سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

روش‌های بوت‌استرپ در نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

پریسا نیرومند [1]، نصراله ایرانپناه

گروه آمار دانشگاه اصفهان

چکیده: نمونه‌گیری از مهمترین شاخه‌های آمار است. بنابراین استفاده از یک روش نمونه‌گیری مناسب بسیار مهم است. زمانی که اندازه‌گیری واحدها همراه با هزینه و زمان بالا باشد، ولی رتبه‌بندی آنها به سادگی قابل انجام باشد، از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار استفاده می‌شود. در این مقاله ابتدا به معرفی نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار پرداخته می‌شود. سپس الگوریتمی از سه روش بوت‌استرپ در نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به‌صورت بوت‌استرپ سطری نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، بوت‌استرپ نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، بوت‌استرپ سطری آمیخته نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ارائه می‌شود. در انتها یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه این سه روش مختلف برای بازه اطمینان میانگین پیراسته ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: بوت‌استرپ سطری نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، بوت‌استرپ نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، بوت‌استرپ سطری آمیخته نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، شبیه‌سازی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62D05 ، 62F40.

۱ مقدمه

نمونه‌گیری از مهمترین بخش‌های علم آمار است که یکی از اهداف مهم آن به‌دست آوردن استنباطهایی در باره پارامترهای جامعه است. بنابراین استفاده از یک روش نمونه‌گیری مناسب بسیار مهم و با اهمیت است. یکی از روش‌های متداول، نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS[2]) است. زمانی که اندازه‌گیری واحدهای نمونه نیازمند صرف وقت و هزینه زیادی باشد ولی رتبه‌بندی واحدها در یک مجموعه آسان و ارزان باشد، روش دیگری به نام نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار(RSS[3]) استفاده می‌گردد که بسیار کاراتر از روش SRS است.

[1] پریسا نیرومند : parisa.niroomand00@gmail.com

[2] Simple Random Sampling

[3] Random Set Sampling

از طرف دیگر، در این مقاله روش بوت‌استرپ در بازنمونه‌گیری داده‌ها بر اساس روش RSS مورد استفاده قرار می‌گیرد. از روش‌های بوت‌استرپ برای برآورد اندازه دقت برآوردگرها مانند اریبی و خطای استاندارد و بدست آوردن بازه‌های اطمینان و آزمون فرض برای پارامترهای مجهول جامعه استفاده می‌شود.

روش RSS اولین بار توسط مک اینتایر (۱۹۵۲) به منظور برآورد محصولات یونجه ارائه گردید. تاکاهاشی و واکیموتو (۱۹۶۸) ضمن اثبات نااریبی برآوردگر میانگین جامعه در روش RSS، نشان دادند روش RSS از SRS کاراتر است. چن و همکاران (۲۰۰۴) روش بوت استرپ RSS به روش سطری را معرفی نمودند. مدرس و همکاران (۲۰۰۶) دو روش مختلف بوت‌استرپ را برای تحلیل پارامترهای جامعه بر اساس روش RSS ارائه کردند. آنها از این دو روش بوت‌استرپ برای بدست آوردن خطای استاندارد و برآورد بازه اطمینان استفاده و به مقایسه آنها با یکدیگر پرداختند. امیری و همکاران (۲۰۱۳) الگوریتم بوت‌استرپ در روش RSS که در آن تعداد مشاهدات برای هر رتبه‌ای می‌تواند با رتبه دیگر متفاوت باشد را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها بازنمونه‌گیری از روش RSS از طریق انتقال به روش RSS را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها همچنین الگوریتم‌هایی برای به‌دست آوردن بازنمونه‌گیری از یک روش RSS ارائه دادند و به بررسی چندین خاصیت از جمله مجانبا نرمال بودن برآوردگرها پرداختند. آن‌ها به‌علاوه روش‌های ارائه شده را با بوت‌استرپ پارامتری که از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای آزمون فرض در مورد میانگین جامعه به‌دست آمده بود مقایسه کردند. فری (۲۰۱۳) بازه اطمینان بوت‌استرپ را برای تابع توزیع جامعه بر اساس روش RSS ارائه نمود. وی نشان داد این بازه اطمینان از دقت بالایی حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک برخوردار است.

در این مقاله ابتدا در بخش ۲ به معرفی روش RSS پرداخته می‌شود. سپس روش بوت‌استرپ در بخش ۳ معرفی می‌گردد. در ادامه سه الگوریتم از روش بوت‌استرپ در RSS به‌صورت بوت‌استرپ سطری مجموعه رتبه‌دار (BRSSR[۳])، بوت‌استرپ مجموعه رتبه‌دار (BRSS[۴]) و بوت‌استرپ سطری آمیخته مجموعه رتبه‌دار (MRBRSS[۵]) در بخش ۴ ارائه می‌گردد. در بخش ۵ یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه این سه روش مختلف برای بازه اطمینان میانگین پیراسته ارائه می‌گردد و در انتها بحث و نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲ روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

در شرایطی که اندازه‌گیری واحدهای جامعه مشکل یا پرهزینه باشد، اما بتوان واحدهای جامعه را به سادگی و با کمترین هزینه رتبه‌بندی کرد، استفاده از روش RSS باعث افزایش دقت و کارایی برآوردگرهای مورد نظر نسبت به روش SRS می‌شود. در روش SRS یک نمونه مستقیماً از جامعه انتخاب می‌شود ولی در روش RSS هر بار یک نمونه بزرگ از واحدهای جامعه انتخاب، واحدها مرتب سپس نمونه نهایی از کل نمونه انتخاب شده به‌دست می‌آید.

الگوریتم ۱. مراحل مختلف روش به‌صورت زیر است:

[۳] Bootstrap RSS by Rows

[۴] Bootstrap RSS

[۵] Mixed Row Bootstrap RSS

۱) ابتدا k^2 واحد به تصادف از جامعه مورد مطالعه انتخاب و آن ها به k گروه k تایی تقسیم می‌شوند:

$$\begin{array}{cccc} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kk} \end{array}$$

۲) سپس بدون صرف هیچ هزینه‌ای و صرفا به طور شهودی و بر اساس قضاوت شخصی هر گروه بصورت زیر رتبه‌بندی می‌گردد:

$$\begin{array}{cccc} X_{(1)1} & X_{(2)1} & \cdots & X_{(k)1} \\ X_{(1)2} & X_{(2)2} & \cdots & X_{(k)2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(1)k} & X_{(2)k} & \cdots & X_{(k)k} \end{array}$$

۳) اکنون از گروه i-ام $(i = 1, 2, \ldots, k)$، i-امین واحد مرتب شده بصورت زیر

$$X_{(1)1} \quad X_{(2)2} \quad \cdots \quad X_{(k)k}$$

انتخاب و مقادیر متغیر مورد نظر اندازه‌گیری می‌شود که برای سادگی بصورت زیر

$$X_{(1)} \quad X_{(2)} \quad \cdots \quad X_{(k)}$$

نمایش داده می‌شود. از آن‌جا که با بزرگ شدن k امکان دارد رتبه‌بندی با خطای بیشتری صورت گیرد معمولاً k را کوچک انتخاب می‌کنند و در صورتی که نمونه‌ای به حجم $n = mk$ نیاز باشد، مراحل ۱ الی ۳، m بار تکرار می‌گردد و در نهایت نمونه RSS بصورت $\{X_{(r)j}\ ;\ r = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, m\}$ بدست می‌آید.

۴ روش بوت‌استرپ

افرون (۱۹۷۹) روش بوت‌استرپ را برای برآورد اندازه دقت برآوردگرها و همچنین محاسبه بازه‌های اطمینان و آزمون فرض برای پارامترها بر اساس بازنمونه‌گیری از داده‌ها بدون نیاز به فرض معلوم بودن توزیع داده‌ها معرفی نمود. اگر داده‌های نمونه بر اساس روش SRS باشند، نمونه‌گیری از داده‌های موجود نیز بر اساس همین طرح انجام می‌گیرد. در روش بوت‌استرپ پارامتری توزیع $F_x(\theta)$ معلوم و به پارامتر نامعلوم θ بستگی دارد، برآورد این پارامتر بر اساس یک آماره مناسب مانند $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ انجام می‌گیرد و نمونه بوت استرپ $X_1^*, \ldots, X_n^*$ با بازنمونه گیری از توزیع $F_x\left(\hat{\theta}\right)$ انجام می‌شود. در روش بوت‌استرپ ناپارامتری نیازی به معلوم بودن توزیع نیست.

الگوریتم ۲. مراحل مختلف الگوریتم بوت‌استرپ ناپارامتری بصورت زیر است:

۱) نمونه‌ی بوت‌استرپ $X_1^*, \ldots, X_n^*$ از تابع توزیع تجربی تولید می‌شود. به بیان دیگر نمونه بوت‌استرپ به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده باجایگذاری از نمونه مشاهده شده $x_1, \ldots, x_n$ بدست می‌آید.

۲) برآوردگر بوت‌استرپ $T^* = t(X_1^*, ..., X_n^*)$ محاسبه می‌گردد.

۳) برآورد بوت‌استرپ نظری اریبی، واریانس و همچنین توزیع برآوردگر T بصورت زیر است:

$$Bias^*(T^*) = E^*(T^*) - t$$

$$Var^*(T^*) = E^*[T^* - E^*(T^*)]^2$$

$$F_{T^*}(t) = P^*(T^* \leq t)$$

که در آن E^*، Var^* و P^* بترتیب امید ریاضی، واریانس و احتمال شرطی به شرط نمونه مشاهده شده $x_1, ..., x_n$ است.

۴) اگر برآورد نظری بوت‌استرپ در بخش ۳ جواب بسته‌ای نداشته باشد، مراحل ۱ و ۲، B بار تکرار و $T_1^*, ..., T_B^*$ محاسبه می‌گردد. معمولاً $50 < B < 1000$ است.

۵) برآورد بوت‌استرپ تجربی اریبی، واریانس و همچنین توزیع برآوردگر T به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\widehat{Bias^*(T^*)} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} T_i^* - T$$

$$\widehat{Var^*(T^*)} = \frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(T_i^* - \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} T_i^*)$$

$$\widehat{F_{T^*}(t)} = \frac{\#(T_i^* \leq t\ ,\ i = 1, ..., B)}{B}$$

به علاوه، در روش بوت‌استرپ بازه‌های اطمینان مختلف برای پارامتر θ وجود دارد (افرون و تیبشیرانی (۱۹۹۳)). به عنوان مثال برای یافتن بازه‌ی اطمینان صدکی بوت‌استرپ با ضریب $(1-\alpha)100\%$ بایستی $T_{(b)}^*$ ها را مرتب نمود $T_1^* \leqslant ... \leqslant T_B^*$ و سپس بازه اطمینان صدکی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(T^*_{[(B)\times(\frac{\alpha}{2})]}\quad,\quad T^*_{[(B)\times(1-\frac{\alpha}{2})]}\right)$$

۴ روش‌های بوت‌استرپ در RSS

استنباط آماری بر اساس روش RSS با پیچیدگی‌های بسیاری همراه است. بنابراین می‌توان از روش بوت‌استرپ در تحلیل داده‌های مبتنی بر روش RSS استفاده نمود. اگر داده‌های نمونه بر اساس طرح RSS باشند در روش بوت‌استرپ، بازنمونه‌گیری متفاوت و باید متناظر با طرح نمونه‌گیری اولیه داده‌ها طراحی گردد. در این بخش یک روش بوت‌استرپ که توسط چن و همکاران (۲۰۰۴) و دو روش دیگر بوت‌استرپ معرفی شده توسط مدرس و همکاران (۲۰۰۶) در روش RSS ارائه می‌گردند.

در روش RSS هرسطر $X_{(r)1}, ..., X_{(r)m} \overset{iid}{\sim} F(r)$ که $F_{(r)}$ تابع توزیع r-امین آماره ترتیبی است و به‌صورت $F_{(r)}(t) = P\left(Z_{(r)} \leq t\right)$ تعریف می‌شود که در آن $Z_{(r)}$، r-امین آماره ترتیبی از توزیع F است. برای هر t، فرض کنید $F(t) = k^{-1}\sum_{r=1}^{k} F_{(r)}(t)$ است.

حال تابع توزیع r-امین آماره ترتیبی، برای هر r، توسط تابع توزیع تجربی $F_{(r),m}(t) = m^{-1}\sum_{j=1}^{m} I\left(X_{(r)j} \le t\right)$ برآورد می‌شود. در این‌صورت تابع توزیع $F(t)$ با ترکیب تابع توزیع تجربی $F_{(r),m}(t)$ به‌صورت $F_n(t) = k^{-1}\sum_{r=1}^{k} F_{(r),m}(t)$ برآورد می‌گردد.

۱.۴ بوت‌استرپ سطری RSS (BRSSR)

در روش BRSSR ابتدا نمونه‌های بوت‌استرپ از هر $F_{(r),m}(t)$ به‌طور مستقل تولید و سپس با ترکیب آنها نمونه بوت‌استرپ بدست می‌آید.

الگوریتم ۳. مراحل مختلف این روش به‌صورت زیر است:

۱) ابتدا به هر عضو از r-امین سطر احتمال m^{-1} اختصاص داده و سپس m عضو به تصادف از توزیع $F_{(r),m}$ به روش نمونه‌گیری تصادفی باجایگذاری انتخاب می‌گردد و در نهایت $X^*_{(r)1},\dots,X^*_{(r)m}$ بدست می‌آید.

۲) مرحله اول برای $r = 1,\dots,k$، به منظور بدست آوردن نمونه بوت‌استرپ $\left\{X^*_{(r)j}\ ;\ r = 1,\dots,k, j = 1,\dots,m\right\}$ اجرا می‌گردد.

۳) برای هر $r = 1,\dots,k$ تعریف می‌گردد:

$$F^*_{(r),m}(t) = m^{-1}\sum_{j=1}^{m} I\left(X^*_{(r)j} \le t\right) \quad , \quad F^*_n(t) = k^{-1}\sum_{r=1}^{k} F^*_{(r),m}(t)$$

۲.۴ بوت‌استرپ RSS (BRSS)

در روش دوم توزیع F_n به عنوان توزیع اصلی بکار برده می‌شود و نمونه RSS از F_n تولید می‌گردد.

الگوریتم ۴. مراحل مختلف این روش به‌صورت زیر است:

۱) به هر عضو از RSS احتمال $1/mk$ اختصاص داده می‌شود.

۲) به طور تصادفی k عضو $y_1,\dots,y_k$ را از F_n تولید و آنها را به‌صورت صعودی مرتب نموده $y_{(1)} \le \dots \le y_{(k)}$ و قرار می‌دهیم $X^*_{(r)1} = y_{(r)}$.

۳) مرحله ۲ برای $r = 1,\dots,k$ اجرا می‌شود.

۴) مراحل ۲و۳، m بار به‌طور مستقل برای بدست آوردن $\left\{X^*_{(r)j}\ ;\ r = 1,\dots,k, j = 1,\dots,m\right\}$ تکرار می‌گردد.

۵) تابع توزیع تجربی بوت‌استرپ به‌صورت $F^*_n(t) = \frac{1}{mk}\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} I\left(X^*_{(r)j} \le t\right)$ تعریف می‌شود.

اگر $k = 1$ باشد این روش همان روش بوت‌استرپ SRS در بخش ۳ است و همچنین این روش برای $m \ge 1$ معتبر است.

۳.۴ بوت‌استرپ سطری آمیخته RSS (MRBRSS)

در دو روش قبل مرتب کردن اعضای هر سطر تاثیری در نتیجه نداشت. در هر صورت واحدها در r امین رتبه کوچکتر از واحدها در $(r+1)$-امین رتبه هستند. در این بخش روش دیگری برای بوت‌استرپ RSS ارائه می شود که نمونه بیشتری نسبت به روش BRSSR

انتخاب می کند.

الگوریتم ۵. مراحل مختلف این روش به‌صورت زیر است:

۱) به هر عضو از r-امین سطر احتمال m^{-1} برای $r = ۱, \dots, k$ تخصیص داده می‌شود و به‌طور تصادفی یک عضو از هر سطر انتخاب کرده تا $y^*_{[1]}, \dots, y^*_{[k]}$ به‌دست آید.

۲) $y^*_{[1]}, \dots, y^*_{[k]}$ را به صورت صعودی $y^*_{(1)} \leq \dots \leq y^*_{(k)}$ مرتب نموده و قرار می دهیم $X^*_{(r)1} = y^*_{(r)}$.

۳) مراحل ۱و۲ را برای $r = ۱, \dots, k$ اجرا نموده تا $X^*_{(1)1}, \dots, X^*_{(k)1}$ به‌دست آید.

۴) مراحل ۱ تا ۳ را m بار تکرار نموده تا $\left\{X^*_{(r)j} \;;\; r = ۱, \dots, k, j = ۱, \dots, m\right\}$ به‌دست آید.

۵) تابع توزیع تجربی بوت‌استرپ به‌صورت $F^*_n(t) = \frac{1}{mk} \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} I\left(X^*_{(r)j} \leq t\right)$ تعریف می‌شود.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش برای مطالعه بازه اطمینان برای میانگین پیراسته در روش RSS از یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده می‌گردد. در روش RSS میانگین پیراسته به عنوان برآوردگر استوار مرکز یک توزیع متقارن استفاده می‌شود. فرض کنید $X'_{(1)} \leq \dots \leq X'_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی باشند بنابراین میانگین پیراسته RSS به‌صورت زیر

$$\bar{X}^{\alpha}_n = (n - [n\alpha])^{-1} \sum_{i=1+[n\alpha]}^{n-[n\alpha]} X'_{(i)}$$

تعریف می‌گردد که در آن α درصد مشاهدات فرین حذف شده از داده‌هاست. تعداد تکرار در این مطالعه شبیه‌سازی ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده است. همچنین عملکرد سه روش BRSSR، BRSS و MRBRSS با استفاده از درصد پوشش برای بازه‌های اطمینان ۹۵٪ مورد مقایسه قرار می‌گیرند. سه عضو متقارن از خانواده لامبدا با میانگین صفر و واریانس یک و همچنین توزیع نمایی استاندارد با میانگین صفر و واریانس در نظر گرفته شده است. پارامترهای شکل سه عضو متقارن به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که پارامترهای کشیدگی به ترتیب ۱، ۲ و یا ۳ باشد. برآوردگر مورد نظر برای توزیع‌های متقارن، $\alpha = ۰/۲$ (که در هر دم توزیع ۱۰٪ مشاهدات حذف) و برای توزیع نمایی $\alpha = ۰/۱$ (در دم سمت راست توزیع ۱۰٪ مشاهدات حذف) در نظر گرفته شده‌اند. اندازه نمونه در همه حالت‌ها برابر با $k = ۲, ۴$ و $m = ۱۰, ۲۰, ۳۰$ و همچنین تعداد تکرار بوت‌استرپ $B = ۱۰۰۰$ در نظر گرفته شده است. نتایج در جدول ۱ نشان می‌دهد وقتی اندازه نمونه بزرگ باشد در بین سه روش عملکرد BRSS و BRSSR برای میانگین پیراسته در توزیع‌های متقارن حدوداً یکسان است. در حالیکه برای اندازه نمونه کوچک، BRSSR اندکی بهتر عمل می‌کند. کمترین درصد پوشش برای روش BRSS برابر با ۰/۹۴ است و در حالتی که مقدار کشیدگی تحت توزیع متقارن برابر با ۲ باشد. همچنین کمترین درصد پوشش برای روش BRSSR برابر با ۰/۹۳۰۶ است در حالتی که مقدار کشیدگی ۱ باشد. در روش MRBRSS کمترین درصد پوشش برابر با ۰/۸۷۷۶ است که در مقدار کشیدگی ۱ به‌دست آمده است. در توزیع نمایی، در همه حجم نمونه‌ها، عملکرد BRSS بهتر از BRSSR است.

جدول ۱: درصد پوشش بازه اطمینان ۰/۹۵ برای میانگین پیراسته

k	m	۱ =کشیدگی			۲ =کشیدگی		
		BRSSR	BRSS	MRBRSS	BRSSR	BRSS	MRBRSS
۲	۱۰	۰/۹۳۸۰	۰/۹۴۹۲	۰/۹۱۶۰	۰/۹۳۶۰	۰/۹۴۰۰	۰/۹۱۵۰
	۲۰	۰/۹۳۷۸	۰/۹۵۴۲	۰/۹۳۰۸	۰/۹۳۵۰	۰/۹۵۷۰	۰/۹۳۱۰
	۳۰	۰/۹۳۲۲	۰/۹۲۵۸	۰/۹۱۳۶	۰/۹۳۷۰	۰/۹۲۸۰	۰/۹۳۴۰
۴	۱۰	۰/۹۳۰۶	۰/۹۵۰۴	۰/۸۷۷۶	۰/۹۳۲۰	۰/۹۵۴۰	۰/۸۹۷۰
	۲۰	۰/۹۳۳۴	۰/۹۵۴۶	۰/۸۹۲۰	۰/۹۳۷۰	۰/۹۵۳۰	۰/۹۱۲۰
	۳۰	۰/۹۵۵۰	۰/۹۵۶۰	۰/۸۹۶۰	۰/۹۵۷۰	۰/۹۵۳۰	۰/۹۰۷۰
		۳ =کشیدگی			۲ =چولگی		
۲	۱۰	۰/۹۳۴۰	۰/۹۵۱۰	۰/۹۲۸۰	۰/۹۲۲۲	۰/۹۴۰۸	۰/۸۹۶۰
	۲۰	۰/۹۳۷۰	۰/۹۵۷۰	۰/۹۳۳۰	۰/۹۳۲۳	۰/۹۳۷۶	۰/۹۱۳۸
	۳۰	۰/۹۴۶۰	۰/۹۴۶۰	۰/۹۴۸۰	۰/۹۴۶۴	۰/۹۴۸۲	۰/۹۱۸۶
۴	۱۰	۰/۹۴۲۰	۰/۹۵۷۰	۰/۹۰۳۰	۰/۹۲۵۶	۰/۹۳۹۶	۰/۸۵۷۸
	۲۰	۰/۹۴۶۰	۰/۹۵۲۰	۰/۹۱۰۰	۰/۹۳۵۰	۰/۹۴۶۸	۰/۸۵۷۸
	۳۰	۰/۹۵۴۰	۰/۹۵۸۰	۰/۹۰۵۰	۰/۹۳۳۸	۰/۹۵۳۰	۰/۸۷۵۴

بحث و نتیجه‌گیری

RSS در روش‌هایی کاربرد دارد که نمونه‌ها تحت هزینه، زمان یا دیگر محدودیت ها جمع‌آوری شده است. در این مقاله سه روش بوت‌استرپ RSS ارائه گردید. روش BRSSR با نمونه‌گیری m مشاهده از هر k سطر بدست می‌آید. BRSSR یک روش سازگار و شهودی است که نمونه‌ها درون هر سطر تغییر پذیری کمتری نسبت به نمونه‌ها بین سطرها دارند. وقتی $m = ۱$ باشد، این روش مناسب نیست، چون توزیع تجربی بوت‌استرپ چندحالتی خواهد بود. همچنین روش BRSSR تغییرات کوچک را در هر RSS نشان نمی‌دهد.

در مقابل روش بوت‌استرپ سطری آمیخته، MRBRSS از این تغییرات کوچک استفاده می‌کند. RSS، جامعه را در سطوح نمونه طبقه‌بندی می کند تا طبقات تغییرات کمتری داشته باشند و کنترل روی اعضا نمونه بیشتر باشد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد آمیخته کردن اطلاعات طبقات اثری زیان‌بار درکاربرد این روش دارد. روش BRSSR همه داده‌ها را مرتب و به k طبقه تقسیم می کند، که هر طبقه دارای m مقدار است و نمونه‌گیری از این طبقات به دست می‌آید. روش‌های دیگری نیز پیشنهاد می‌شود که RSS را از هر سطر بدست می‌آورد. متاسفانه هر دو روش عملکرد نامناسبی در شبیه‌سازی نشان می‌دهند. روش BRSS با استفاده از تکرار مشاهدات RSS نمونه‌گیری می‌کند. در حجم نمونه یکسان، عموما RSS از SRS کاراتر است. این طرح نمونه‌گیری نیز دارای همان خواص است. در میان سه روش بوت‌استرپ ذکر شده در این مقاله، روش BRSS پیشنهاد می‌گردد.

مراجع

Amiri, S., Jafari Jozani, M., and Modarres, R. (2013), Resampling unbalanced ranked set samples with application in testing hypothesis about the population mean. *Journal of Agricultural, Biological, and Enviromental Statistics*. 19(1) 1-17.

Chen, Z., Bai, Z., and Sinha, B., (2004). *Ranked Set Sampling: Theory and Application*. Springer, New York.

Efron, B. (1979) Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals Statistic*, 7, 1–26.

Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*; Chapmon and Hall.

Frey, J. (2014). Bootstrap confidence bands for the CDF using ranked-set sampling. *Journal of the Korean Society* 43, 453-461.

McIntyre, G.A. (1952). A method for unbiased selective sampling using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research* , 385–390.

Modarres, R., Hui, T. P., and Zheng, G. (2006). Resampling method for ranked set samples. *Computational Statistic and Data Analysis* 51, 1039-1050.

Takahasi, K. and Wakimoto, K. (1968). On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 20, 1–31.