودن تابع $\phi(x) = -x\log(x)$، داریم:

$$\begin{aligned} h(m) &= -\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} log(p_{\pi_i}) \\ &= m! \sum_{i=1}^{m!} \frac{1}{m!}\phi(p_{\pi_i}) \\ &\le m!\phi\Big(\sum_{i=1}^{m!}\frac{p_{\pi_i}}{m!}\Big) \\ &= m!\phi\Big(\frac{1}{m!}\Big). \\ &= log(m!). \end{aligned} \qquad (۲.۳)$$

که در آن نامساوی (۲.۳)، با توجه به نامساوی جنسن بدست آمده است. از طرفی با استناد به نامساوی جنسن تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $p_{\pi_1} = p_{\pi_2} = \ldots = p_{\pi_{m!}}$ باشد. از طرفی با توجه به اینکه $\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} = 1$ می‌باشد، فرض H_0 برقرار است اگر و تنها اگر $p_{\pi_i} = \frac{1}{m!}$. بنابراین حکم اثبات می‌شود. □

بنابراین با استناد به قضیه ۱.۳، $h(m)$ بیشترین مقدار خود را تحت شرط H_0 اختیار خواهدکرد. از این‌رو می‌توان یک آزمون مبتنی بر آنتروپی جایگشت از مقایسه $log(m!)$ با برآوردگی از $h(m)$ همانند $\widehat{h}(m)$ را ارئه نمود. از این رو اگر $K = n - m + 1$ آنگاه آماره زیر را می‌توان به عنوان آماره آزمون پیشنهاد داد:

$$D_n(m) = -2K\Big[\widehat{h}(m) - log(m!)\Big]. \qquad (۳.۳)$$

با استناد به قضیه ۱.۳ می‌توان آزمونی مبتنی بر $D_n(m)$ ارائه داد که یک طرفه بوده و برای مقادیر بزرگ $D_n(m)$ فرضیه H_0 را رد نماید. از این روکافیست توزیع حدی آماره $D_n(m)$ را تحت فرضیه H_0 بدست آوریم.

۴ توزیع حدی آماره آزمون

قبل از بدست آوردن توزیع حدی آماره $D_n(m)$ لازم است تا مفاهیم و قضیه‌هایی که به کمک آن احتیاج داریم را بیان نماییم.

تعریف ۱.۴. *فرآیند تصادفی $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ را m-وابسته گویند اگر هر دو بردار متوالی که حداقل m واحد زمانی با هم فاصله داشته، از هم مستقل باشند، یعنی هر دو بردار تصادفی همانند $(Z_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_{t+i})$ و $(Z_{t+j}, Z_{t+j+1}, \ldots, Z_{t+r})$ تحت شرط $j - i > m$ از یکدیگر مستقل باشند.*

در این راستا برای نماد π_i تحت نماد سازی f، متغیرتصادفی $W_{\pi_i,t}$ با تابع

$$W_{\pi_i,t} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } f(Z_m(t)) = \pi_i \\ 0 & \text{اگر } f(Z_m(t)) \neq \pi_i \end{cases}$$

تعریف می‌گردد. در این صورت $W_{\pi_i,t}$ دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت p_{π_i} می‌باشد. همچنین p_{π_i} به قسمی است که

$$\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} = 1.$$

به راحتی می‌توان دریافت که تحت فرض H_0 فرآیند تصادفی $\{f(Z_m(t)), t \in \mathbb{Z}\}$، $(m-1)$-وابسته می‌باشد. از طرفی با درنظر $\widehat{p}_{\pi_j} = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K} W_{\pi_j,t} = \overline{W}_{j,K}$ برآورد $h(m)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{h}(m) = -\sum_{i=1}^{m!} \widehat{p}_{\pi_i} log(\widehat{p}_{\pi_i}).$$

قضیه ۲.۴ (السینگر (۲۰۱۰)). فرض کنید $\{f(Z_m(t)); t = 1, 2, ..., n\}$ مانا و $(m-1)$-وابسته بوده که مقادیر $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ را اختیار می‌کنند. اگر $K = n - m + 1$ و $Q^{(l)}$ ماتریس احتمال انتقال برای فاصله های زمانی با اختلاف l باشد. همچنین $\mathbf{W_K}$ و Σ به صورت زیر تعریف شوند:

$$\mathbf{W_K} = (\frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K} W_{\pi_1,t}, \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K} W_{\pi_2,t}, ..., \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K} W_{m!,t}) = (\overline{W}_{1,K}, \overline{W}_{2,K}, ..., \overline{W}_{K,m!})$$

$$\Sigma = diag(P) - (2m+1)PP^T + diag(P)\sum_{l=1}^{m-1} Q^{(l)} + \sum_{l=1}^{m-1} {Q^{(l)}}^T diag(P)$$

آنگاه

$$\sqrt{K}(\mathbf{W_K} - P) \xrightarrow[K\longrightarrow\infty]{d} N(0, \Sigma).$$

قضیه ۳.۴ (دیک و گانست (۱۹۸۵)). فرض کنید X دارای توزیع نرمال q-متغیره با میانگین 0 و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ باشد. اگر A ماتریس متقارن از مرتبه q، $r = rank(\Sigma A \Sigma)$، λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس $A\Sigma$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ متغیرهای مستقل و با توزیع نرمال استاندارد باشند آنگاه،

$$X^T A X \overset{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i^2 .$$

قضیه ۴.۴. فرض کنید m ثابت، $K = n - m + 1$، $U = (\frac{1}{m!}, \frac{1}{m!}, ..., \frac{1}{m!})$، $A = diag(U^{-1})$،

$$\Sigma = \frac{1}{(m!)^2}\left(m!\left(I + \sum_{l=1}^{m-1} Q^{(l)} + \sum_{l=1}^{m-1} Q^{(l)\,T}\right) - (2m-1)\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right),$$

λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس $A\Sigma$ و متغیرهای تصادفی $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ دارای توزیع نرمال استاندار باشد. اگر $\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, ..., Z_{t_n}\}$ مستقل و هم توزیع باشند، آنگاه

$$D_n(m) = -2K\left[\widehat{h}(m) - log(m!)\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{d} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i^2 . \tag{۱.۴}$$

اثبات. فرض کنید $\phi(x) = -x\log(x)$ است. برای محاسبه توزیع حدی مورد نظر، بسط تیلور $\widehat{h}(m)$ را حول $h(m)$ در $p = (p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, ..., p_{\pi_{m!}})$، تا مرتبه دوم به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\widehat{h}(m) = h(m) + \sum_{i=1}^{m!-1} \frac{\partial h(m)}{\partial p_{\pi_i}}(\overline{W}_{i,K} - p_{\pi_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m!-1} \frac{\partial^2 h(m)}{\partial p_{\pi_i}\partial p_{\pi_j}}(\overline{W}_{i,K} - p_{\pi_i})^2 + o(O_p(n^{-1})).$$

که در آن:

$$\frac{\partial h(m)}{\partial p_{\pi_i}} = [\phi'(p_{\pi_i}) - \phi'(p_{\pi_{m!}})],$$

اگر $i = j$ باشد،

$$\frac{\partial^2 h(m)}{\partial p_{\pi_i}\partial p_{\pi_j}} = \Big(\phi''(p_{\pi_i}) + \phi''(p_{\pi_{m!}})\Big),$$

و اگر $i \neq j$ باشد،

$$\frac{\partial^2 h(m)}{\partial p_{\pi_i}\partial p_{\pi_j}} = \phi''(p_{\pi_{m!}}).$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\widehat{h}(m) &= h(m)\\ &+ \sum_{i=1}^{m!}\Big(\phi'(p_{\pi_i}) - \phi'(p_{\pi_{m!}})\Big)\Big(\overline{W}_{j,K} - p_{\pi_j}\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m!-1}\Big(\phi''(p_{\pi_i}) + \phi''(p_{\pi_{m!}})\Big)\Big(\overline{W}_{i,K} - p_{\pi_i}\Big)^2\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1, i\neq j}^{m!-1}\phi''(p_{\pi_{m!}})\Big(\overline{W}_{i,K} - p_{\pi_i}\Big)\Big(\overline{W}_{j,K} - p_{\pi_j}\Big)\\ &+ o\Big(O_p(n^{-1})\Big)\end{aligned} \tag{۲.۴}$$

تحت فرض H_0 شرط $p_{\pi_1} = p_{\pi_2} = ... = p_{\pi_{m!}} = \frac{1}{m!}$ برقرار بوده و بنابراین

$$(\phi'(p_{\pi_i}) - \phi'(p_{\pi_{m!}})) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m! - 1.$$

از این رو جمله دوم رابطه (۲.۴) برابر صفر خواهد بود. پس از محاسباتی ساده رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$D_n(m) = -2K\Big[\widehat{h}(m) - log(m!)\Big] = Km!\sum_{i=1}^{m!}(\overline{W}_{i,K} - \frac{1}{m!})^2 + Km!o\Big(O_p(n^{-1})\Big) \tag{۳.۴}$$

بنابراین بنا به قضیه اسلاتسکی(گات (۲۰۰۶)) دو طرف تساوی در رابطه(۳.۴) توزیع حدی یکسانی خواهند داشت. حال با توجه به قضیه ۲.۴ و با در نظرگرفتن $U = (\frac{1}{m!}, \frac{1}{m!}, ..., \frac{1}{m!})$ رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\sqrt{K}(\mathbf{W_K} - U) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{d} N(0, \Sigma)$$

بنابراین اگر $A = diag(U^{-1})$ باشد با استفاده از قضیه ۳.۴ رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$K(\mathbf{W_K} - U)^T A(\mathbf{W_K} - U) = Km!\sum_{i=1}^{m!}(\overline{W}_{i,K} - \frac{1}{m!})^2 \stackrel{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{r}\lambda_i Z_i^2$$

□

توجه کنید که توزیع حدی $D_n(m)$ به صورت مجموع موزون توزیع‌های خی-دو مستقل است که نه تنها نام مشخصی نداشته بلکه تابع چگالی مشخصی هم ندارد و برای استفاده از این قضیه به منظور انجام آزمون استقلال داشتن چندک‌های این توزیع کافی‌است. از این رو چندک‌های این توزیع را می‌توان بر مبنای روش ارائه شده توسط لیو و همکاران (۲۰۰۹) و با استفاده بسته $CompQuadForm$ در نرم افزار R بدست آورد.

۵ شبیه سازی

به منظور سنجش توان آزمون پیشنهادی($D_n(m)$)، این آزمون را با آزمون‌های ارائه شده توسط بارتلت (۱۹۸۲)، کاکس و استوارت (۱۹۴۳) ،من (۱۹۴۵)مور والیز (۱۹۴۳) و والد و ولفویتز (۱۹۴۰) (آزمون گردش) که به ترتیب با BR، CS، DS، RT، RN وTP نشان داده شده، مقایسه شد. این آزمون‌ها را می توان در ماتئوس وکایرو (۲۰۱۳)یافت. به منظور مقایسه توان آزمون‌ها، مدل‌های زیر را برای شبیه‌سازی داده‌های وابسته استفاده کرده‌ایم. در فرآیند شبیه سازی برای نمونه‌هایی به حجم ۵۰، ۱۲۰ و ۴۰۰ با ۱۰۰۰۰بار تکرار رد یا عدم رد فرض H_0 مشخص و میانگین تعداد دفعات رد فرض H_0 برای توان آزمون محاسبه گردید.

$$DGP1: X_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$$

$$DGP2: X_t = 0.8\sqrt{|X_{t-1}|} + \varepsilon_t$$

$$DGP3: X_t = 0.3X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$DGP4: X_t = 0.8\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$DGP5: X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad h_t = (1 + 0.8X_{t-1}^2)$$

جدول ۱: مقایسه توان آزمون‌ها برای حجم نمونه۵۰

$Alternative$	TP	RN	RT	DS	CS	BR	$D(3)$
$DGP1$	۰/۰۷۸۵	۰/۰۸۲۸	۰/۰۴۹	۰/۱۰۵۷	۰/۰۴۳	۰/۰۷۴۵	۰/۱۰۵۸
$DGP2$	۰/۱۲۳۶	۰/۲۵۲۲	۰/۱۱۵۴	۰/۰۷۴۴	۰/۰۸۵	۰/۳۱۴۳	۰/۰۸۲۳
$DGP3$	۰/۱۶۸۸	۰/۲۹۲۷	۰/۱۴۳۷	۰/۰۶۱۶	۰/۱۰۶۸	۰/۴۸۸۶	۰/۰۷۴۸
$DGP4$	۰/۱۷۱۴	۰/۱۴۶۲	۰/۰۶۰۶	۰/۰۸۵۸	۰/۰۴۶	۰/۱۲۱۱	۰/۰۹۴۹
$DGP5$	۰/۰۷۹۳	۰/۰۶۲۹	۰/۰۵۰۴	۰/۰۶۹۳	۰/۰۴۱۷	۰/۰۸۹	۰/۰۵۹۸

جدول ۲: مقایسه توان آزمون‌ها برای حجم نمونه۱۲۰

$Alternative$	TP	RN	RT	DS	CS	BR	$D(۴)$
DGP۱	۰٫۰۸۴۶	۰٫۰۹۶۶	۰٫۰۵۱	۰٫۲۰۹۷	۰٫۰۲۷۷	۰٫۰۷۸۱	۰٫۲۹۸۸
DGP۲	۰٫۱۹۴۳	۰٫۵۰۳۶	۰٫۱۱۱۵	۰٫۱۱۶۵	۰٫۰۵۹۲	۰٫۶۶۰۱	۰٫۱۷۹۹
DGP۳	۰٫۲۷۰۱	۰٫۵۶۶۳	۰٫۱۴۰۹	۰٫۰۷۱۶	۰٫۰۷۳۶	۰٫۸۷۴۶	۰٫۱۹۵۶
DGP۴	۰٫۲۷۲۹	۰٫۲۱۶۹	۰٫۰۵۴۶	۰٫۱۰۱۷	۰٫۰۲۹۳	۰٫۱۷۳۳	۰٫۳۴۵۱
DGP۵	۰٫۰۷۳۸	۰٫۰۵۳۹	۰٫۰۵۰۳	۰٫۰۸۳۷	۰٫۰۲۷۵	۰٫۰۸۶۴	۰٫۱۰۲۷

جدول ۳: مقایسه توان آزمون‌ها برای حجم نمونه۴۰۰

$Alternative$	TP	RN	RT	DS	CS	BR	$D(۴)$
DGP۱	۰٫۱۸۹۴	۰٫۱۷۱۶	۰٫۰۴۹۸	۰٫۵۱۹۹	۰٫۰۴۲۲	۰٫۰۷۷۵	۰٫۸۱۵۹
DGP۲	۰٫۴۹۴۸	۰٫۹۵۱۱	۰٫۱۲۰۱	۰٫۲۴۶۶	۰٫۰۸۲۴	۰٫۹۹۳۵	۰٫۵۱۲۴
DGP۳	۰٫۶۸۶۷	۰٫۹۶۹۵	۰٫۱۴۵۴	۰٫۰۶۰۵	۰٫۱۰۲	۰٫۹۹۹۸	۰٫۵۷۲۹
DGP۴	۰٫۷۱۹۷	۰٫۵۴۰۲	۰٫۰۵۹۲	۰٫۰۹۶	۰٫۰۴۶۳	۰٫۳۶۲۳	۰٫۹۰۸
DGP۵	۰٫۱۲۱۳	۰٫۰۵۲۷	۰٫۰۵۳	۰٫۰۸۰۳	۰٫۰۴۲۵	۰٫۰۹۱۹	۰٫۱۷۵۷

بحث و نتیجه‌گیری

همان طورکه در جدول‌های سه‌گانه پیداست، هیچ یک از آزمون‌ها برتری کاملی بر دیگران ندارد. برتری آزمون ارائه شده برای مدل‌های غیرخطیDGP۱، DGP۲، DGP۴ و DGP۵ و برای حجم نمونه بالا بوده است. این با توجه به خواص حدی آماره ارائه شده دور از انتظار نبوده است. همان طورکه در جدول ۵ ملاحظه می‌شود ، برای حجم نمونه ۴۰۰ آزمون مبتنی بر آنتروپی جایگشت ($D(m)$) برتری محسوسی نسبت سایر آزمون‌ها داشته است. در مجموع می توان چنین گفت که آزمون مبتنی بر جایگشت می تواند برای تشخیص وابستگی غیرخطی داده‌های سری زمانی با حجم نمونه بالا مورد استفاده قرارگیرد.

مراجع

Bandt, C., Pompe, B. (2002). Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. Physical review letters, 88(17), 174102.

Bartels, R. (1982). The rank version of von Neumann's ratio test for randomness. Journal of the American Statistical Association, 77(377), 40-46.

Broock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D., and LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. Econometric reviews, 15(3), 197-235.

Cox, D. R., and Stuart, A. (1955). Some quick sign tests for trend in location and dispersion. Biometrika, 80-95.

Dik, J. J. and de Gunst, M. C. M. (1985). The distribution of general quadratic forms in normal variables. Statistica Neerlandica, 39, 14-26.

Elsinger, H. (2010). Independence tests based on symbolic dynamics (No. 165). Oesterreichische Nationalbank.

Gut, A. (2006). Probability: A Graduate Course. Springer Science Business Media.

Ghoudi, K., Kulperger, R. J., and Rémillard, B. (2001). A nonparametric test of serial independence for time series and residuals. Journal of Multivariate Analysis, 79(2), 191-218.

Hong, Y. (2000). Generalized spectral tests for serial dependence. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 62(3), 557-574.

Liu, H., Tang, Y., and Zhang, H. H. (2009). A new chi-square approximation to the distribution of non-negative definite quadratic forms in non-central normal variables. Computational Statistics and Data Analysis, 53(4), 853-856.

Mann, H. B. (1945). Non-Parametric Tests against Trend. Econmetrica, 13, 245-259.

Mateus, A., and Caeiro, F. (2013). Comparing several tests of randomness based on the difference of observations. In AIP Conf. Proc. 1558, 809-812.

Matilla-García, M. (2007). A non-parametric test for independence based on symbolic dynamics. Journal of Economic Dynamics and Control, 31(12), 3889-3903.

Matilla-García, M., and Marín, M. R. (2008). A non-parametric independence test using permutation entropy. Journal of Econometrics, 144(1), 139-155.

Moore, G. H., and Wallis, W. A. (1943). Time series significance tests based on signs of differences. Journal of the American Statistical Association, 38(222), 153-164.

Sensoy, A., Aras, G., and Hacihasanoglu, E. (2015). Predictability dynamics of Islamic and conventional equity markets. The North American Journal of Economics and Finance, 31, 222-248.

Wald, A., and Wolfowitz, J. (1940). On a test whether two samples are from the same population. The Annals of Mathematical Statistics, 11(2), 147-16.