سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

رابطه برخی از مفاهیم شاخص های نابرابری اقتصاد و قابلیت اعتماد

زهرا بهدانی [۱]، غلامرضا محتشمی برزادران، بهرام صادقپورگیلده
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده. یکی از زمینه‌های مشترک بین علم آمار و اقتصاد بحث تحلیل نابرابری درآمد و ثروت است و توزیع عادلانه درآمد یکی از وظایف مهم دولت‌ها به حساب می‌آید. از این رو بحث و قضاوت درباره چگونگی توزیع درآمد در کنار گسترش مدل‌های رشد اقتصادی، اهمیت دارد. بحث قابلیت اعتماد از جمله مباحث آمار است که براي هر نوع سليقه و ضرورتهاي علمي مطلبي ارزنده دارد و کاربردهای متنوعی نیز دارد. بررسی ارتباط بین شاخص‌های نابرابری و معیارهای سنجش قابلیت اعتماد این امکان را به محقق می‌دهد که معیارهای هر یک از دو مفهوم را برای بررسی مفهوم دیگر به کار بگیرد. در این مقاله ارتباط برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد به ویژه زمان کل آزمون را با معیارهای سنجش نابرابری اقتصادی با محوریت منحنی لورنتس مورد بررسی قرار می دهیم. ضمن معرفی کارهای انجام شده به دنبال مفاهیم و روابط جدید بین آنها می باشیم. در نهایت برای درک بهتر و آشنایی بیشتر با مفاهیم و روابط ارائه شده به دنبال یافتن نتایج عددی و بحث های کاربردی می باشیم.

واژه‌های کلیدی. منحنی لورنتس، ضریب جینی، زمان کل آزمون، شاخص بن فرونی و شاخص زنگا.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰). 62N05، 91B82.

۱ مقدمه

در هر جامعه‌ای و به خصوص در کشورهای در حال توسعه بحث فقر، ثروت و عدالت اجتماعی یکی از مهمترین بحث های محافل عمومی و خصوصی است. بررسی های آماری و اقتصادی گویای آن است که در هیچ کشوری توزیع درآمد کاملاً عادلانه نیست. (مفهوم عادلانه توزیع درآمد این است که درصدهای تجمعی جمعیت جامعه تقریباً برابر درصدهای تجمعی درآمد جامعه باشند). لیکن معیارهایی وجود دارند که میزان عادلانه بودن درآمد جامعه بشری را تفسیر می‌کنند. با توجه به اهمیت این موضوع بسیاری از محققان و سیاستمداران درصدد یافتن معیاری هستند که به خوبی نابرابری درآمد در طبقات مختلف جامعه را منعکس کند. یک ابزار مهم برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی، «منحني لورنتس» می باشد، که براي اولین بار در سال ۱۹۰۵ توسط ماکس اوتو لورنتس معرفي شد. منحنی ها و

[۱] نام ارائه دهنده مقاله: زهرا بهدانی zbehdan1@yahoo.com

اندازه های نابرابری متعددی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می شوند که از میان آنها می توان به منحنی زنگا، ضریب جینی و منحنی بن فرونی اشاره کرد. آرنولد (۱۹۹۱) ،کلیبر و کاتز (۲۰۰۳) از کسانی هستند که در این زمینه تحقیقات ارزشمندی داشته‌اند. بحث قابلیت اعتماد از جمله مباحث آمار است که در صنعت، تکنولوژی، پزشکی و سایر علوم دارای نقش اساسی و انکارناپذیری است. تعاریف متفاوتی از قابلیت اعتماد در متون آماری وجود دارد. درحقیقت می‌توان آن را احتمال عملکرد رضایت‌بخش یک سیستم در زمان معین تعریف کرد. از نظر آماری، قابلیت اطمینان، سازگاری مجموعه ای از ابعاد یا ابزارهای اندازه گیری است که اغلب به منظور توضیح دادن یک آزمایش استفاده می شود. قابلیت اعتماد مفهومی عمومی‌است، که به عنوان یک ویژگی مثبت برای یک فرد یا یک محصول شناخته شده است. چاندرا و سینگپوروالا (۱۹۸۱) ، پرزارکان و همکاران (۱۹۹۷) و فام و ترکان (۱۹۹۴) رابطه بین منحنی لورنتس، ترتیب لورنتس و تبدیل زمان کل آزمون را بررسی کردند. کلفسجو (۱۹۸۴) پاندیر و همکاران (۲۰۰۵) تفسیر برخی از نابرابری‌های اقتصادی را بر اساس مفاهیم قابلیت اعتماد ارائه دادند. جیورجی و کریسکنزی (۲۰۰۱) کاربردهایی از ضریب جینی و شاخص بن‌فرونی را در قابلیت اعتماد و آزمون‌های زندگی بیان کردند. در این مقاله ابتدا منحنی لورنتس را مورد توجه قرار داده و خواص و ویژگیهای آن را بیان می‌کنیم. شاخص‌های مختلفی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می‌شوند، که برخی از‌آنها را معرفی‌کرده و ارتباط بین این شاخص ها و منحنی لورنتس بیان می شود. در بخشی از مقاله تبدیل زمان کل آزمون و مفاهیم دیگری از قابلیت اعتماد را معرفی کرده و به بررسی ارتباط این مفاهیم با شاخص های نابرابری اقتصادی می پردازیم. در نهایت برای درک بهتر مباحث مطرح شده شاخص های نابرابری و قابلیت اعتماد را برای داده های درآمد خانوار شهری و روستایی سال ۸۹ محاسبه و با توجه به مطالب مطرح شده تفسیر می نماییم.

۲ مفاهیمی از نابرابری اقتصادی

برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی یا به عبارت دیگرتوزیع ناعادلانه درآمد، معمولاً «منحنی لورنتس» استفاده می شود. این منحنی در مطالعه توزیعهای درآمد در اقتصاد جزو مهمترین ابزارها است. برای دستیابی به منحنی لورنتس، روی محور افقی درصد تجمعی درآمدها را که بین گروه‌های مختلف درآمد توزیع می‌شود و سهم آنها را تشکیل می‌دهد، و روی محورعمودی درصدهای جمعیت که درصدهای درآمد فوق را دریافت می‌دارند قرار می‌دهیم. اگر توزیع درآمدها به‌طور عادلانه صورت گیرد، خط مستقیمی (در واقع قطر اصلی مربع حاصل) به‌دست می‌آید. در صورتی که توزیع درآمدها ناعادلانه و نابرابر باشد منحنی محدبی حاصل می شود. خط مستقیم مذکور و حاصل از حالت اول، به خط توزیع کاملاً عادلانه معروف است، و منحنی محدب حاصل، منحنی لورنتس نامیده می شود. منحنی لورنتس در حالت کلی به صورت (۱.۲) تعریف می‌شود:

$$L(u)=\frac{1}{E(X)}\int_0^u F^{-1}(t)dt. \qquad (۱.۲)$$

که در آن F تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نامنفی X و برای $u\in[0,1]$ ، $F^{-1}(u)=sup\{x:F(x)\le u\}$ تابع چندکی آن و $E(X)=\int_0^\infty f(y)dy$ می باشد با توجه به (۱.۲) مشخص است که تابع لورنتس تابعی صعودی، محدب، پیوسته با $L(0)=0$ و $L(1)=1$ می باشد. بر عکس هر تابع با این ویژگی‌ها یک تابع لورنتس از یک توزیع آماری معین است (کلیبر و کاتز، ۲۰۰۳). اگر $E(X^k)<\infty$ و توزیع های گشتاوری $F_{(k)}(x)$ را برای $k=0,1,2,\ldots$ و $x\ge 0$ به صورت $F_{(k)}(x)=\frac{1}{E(X^k)}\int_0^{F(x)} t^k f(t)dt$، تعریف کنیم، روش هم ارزی با رابطه ۱.۲ به صورت زیر ارائه می شود:

$$\{(u,L(u))\}=\{(u,v)|u=F(x),v=F_{(1)}(x)\}. \qquad (۲.۲)$$

این شکل توزیع گشتاوری منحنی لورنتس برای خانواده های پارامتری که عبارت تابع چندکی خاصی را در قالب یک تابع اولیه نمی پذیرند مانند توزیع های گاما، بتا و ... کاربرد خواهد داشت. (کلیبر و کاتز، ۲۰۰۳)

شاخص‌های مختلفی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می‌شوند، که از بین آنها ضریب جینی مهمترین اندازه‌ای است که برای سنجش میزان نابرابری درآمد در جامعه به کار برده می‌شود. ضریب جینی به صورت دو برابر ناحیه بین منحنی لورنتس و خط قطر تعریف می‌شود که همواره نامنفی و مقداری بین صفر و یک است. بهترین حالت آن وقتی‌است که ضریب جینی برابر صفر باشد و این وقتی اتفاق می‌افتد که $L(u) = u$ (یعنی در حالت برابری اقتصادی) باشد. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع لورنتس $L(u)$ باشد، ضریب جینی آن برابر است با:

$$G = ۲\int_{۰}^{۱}[u - L(u)]du = ۱ - ۲\int_{۰}^{۱} L(u)du. \qquad (۳.۲)$$

در مطالعه اندازه های نابرابری، منحنی لورنتس و ضریب جینی کاربرد بیشتری دارد ولی در سال ۱۹۳۰ بن فرونی اندازه جدیدی به نام ضریب بن فرونی را برای بررسی نابرابری اقتصادی معرفی کرد. ضریب بن فرونی $B = ۱ - \int_{۰}^{۱} B_F(u)du$ بر اساس منحنی بن فرونی $B_F = \frac{۱}{E(X)u}\int_{۰}^{u} F^{-۱}(t)dt$ تعریف می شود. این ضریب حساسیت بیشتری نسبت به سطوح پایین توزیع درآمد دارد که در قابلیت اعتماد و آزمون طول عمر نیز کاربرد دارد. در حالت کلی منحنی بن‌فرونی اکیدا صعودی است و می‌تواند محدب و یا مقعر باشد. مشخص است که $B_F = \frac{L(u)}{u}$. زنگا در سال ۱۹۸۴ میلادی شاخص جدیدی به عنوان جایگزین ضریب جینی معرفی کرد. این شاخص از مقایسه میانگین درآمد $۱۰۰u$٪ پایین جامعه و میانگین درآمد $(۱-u)۱۰۰$٪ بالای جامعه بدست می‌آید. منحنی زنگا برای متغیر تصادفی نامنفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z(u) = ۱ - \frac{F^{-۱}(u)}{F^{-۱}_{(۱)}(u)}. \qquad (۴.۲)$$

زنگا در سال ۲۰۰۷ منحنی زنگا را به صورت $Z(u) = ۱ - \frac{L(u)}{u}\frac{۱-u}{۱-L(u)}$ تعریف کرد که بیانگر ارتباط بین منحنی لورنتس و منحنی زنگا نیز می باشد. شاخص زنگا برابر است با $Z = \int_{۰}^{۱} Z(u)du$. برتری این معیار نسبت به سایر معیارهای دیگر این است که این شاخص ارتباط فقر و ثروت را به خوبی منعکس می کند. آرنولد (۲۰۱۵) برخی از ویژگی‌ها و ارتباط این شاخص ها را بررسی کرده است.

پس از اندازگیری میزان نابرابری اقتصادی در جامعه موضوع مقایسه آن‌ها مطرح می‌شود. مقایسه دو متغیر تصادفي از طریق ترتیب‌بندي‌هاي تصادفي انجام‌پذیر است. ترتیب‌هاي تصادفي که حاکي از روابط ترتیبي بین توزیع‌هاي احتمال هستند براي مقایسه متغیرهاي تصادفي مفیدند. ترتیب‌هاي تصادفي به طور گسترده در زمینه های مختلف آمار به‌ویژه فرآیند تصادفی، قابلیت اعتماد، نظریه صف، اقتصاد، بیمه و ... کاربرد دارند.

برای متغیرهای تصادفی نامنفی $X_۱, X_۲$ با میانگین متناهی و توابع توزیع تجمعي $F_۱, F_۲$ و توابع لورنتس $L_۱, L_۲$ ترتیب لورنتس را به $X_۱ \leq_L X_۲$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_۱ \leq_L X_۲ \Longleftrightarrow L_۲(u) \leq L_۱(u)(G_۱ \leq G_۲)\forall u \in [۰, ۱]$$

که $X_۲$ بزرگ‌تر از $X_۱$ در حالت لورنتس خوانده می‌شود و به این معنا است که تابع لورنتس $L_۱$ همواره بالاتر از تابع لورنتس $L_۲$ قرار دارد.

۳ مفاهیمی از قابلیت اعتماد

یکی از مفاهیم مهم در آنالیز داده های طول عمر زمان کل آزمون است که ابتدا توسط اپستین و سوبل (۱۹۵۳) مورد بررسی قرار گرفت. تبدیل زمان کل آزمون برابر است با:

$$T(u) = \int_{0}^{F^{-1}(u)} \overline{F}(t)dt. \qquad (۱.۳)$$

این منحنی در مربع واحد واقع می شود مشتق اول آن مثبت است و در نتیجه منحنی همواره صعودی است ولی مشتق دوم آن تغییر علامت می دهد و در نتیجه منحنی می تواند محدب و یا مقعر باشد. تبدیل زمان کل آزمون پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر x در بازه $0 \leq x \leq F^{-1}(1)$ تابع توزیع پیوسته باشد، در این صورت تابع صعودی اکید است بارلو و کامپو (۱۹۷۵).

تبدیل زمان کل آزمون قیاسی (تبدیل پایایی از تبدیل زمان کل آزمون) به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(u) = \frac{1}{\mu} \int_{0}^{F^{-1}(u)} \overline{F}(t)dt. \qquad (۲.۳)$$

بخش وسیعی از نظریه قابلیت اعتماد به مطالعه ویژگی‌ها و کاربردهای مفاهیم سالخوردگی اختصاص یافته است، در قابلیت اعتماد اشکال مختلفی از سالخوردگی مطرح می‌باشد. برخی از رایج‌ترین مشخصه‌های سالخوردگی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف: برای متغیر تصادفی X با توزیع F گوییم:

الف) دارای ویژگی نرخ خطر صعودی IFR، (نرخ خطر نزولی، DFR) است اگر $log\overline{F}$، روی $S_F = [a,b]$ مقعر (محدب) باشد.

ب) دارای عکس نرخ خطر صعودی $IRFR$، (عکس نرخ خطر نزولی $DRFR$) است، اگر $\log F$ روی S_F محدب (مقعر) باشد.

ج) دارای متوسط نرخ خطر صعودی $IFRA$ (متوسط نرخ خطر نزولی، $DFRA$) است، اگر $-\frac{log\overline{F}(x)}{x}$ روی S_F صعودی (نزولی) باشد.

چ) دارای ویژگی نو بهتر از استفاده شده NBU (نو بدتر از استفاده شده NWU) است، اگر $\overline{F}(x+y) \leq (\geq) \overline{F}(x)\overline{F}(y)$ توزیع F روی $S_F \in [0,\infty)$ و برای هر $x, y, x+y \in S_F$

ح) گوییم توزیع F، $NBUE$ است نسبت به G و یا F کوچکتر است از G در ترتیب $NBUE$ اگر $\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} \leq \frac{\mu_F}{\mu_G}$ توزیع F، $NBUE$ است اگر و فقط اگر G توزیع نمایی است.

خ) گوییم توزیع F، $HNBUE$ است نسبت به G و یا F کوچکتر است از G در ترتیب $HNBUE$ اگر $\int_0^\infty \overline{F}(x\mu_F)dx \leq \int_0^\infty \overline{G}(x\mu_G)dx$ توزیع F، $HNBUE$ است اگر و فقط اگر G توزیع نمایی است.

با توجه به تعاریف بالا می توان نشان داد که روابط زیر بین مفاهیم سالخوردگی برقرار است:

$$IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE \subset HNBUE \quad ; \quad DFR \subset DFRA \subset NWU \subset NWUE \subset HNWUE.$$

قضیه زیر که در بارلو و کامپو (۱۹۷۵) بیان شده است رابطه بین زمان کل آزمون و تابع میانگین طول عمر باقیمانده را نشان می دهد.

قضیه: اگر تابع توزیع $IFRA$ باشد آنگاه نسبت تابع زمان کل آزمون به زمان آزمون نزولی خواهد بود.

این قضیه یک طرفه است و اگر $\frac{T(u)}{u}$ نزولی باشد لازمی ندارد که توزیع $IFRA$ باشد. کلفسجو (۱۹۸۲) با مثال نقضی نشان داد که عکس قضیه لزوما برقرار نخواهد بود.

۴ ارتباط بین شاخص های اقتصادی و برخی مفاهیم قابلیت اعتماد

در این بخش به بیان روابط بین مفاهیم و توابعی می پردازیم که در بخشهای قبل معرفی شدند. چاندرا و سینگپوروالا (۱۹۸۱) و فام و ترکان (۱۹۹۴) اولین محققینی بودند که در این زمینه فعالیت داشته اند. اگر X متغیر تصادفی پیوسته با میانگین مثبت متناهی باشد آنگاه:

$$W(u) = L(u) + \frac{1}{\mu}(1-u)F^{-1}(u). \tag{۱.۴}$$

و در نتیجه منحنی لورنتس بر اساس تبدیل زمان کل آزمون قیاسی با $L(u) = (1-u)\int_0^u \frac{W(t)}{(1-t)^2}dt$ برابر است. همانگونه که بیان شد ضریب جینی یکی از مهمترین شاخص های اقتصادی است، کلفسجو (۱۹۸۴) نشان داد که با مساحت بالای شکل زمان کل آزمون برابر است. $G = \int_0^1 (1 - W(t))dt$ لذا از این شاخص نیز می توان در قابلیت اعتماد استفاده کرد. به عنوان مثال اگر ضریب جینی برابر صفر باشد، نشان دهنده این است که توزیع در نقطه میانگین تباهیده است و دارای بیشترین IFR نیز می باشد و بالعکس اگر ضریب جینی یک باشد آنگاه توزیع دارای بیشترین DRF است.

زمانی که نمودار زمان کل آزمون به طور کامل بالای نیمساز باشد و $\frac{1}{2} < G \leq 1$ ، توزیع متعلق به رده توزیع های IFR با میانگین μ است به طور مشابه توزیع هایی که $0 \leq G < \frac{1}{2}$ است و نمودار زمان کل آزمون پایین نیمساز قرار دارد متعلق به رده توزیع های DFR با میانگین مشترک μ هستند. ضمنا از آنجاییکه تنها توزیع با ضریب جینی یک دوم و شکل زمان کل آزمون منطبق بر خط نیمساز، توزیع نمایی است. لذا می توان از این در شاخص برای آزمون نمایی بودن توزیع استفاده کرد(فام و ترکان، ۱۹۹۴).

با توجه به تعریف منحنی های لورنتس و بن فرونی می توان گفت: منحنی بن فرونی همواره بالای منحنی لورنتس و زیر منحنی تبدیل زمان کل آزمون قرار دارد. رابطه بین تبدیل زمان کل آزمون قیاسی و منحنی بن فرونی به صورت زیر است:

$$W(u) = uB_F(u) + \frac{1-u}{\mu}F^{-1}(u). \tag{۲.۴}$$

همچنین رابطه بین منحنی زنگا و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی را می توان به شکل (۳.۴) نوشت.

$$W(u) = u\frac{Z_X(u) - 1}{uZ_X(u) - 1} + \frac{1-u}{\mu}F^{-1}(u). \tag{۳.۴}$$

در جدول ۱ منحنی لورنتس، ضریب جینی، شاخص بن فرونی و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی برای چند توزیع آورده شده است. همانطور که قبلا گفته شد، توزیع نمایی تنها توزیع با ضریب جینی $\frac{1}{2}$ و تباهیده در میانگین توزیع دارای ضریب جینی صفر می باشد. با توجه به مطالب ارائه شده در قسمتهای قبلی نتایج زیر به صورت خلاصه و بدون اثبات بیان می شود

۱− تابع توزیع طول عمر با میانگین متناهی $NBUE$ است اگر و تنها اگر، $\frac{T(u)}{T(1)} \geq u$ (برگمن، ۱۹۷۹). یا به طور معادل می توان گفت: تابع توزیع $NBUE$ است اگر و فقط اگر $W(u)$ کاملا بالای قطر اصلی مربع واحد قرار گیرد.

۲− فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با میانگین متناهی باشند. اگر $X \leq_{NBUE} Y$ آنگاه $X \leq_L Y$ (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷) با توجه به این قضیه و ویژگی های منحنی لورنتس نتیجه می شود که در جامعه ای که دارای ترتیب زمان کل آزمون بزرگتر است نابرابری اقتصادی کمتر خواهد بود. البته با شرط تساوی میانگین در جامعه. از طرفی با توجه به روابط بین شاخص های بن فرونی و زنگا و ضریب جینی می توان نتیجه گرفت: $X \leq_{NBUE} Y \Rightarrow X \leq_L Y \Longleftrightarrow X \leq_Z Y \Longleftrightarrow X \leq_B jhY$

۳− تابع توزیع $HNBUE$ است اگر و فقط اگر منحنی لورنتس آن بالای منحنی لورنتس توزیع نمایی قرار گیرد.

۴− توزیع IFR است اگر و تنها اگر $W(u)$ مقعر باشد.

۵− اگر توزیع دارای ویژگی IFR باشد منحنی لورنتس آن بین خط قطر و منحنی لورنتس توزیع نمایی واقع می شود.

جدول ۱: ویژگی هایی از منحنی لورنتس و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی.

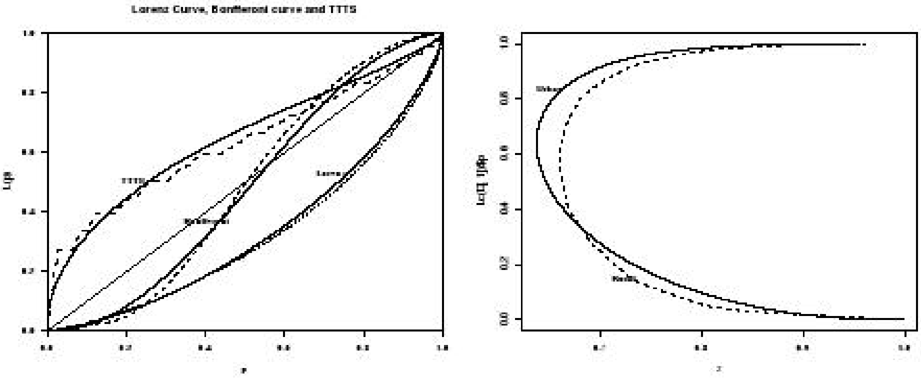
تابع چگالی احتمال	منحنی لورنتس $L(u)$	تبدیل زمان کل آزمون قیاسی $W(u)$	ضریب جینی G	شاخص بن فرونی B
یکنواخت استاندارد: $f(x)=1; x\in(a,a+\theta)$	$\frac{au+(\theta u^2/2)}{a+\theta/2}$	$\frac{a+\theta u-\frac{\theta}{2}u^2}{a+\theta/2}$	$\theta/3(2a+\theta)$	$\frac{\theta}{(4a+2\theta)}$
تباهیده: $f(x)=1 \text{ if } x=\mu, 0\; x\neq\mu$	u	$W(u)=1, u\in(0,1]$. $W(0)=0$	0	0
توانی: $f(x)=\alpha x^{\alpha-1}; \alpha>1; x\in[0,1]$	$u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$	$u^{1/\alpha}[1+\frac{1-u}{\alpha}]$	$\frac{1}{2\alpha+1}$	$\frac{1}{(\alpha+1)}$
نمایی: $f(x)=\lambda x^{-\lambda}; \lambda>0; x>0$	$u+(1-u)\ln(1-u)$	u	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{6}-1$
گاما: $f(x)=\frac{x^{\alpha-1}e^{(\frac{-x}{\beta})}}{(\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha))}$ $\alpha,\beta>0; x\geq 0$	$(u,L(u))=(F(x;\alpha),F(x,\alpha+1))$	$(u,W(u))=(F(x;\alpha),F(x,\alpha+1)+x[1-F(x,\alpha)]/\alpha)$	$\Gamma(\alpha+1/2)/\sqrt{(\pi)}\Gamma(\alpha+1)$	$1-\int_0^{\infty}\frac{F(x,\alpha+1)}{F(x,\alpha)}dF(x)$
پارتو: $f(x)=\alpha x_0^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}; \alpha>1; x\geq x_0>0$	$1-(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$	$1-\frac{(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha-1}$	$1-\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$

مقایسه نتایج ۴ و ۵ نشان می دهد که در صورتی که $W(u)$ مقعر باشد توزیع نسبت به توزیع نمایی ناهمواری کمتری دارد ولی عکس این رابطه لزومی ندارد برقرار باشد.

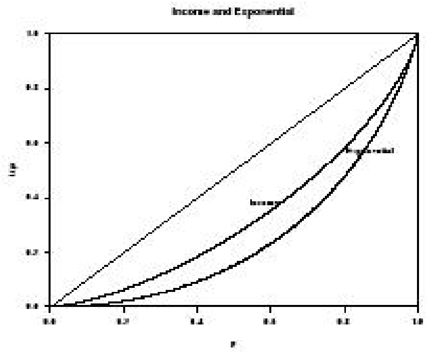
۵ نتایج عددی

در این بخش از مقاله به کمک داده های درآمد سال ۸۹ به بررسی مطالب ارائه شده در بخشهای قبل می پردازیم. این داده ها مربوط به طرح «آمارگیری از هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی» می باشد، که توسط مرکز آمار ایران و با همکاری معاونتهای آمار سازمان های مدیریت و برنامه ریزی استان های کشور اجرا و نتایج آن در قالب کتابچه هایی در سطح کل کشور منتشر می گردد. بعلاوه، داده ها و نتایج خام این طرح نیز برای محققان و برنامه ریزان قابل دسترسی می باشد. شکل ۱ شامل دو نمودار است. در نمودار سمت راست منحنی زنگا برای داده های درآمد شهری(ممتد) و روستایی(خط چین) و نمودار سمت چپ نمودارهای لورنتس، بن فرونی و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی را برای داده های درآمد خانوار شهری(ممتد) و روستایی(خط چین) را نشان می دهد. مقدار ضریب جینی برای داده هاي هزینه خانوار شهري و روستايي ایران در سال ۸۹ تا حدودي مشابه و نسبتاً متعادل مي باشد. مقدار این ضریب برای خانوار شهری و روستایی کشور به ترتیب ۰/۳۵ و ۰/۳۷ می باشد. ضریب جینی خانوار شهری بیانگر همگنی بیشتر بین خانوار شهری کشور نسبت به خانوار روستایی است. با توجه به شکل ۱ می توان گفت میانگین درآمد خانوار ثروتمند نسبت به میانگین درآمد خانوار فقیر در جامعه روستایی کمتر است نسبت به جامعه شهری به عبارتی اختلاف طبقاتی در خانوار روستایی نسبت به خانوار شهری کمتر می باشد، گرچه مقدار ضریب جینی و همچنین منحنی لورنتس داده ها بیانگر ناهماهنگی بیشتر درآمد خانوار روستایی می باشد، که می توان آن را به

ناهماهنگی بیشتر در سطوح مرکزی دانست از طرفی با توجه به این نمودار مشخص است که توزیع داده های درآمد به رده $NBUE$ تعلق ندارد زیرا نمودار تبدیل زمان کل آزمون قیاسی در همه نقاط بالای قطر اصلی قرار ندارد. با توجه شکل ۲ توزیع داده های درآمد خانوار شهری و روستایی سال۸۹، $HNBUE$ است زیرا نمودار لورنتس این داده ها بالای منحنی لورنتس توزیع نمایی واقع شده است.



شکل ۱: منحنی زنگا سمت چپ و منحنی های لورنتس بن فرونی و تبدیل زمان کل آزمون قیاسی داده های درآمد شهری (خط ممتد) و روستایی (خط چین) در سال ۸۹.



شکل ۲: منحنی های لورنتس توزیع نمایی استاندارد (خط چین) و داده های درآمد شهری

مراجع

Arnold, B. C. (2015). On Zenga and Bonferroni curves. METRON, 73(1), 25-30.

Arnold, B.C. (1991). *Preservation and attenuation of inequality as measured by Lorenz order Stochastic Orders and Decision under Risk*, IMS Lectures Notes – Monograph. Series, 25-37.

Barlow, R. E., & Campo, R. A. (1975). *Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis* (No. ORC-75-8). California Univ Berkeley Operations Research Center.

Bergman, B. (1979). *On age replacement and the total time on test concept.* Scandinavian Journal of Statistics, 161-168.

Bonferroni, C. E. (1930). *Elementi di statistica general.* Libreria Seber, Fireze.

Chandra, M., Singpurwalla, N.D. (1981). *Relationships between Some Notions Which Are Common to Reliability Theory and Economics.* Mathematics of Operations research. 5, 1, 113-121.

Epstein, B. and Sobel, M. (1953). *Life testing.* Amer. Statst. Assoc. 48, 486-502.

Giorgi, G.M., Crescenzi, M. (2001). *A look at the Bonferroni inequality measure in a reliability framework.* Statistica anno LXI, n. 4. 571-583.

Kleiber, C., and Kotz, S. (2003). Statistical size distributions in economics and actuarial sciences, John wiley.

Klefsjo, B. (1982). *On aging properties and total time on test transforms.* Scandinavian Journal of Statistics, 37-41.

Klefsjo, B. (1984). *Reliability Interpretations of Some Concepts from Economics,* Naval Research Logistics Quarterly, 3 1, 2, 301-308.

Lorenz, M. O. (1905). *Methods of measuring the concentration of wealth.* Publications of the American statistical association, 9(70), 209-219.

Perez Ocon, R., Gamiz Perez, M. L., & Ruiz Castro, J. E. (1997). *A study of different ageing classes via total time on test transform and Lorenz curves.* Applied stochastic models and data analysis, 13(3 4), 241-248.

Pham, T.G., Turkkan, N. (1994). *The Lorenz and the scaled total-time-on-test transform curves: a unified approach,* "IEEE Transactions on reliability", 43, 1, 76-84.

Pundir, S., Arora, S., & Jain, K. (2005). *Bonferroni curve and the related statistical inference.* Statistics probability letters, 75(2), 140-150.

Shaked, M., & Shanthikumar, J. G. (2007). Stochastic orders. Springer Science Business Media.

Zenga, M. (1984). *Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito.* Giornale degli economisti e Annali di Economia, 301-326.

Zenga , M. (2007) ,*Inequality curve and inequality index based on the rations between Lawer and Upper arithmetic means* , Statistica & Applicaziani , 5 .