سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

حفظ رده توزیع طول عمر NBUE تحت فرایند پواسون همگن متوقف شده در زمان تصادفی وابسته

سکینه علایی[۱]، ابراهیم صالحی[۲]

[۱]دانشجوی کارشناسی ارشد - دانشگاه صنعتی بیرجند

[۲]گروه علوم پایه - دانشگاه صنعتی بیرجند

چکیده: یکی از مهم‌ترین مباحث در نظریه قابلیت اعتماد بررسی رده‌های توزیع طول عمر تحت فرایندهای تصادفی است. بنابراین بررسی ویژگی‌های این رده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد و همواره مورد توجه مهندسان قابلیت اعتماد بوده است. بیشتر مطالعات در این زمینه تحت فرض اینکه زمان تصادفی T تحت $N(T)$ و فرایند تصادفی $\{N(t),\ t \geq 0\}$ مستقل باشند، صورت گرفته است. اما در عمل پرداختن به ساختار وابسته مناسب تر است. در این مقاله به بررسی حفظ رده‌ی توزیع طول عمر NBUE تحت فرایندهای پواسون متوقف شده در زمان تصادفی وابسته می‌پردازیم. همچنین ویژگی ترتیب تصادفی برای متغیرهای شمارشی تصادفی $N(T)$ هنگامی که فرایند شمارشی از نوع فرایند پواسون همگن است، مورد بحث قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: رده‌های توزیع طول عمر، فرایند پواسون همگن، قابلیت اعتماد، طول عمر باقیمانده

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60K10، 60E15، 62N05.

۱ مقدمه

با توجه به ارتباط نزدیک قابلیت اعتماد و فرایندها، حفظ ویژگی رده‌های سالخوردگی تحت فرایندها از اهمیت خاصی برخوردار است. از اینرو یکی از مسایل مورد توجه در نظریه قابلیت اعتماد بررسی کردن شرایطی است که تحت آن شرایط ویژگی‌های قابلیت اعتماد زمان

[۱]ارائه دهنده سکینه علایی: alaei-stu@birjandut.ac.ir
[۲]ابراهیم صالحی: salehi@birjandut.ac.ir

تصادفی T توسط فرایند تصادفی $N(T)$ حفظ شود. یکی از مهم‌ترین فرایندها در نظریه قابلیت اعتماد فرایند تجدید است، که از اهمیت ویژه‌ای در پژوهش‌های قابلیت اعتماد برخوردار است. فرایند تجدید که حالت تعمیم یافته فرایند پواسون است نقش برجسته‌ای در نظریه تجدید ایفا می‌کند. زمانی که فرایند یک فرایند تجدید معمولی است، متغیر تصادفی $N(T)$ نشان دهنده حوادث گوناگون جهان واقعی می‌باشد. برای مثال ممکن است T طول عمر یک قطعه از تجهیزات باشد و $N(T)$ تعداد اجزای جایگزین شده در تجهیزات که در دوره T لازم‌اند، باشد. مفاهیم پایه‌ای نظریه تجدید توسط کاکس (۱۹۶۲) و روس (۲۰۰۸) گردآوری شده است. مثال دیگری از کاربردهای فرایند تجدید را می‌توان در تنزل زنجیرهای پلیمری یافت. این دو مثال در کاکس (۱۹۶۲) مورد بحث و مطالعه قرار گرفته شد. زمینه‌های دیگر از کاربرد فرایند تجدید، شبکه‌های ارتباطی بی‌سیم و نظریه صف‌بندی می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در این دو زمینه به ترتیب می‌توان به رودریگوز و تاکاگی (۲۰۱۰) و حاجی و ریول (۱۹۷۱) مراجعه کرد. مفاهیم، تعاریف و ویژگی‌های برخی از رده‌های قابلیت اعتماد توسط بارلو و پروشان (۱۹۸۱) گردآوری شده است. آنها درباره حفظ ویژگی‌های برخی از رده‌های طول عمر تحت عملگرهای قابلیت اعتماد مطالعاتی انجام دادند. تحقیقات گسترده‌ای برای حالتی که فرایند شمارشی یک فرایند تجدید متوقف شده در زمان تصادفی باشد توسط محققان انجام گرفت. إساری و همکاران (۱۹۷۳) نشان دادند که هرگاه متغیر T متعلق به رده "نرخ خطر صعودی[۱]" (IFR) باشد متعلق به رده "میانگین نرخ خطر صعودی گسسته[۲]" (D-IFRA) است. همچنین $N(T)$ متعلق به رده "نو بهتر از کهنه گسسته[۳]" (D-NBU) است اگر T متعلق به رده NBU باشد. گراندل (۱۹۹۷) و بلاک و ساویتس (۱۹۸۰) حفظ رده‌های توزیع طول عمر را تحت $N(T)$ زمانی که $\{N(t), \ t \geq ۰\}$ یک فرایند پواسون همگن است، بررسی کردند. آنها نشان دادند که رده‌های توزیع طول عمر IFR ‏(DFR)، IFRA ‏(DFRA)، DMRL ‏(IMRL)، NBU ‏(NWU)، NBUE ‏(NWUE) و ویژگی لگ-مقعر (لگ-محدب) تحت $N(T)$ حفظ می‌شوند. کاو و وانگ (۱۹۹۱) و کلفسو (۱۹۸۲) ثابت کردند رده‌های NBUC و HNBUE تحت فرایند پواسون همگن بسته‌اند. روس و همکاران (۲۰۰۵) شرایطی را در نظرگرفتند که رده توزیع طول عمر IFR تحت فرایند شمارشی تعمیم یافته حفظ می‌شود. اخیراً بادیا و سنگوسا (۲۰۰۸) نشان دادند که رده توزیع طول عمر "نرخ خطر نزولی[۴]" (DFR) و ویژگی "لگ-محدب[۵]" (log convex) تحت فرایند تجدید حفظ می‌شود. همچنین شروطی را بنا نهادند که با وجود این شروط حفظ رده‌های توزیع طول عمر IFR، "معکوس نرخ خطر نزولی[۶]" (DRHR)، IFRA و DFRA ثابت می‌شود. بادیا و صالحی (۲۰۱۲) رده‌های قابلیت اعتماد مرتبط با میانگین طول عمر باقیمانده را تحت فرایند تجدید متوقف شده در زمان تصادفی مورد بررسی قرار دادند و شرایطی را در نظر گرفتند که این رده‌ها تحت فرایند تجدید حفظ می‌شوند. بادیا و چا (۲۰۱۳) درباره‌ی حفظ رده‌های قابلیت اعتماد تحت فرایند تجدید $N(T)$ هنگامی که فرایند و متغیر T بهم وابسته باشند مطالعاتی انجام دادند.

در این مقاله رده‌ی توزیع طول عمر NBUE را تحت فرایند پواسون متوقف شده در زمان تصادفی وابسته مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید T متغیر طول عمر یک واحد یا یک سیستم با تابع توزیع F_T، تابع بقای $\bar{F}_T$ و چگالی احتمال f_T باشد. متغیر طول عمر باقیمانده T در زمان $۰ < t$ که به صورت $T_t = T - t | T > t$ تعریف می‌شود، دارای قابلیت اعتماد $\bar{F}_{T_t}(x) = \frac{\bar{F}_T(x+t)}{\bar{F}_T(t)}$ می‌باشد.

[۱] Increasing failure rate
[۲] Discrite-Increasing failure rate in Average
[۳] Discrite-New Better than Used
[۴] Decreasing Failure Rat
[۵] log convex
[۶] Decreasing Reversed Hazard Rate

میانگین طول عمر باقیمانده T بصورت زیر بدست می‌آید

$$m_T(t) = E(T_t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}_T(t)}.$$

در حالت گسسته اگر Y متغیر تصادفی نامنفی صحیح مقدار باشد، میانگین طول عمر باقیمانده گسسته را با m_Y نشان داده و برای $n = 0, 1, \ldots$ به صورت $m_Y(n) = E[Y - n|Y > n] = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} P(Y>k)}{P(Y>h)}$، تعریف می‌شود. یکی از مفاهیم مهم که در این مقاله استفاده شده، پیچش است. پیچش دو تابع a و b که $a, b : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ و با نماد $\otimes$ نشان داده، و برای $x \geq 0$، به صورت $(a \otimes b)(x) = \int_0^x a(x-y)b(y)dy$، تعریف می‌شود.

در نظریه احتمال اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، تابع چگالی احتمال مجموع آنها پیچش توابع چگالی احتمال آنها است. اگر a، b و g توابعی نامنفی در $[0, \infty)$ باشند داریم

$$\int_0^\infty g(x)(a \otimes b)(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x+y)a(x)b(y)dxdy. \qquad (۱.۲)$$

در ادامه چند تعریف مورد نیاز در مقاله را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی نامنفی باشند گوییم T_1 کوچکتر از T_2 در ترتیب طول عمر باقیمانده است و با $T_1 \leq_{MRL} T_2$ نشان می‌دهیم، اگر $m_{T_1}(x) \leq m_{T_2}(x)$.*

در ادامه برخی از رده‌های توزیع طول عمر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲. *فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی نامنفی باشند در این صورت گوییم T متعلق به رده توزیع طول عمر (NWUE) NBUE است اگر برای $t \geq 0$، $m_T(t) \leq (\geq) m_T(0)$؛*

تعریف ۳.۲. *فرض کنید Y متغیر تصادفی نامنفی صحیح مقدار (گسسته) باشد گوییم Y دارای رده توزیع طول (DW-NWUE) DS-NBUE است اگر برای همه $n = 0, 1, 2, \ldots$، رابطه زیر برقرار باشد*

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} P(Y > i) \leq (\geq) P(Y > n) \sum_{j=0}^{\infty} P(Y > j),$$

تعریف ۴.۲. *تابع $K : A * B \longrightarrow \Re$ که A و B زیرمجموعه $\Re$ یا Z باشد گوییم K "به طور کامل در ترتیب دوم مثبت"[۴] است و با نماد TP_2 نشان داده، هرگاه برای هر $x_2 > x_1$ و $y_2 > y_1$ که $x_i \in A$، $y_i \in B$، $i = 1, 2$ داشته باشیم*

$$K(x_1, y_1)K(x_2, y_2) \geq K(x_1, y_2)K(x_2, y_1).$$

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $K(x, y)$ تابعی TP_2 باشد و $g(y)$ حداکثر یک بار تغییر علامت می‌دهد. همچنین فرض کنید $h(x) = \int K(x, y)g(y)d\mu(y)$، به طور مطلق همگرا تحت اندازه σ-میدان متناهی‌µ باشد. آنگاه، $h(x)$ حداکثر یک بار تغییر علامت می‌دهد و دنباله‌ی تغییر علامت‌ها در h مانند g است.*

---

[۴]Totally Positive function of Second order

۳ نتایج اصلی

فرض کنید $\{N(t),\ t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون باشد.فرایند پواسون با نرخ $\lambda \geq 0$ فرایند تجدیدی است که زمان های وقوع رخدادها دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ هستند. زمان پیشامد nام را برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ با S_n نشان می‌دهیم و $S_0 = 0$. فرض کنید متغیر تصادفی X_n برای $n = 1, 2, \ldots$ زمان بین nامین و $n+1$امین پیشامد که $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال f و توزیع احتمال F باشد و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. همچنین فرض کنید S_n، برای $n = 1, 2, \ldots$ متغیر تصادفی به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی احتمال f_n و توزیع احتمال F_n باشد. برای $n = 1, 2, \ldots$ داریم $f_n = \otimes^n f = \overbrace{f \otimes \ldots \otimes f}^{n}$ و f_0 "تابع دلتای دیراک"[8] در 0 است. حال فرض کنید T متغیر تصادفی نامنفی مستقل از فرایند پواسون است و $P(T = 0) = 0$.

تابع تجدید یک تابع مهم در فرایند تجدید است که آن را با M نشان داده و برای $t \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} P(N(t) \geq n).$$

رفتار این تابع در مطالعه فرایند تجدید نقش اساسی ایفا می‌کند و کاربردهای فراوانی در قابلیت اعتماد به ویژه در مدل‌های نگهداری دارد. تابع تجدید در فرایند پواسون به صورت $M(t) = \lambda t$ برای $t \geq 0$ بدست می‌آید بنابراین تابع M تابعی مقعر یا محدب است.تابع چگالی احتمال nامین زمان وقع رخداد در فرایند پواسون که با $f_n(x)$ نشان می‌دهیم دارای خاصیت TP_2 در n و x است. ($f_n(x)$ تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل n و پارامتر مقیاس λ است).

حال فرض می‌کنیم که طول عمر سیستم و قطعات تحت تاثیر محیط قرار دارند (مثلا تحت تاثیر دمای محیط).پس تمام متغیرهای تصادفی مربوط به سیستم وقطعات توصیف شده در فوق تحت عوامل محیطی توصیف می‌شوند.بنابراین اثر محیط را تصادفی در نظر میگیریم که این اثر به وسیله یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی مانند Z دارای تابع چگالی $\pi(z)$ در دامنه $(0, \infty)$است. T_z و $X_{z,i}$ برای $i = 1, 2, \ldots$ به ترتیب طول عمر سیستم و اجزاء به کارگرفته شده در محیط مشخص شده با متغیر $Z = z$ هستند و$\{N_z(t),\ t \geq 0\}$ فرایند شمارشی ، $r_{T_z}(t)$ نرخ خطر T_z و F_{X_z} تابع تجمعی $X_{z,i}$ است. فرض کنید که

$$r_{T_z} = \rho(z).r_T(t) \quad t \geq 0$$

$$F_{X_z} = F_X(\gamma(z), x) \quad x \geq 0$$

که $\rho(z)$ ($\gamma(z)$) تابع اکیدا صعودی با $\rho(0) = 0$ ($\gamma(0) = 0$)، $\rho(1) = 1$ ($\gamma(1) = 1$) و $\rho(\infty) = \infty$ ($\gamma(\infty) = \infty$) است. اگر $Z_1 \leq Z_2$ باشد انگاه $T_{Z_1} \geq_{HR} T_{Z_2}$ است و وابستگی می‌تواند از این راه مدل شود (وابستگی مثبت). وابستگی مثبت با در نظر گرفتن نزولی اکید بودن توابع $\rho(z)$ و $\gamma(z)$ نیز نتیجه میشود.بنابراین ممکن است مدل وابسته منفی باشد در صورتی این اتفاق می‌افتد که یکی از این دو توابع صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد. $\hat{X}^{*}_{T,N}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{X}^{*}_{T,N} \equiv N_Z(T_Z)$$

واضح است که با در نظرگرفتن $Z = z$ آنگاه $X_{z,i} =_d (\frac{1}{\gamma(z)} X_i)$ و بنابراین داریم:

$$S_{z,n} \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\gamma(z)} S_n$$

---

[8]Dirac delta function

در این قسمت متغیر تصادفی شمارشی $\hat{X}^*_{T,N} \equiv N_Z(T_Z)$ که $Z=z$، T_z و $\{N_z(t):\ t\geq 0\}$ بطور تصادفی مستقل‌اند، تحت فرضیات زیر در نظر می‌گیریم:

H_1 : $\{N_z(t):\ t\geq 0\}$ یک فرایند پواسون همگن با نرخ $z\lambda$ که $\lambda>0$ است،

H_2 : T_z از یک مدل میانگین طول عمر باقیمانده متناسب بر اساس متغیر تصادفی پایه‌ای T پیروی کند، یعنی:

$$m_{T_z}(x)=\frac{m_T(x)}{z}.$$

با استفاده از فرض H_1، می‌توان مشخص کرد که S_n یک متغیر تصادفی ارلانگ با پارامتر شکل n و پارامتر مقیاس λ برای $i=1,2,\dots$ است. در نتیجه داریم:

$$f_n(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}.$$

تابع قابلیت اعتماد T_z متناسب با مدل میانگین طول عمر باقیمانده (H_2) بصورت زیر است

$$\bar{F}_{T_z}(x)=\frac{m_T(0)}{m_T(x)}e^{-z\int_0^x \frac{1}{m_T(u)}du},\quad x\geq 0.$$

و

$$\int_x^\infty \bar{F}_{T_z}(u)du=\frac{m_T(x)}{z}\bar{F}_{T_z}(x), \tag{۱.۳}$$

با تغییر در روابط جبری داریم:

$$P(\hat{X}^*_{T,N}>n)=\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{F}_{T_z}(\frac{x}{y})f_{n+1}(x)\pi(z)dxdz=E\Big[\bar{F}_{T_Z}\Big(\frac{S_{n+1}}{Z}\Big)\Big]. \tag{۲.۳}$$

حال برای اثبات برخی نتایج و ساده سازی رابطه (۲.۳) یک لم و یک گزاره از پادیا و صالحی (۲۰۱۲) ارائه می‌دهیم که لم را بدون اثبات ارائه داده و گزاره برای حالتی که زمان و فرایند از یکدیگر مستقل باشند بیان شده است.

لم ۱.۳. فرض کنید $\{N(t):\ t\geq 0\}$ یک فرایند تجدید و T متغیر تصادفی نامنفی مستقل از فرایند باشد. همچنین فرض کنید تابع تجدید M دارای مشتق دوم و محدب باشد، آنگاه برای $n=0,1,\dots$ داریم:

$$\sum_{k=n}^\infty P(N(T)>k)=M'(0)\int_0^\infty\Big(\int_x^\infty \bar{F}_T(u)du\Big)f_n(x)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty\Big(\int_{x+y}^\infty \bar{F}_T(u)du\Big)M''(y)f_n(x)dxdy.$$

گزاره ۲.۳. فرض کنید $N(t)$ یک فرایند پواسون همگن با نرخ $\lambda>0$ باشد. اگر T متغیر تصادفی مستقل از فرایند باشد، آنگاه برای $n,m=0,1,\dots$ و $r=1,2,\dots$ داریم:

$$\sum_{k=n}^\infty P(N(T)>k)=\lambda\int_0^\infty\Big(\int_x^\infty \bar{F}_T(u)du\Big)f_n(x)dx,$$

که در آن f_n تابع چگالی احتمال از یک متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل n و پارامتر مقیاس λ است.

اثبات. با توجه به اینکه فرایند پواسون همگن فرایندی تجدید با تابع تجدید $M(t)=\lambda t$ برای $t\geq 0$ است. با بکاربردن لم ۱.۳، برای فرایند پواسون همگن با نرخ λ، می‌توان اثبات را نتیجه گرفت. □

از گزاره ۲.۳ و با استفاده از رابطه (۱.۳) برای $n = 0, 1, \ldots$ می‌توان به نتایج زیر رسید

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} P(\hat{X}^{*}_{T,N} > k) &= \int_{0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(N_z(T_z) > k)\pi(z)dz \\
&= \int_{0}^{\infty} \lambda \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{\frac{x}{z}}^{\infty} \bar{F}_{T_z}(u)du \Big) f_n(x)dx\pi(z)dz \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} m_T(\frac{x}{z})\bar{F}_{T_z}(\frac{x}{z}) f_n(x)\pi(z)dxdz \\
&= \lambda E\Big[m_T(\frac{S_n}{Z})\bar{F}_{T_z}(\frac{S_n}{Z})\Big]. \qquad (۲.۳)
\end{aligned}$$

بنابراین میانگین طول عمر باقیمانده گسسته از $\hat{X}^{*}_{T,N}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$m_{\hat{X}^{*}_{T,N}}(n) = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} P(\hat{X}^{*}_{T,N} > k)}{P(\hat{X}^{*}_{T,N} > k)} = 1 + \lambda \frac{E\Big[m_t(\frac{S_{n+1}}{Z})\bar{F}_{T_z}(\frac{S_{n+1}}{Z})\Big]}{E\Big[\bar{F}_{T_z}\big(\frac{S_{n+1}}{Z}\big)\Big]}.$$

در ادامه دو قضیه از بادیا و چا (۲۰۱۳) ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $\hat{X}^{*}_{T,N}$ متغیر تصادفی شمارشی در فرض H_1 و H_2 باشد. اگر T، NWUE (NBUE) باشد، آنگاه $\hat{X}^{*}_{T,N}$ متعلق به رده DS-NBUE (DW-NWUE) است.*

اثبات. در اینجا فقط حالت NBUE را اثبات می‌کنیم زیرا اثبات حالت دیگر مشابه بوده و از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم.

اگر T، NBUE باشد آنگاه از رابطه (۲.۳) برای $n = 0, 1, \ldots$ داریم:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} P(\hat{X}^{*}_{T,N} > k) \le \lambda m_T(0) E\Big[\bar{F}_{T_z}\Big(\frac{S_{n+1}}{Z}\Big)\Big].$$

بنابراین نتیجه از نامساوی قبلی طبق رابطه (۲.۳) با رابطه (۲.۳) برای $n = 0$ و این حقیقت که $S_0 = 0$ و $\bar{F}_{T_z}(0) = 1$ برای همه zها، برقرار است.

□

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $\hat{X}^{*}_{T,N}$ متغیر تصادفی شمارشی در فرض H_1 و H_2 باشد. اگر $T_2 \le_{MRL} T_1$ و تابع چگالی ضعیف π، $\pi(x/y)$ در x و y دارای ویژگی TP_2 باشد، آنگاه $\hat{X}^{*}_{T_2,N} \le_{D-MRL} \hat{X}^{*}_{T_1,N}$.*

اثبات. قبل از اثبات نشان می‌دهیم که تحت مفروضات تابع زیر دارای ویژگی TP_2 برای $i = 1, 2$ در $x > 0$ است

$$\int_{0}^{\infty} \Big(\int_{v}^{\infty} \bar{F}_{T_i}(u)du \Big) \frac{x}{v^2}\pi(\frac{x}{v})dv. \qquad (۲.۳)$$

حال با استفاده از قضیه ۵.۲، ترتیب $T_2 \le_{MRL} T_1$ و TP_2 بودن $\int_{v}^{\infty} \bar{F}_{T_i}(u)du$ برای $i = 1, 2$ و مشابه اینکه $\pi(x/v)$ در x و v، TP_2 است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{x}{v^2}\pi(\frac{x}{v})$، در x و v، دارای ویژگی TP_2 است. به عبارت دیگر از معادله ۳.۳ و تغیر متغیر برای $i = 1, 2$ و هر عدد صحیح نامنفی n، داریم:

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(\hat{X}^{*}_{T_i,N} > k) = \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{0}^{\infty} \Big(\int_{v}^{\infty} \bar{F}_{T_i}(u)du \Big) \frac{x}{v^2}\pi(\frac{x}{v})dv \Big) f_n(x)dx$$

این نتیجه از قضیه ۵.۲ بدست آمده زیرا تابع چگالی احتمال ارلانگ از nامین فاصله ورود یعنی $f_n(x)$ در n و x دارای ویژگی TP_2 است. بنابراین تابع یادشده در رابطه (۴-۳)، در x و n، دارای ویژگی TP_2 است. □

توجه ۵.۳. اگر تابع چگالی تضعیف π، داری تابع چگالی گاما یا وایبل باشد آنگاه، فرضیات π در قضیه ۴.۳ کامل است.

بحث و نتیجه‌گیری

بررسی حفظ رده‌های توزیع طول عمر تحت فرایندهای تصادفی متوقف شده در زمان تصادفی وابسته یکی از مهم‌ترین مباحث در نظریه قابلیت اعتماد است. زیرا بررسی حفظ این رده‌ها در نظریه تعمیر و نگهداری سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله به بررسی رده توزیع طول عمر NBUE (NWUE) تحت فرایند پواسون متوقف شده در زمان تصادفی وابسته پرداخته و نشان دادیم این رده تحت این نوع فرایند حفظ می‌شود.

مراجع

Badía, F. G. (2011). Hazard rate properties of a general counting process stopped at an independent random time, *Journal of applied probability*, **48**, 56-67.

Badía, F. G. and Cha, J. H. (2013). Preservation properties of a renewal process stopped at a random dependent time, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **27**, 163-175.

Badía, F. G. and Salehi, T. E. (2012). Preservation of reliability classes associated with the mean residual life by a renewal process stopped at a random time, *Applied Stochastic Models in Business and industry*, **22**, 1-17.

Badía, F. G. and Sangüesa, C. (2008). Preservation of reliability classes under mixtures of renewal processes, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **22**, 1-17.

Barlow, R. E. Proschan, T. H. (1981). *Statistical theory of reliability and life testing* , To Begin With, Silver Springer, MD.

Block, H. W. and Savits, T. H. (1980). Laplace transform for classes of life distributions, *The Annals of Probability*, **8**, 465-474.

Cao, J. and Wang, Y. (1991).The NBUC and NWUC classes of life distributions, *Journal of Applied Probability* , **28**, 473–479.

Cox, D. R. (1962). *Renewal Theory*, 9th edn. Academic Press, Amsterdam.

Esary, J. D., Marshall, W. and Proschan, F. (1973). Shock models and wear processes, *The Annals of Probability*, **4**, 627–649.

Haji, R. and Newel, G. F.(1971) A relation between stationary queue and waiting time distributions, *Journal of Applied Probability*, **8**, 617–620.

Grandell, J. (1997). *Mixed poisson processes*, London: Chapman and Hall.

Klefsj¨o, B. (1982). The HNBUE and HNWUE classes of life distributions. *Navals Research Logistics Quaterly* , **29**, 331-344.

Rodriguez-Dagnino, R. M. and Takagi, H. (2010). Application of renewal theory to call handover counting and dynamic location management in cellular mobile networks, *European Journal of Operational Research*, **204**, 1-13.

Ross, S. M. (2008). *Introduction to Probability Models*, Methuen, London.

Ross, S. M., Shanthikumar, J. G. and Zhu, Z. (2005). On increasing-failure-rate random variables, *Journal of Applied Probability*, **42**, 797-809.

Shanthikumar, J. G. and Yao, D. D. (1991). Bivariate characterization of some stochastic order relations, *Advances in Applied Probability* ,**23**, 642–659.