سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

برآورد پارامتر های مدل اتورگرسیو مرتبه اول فضایی با ضرایب تصادفی، RCINAR(1,1)

عاطفه تابنده[۱]، علیرضا قدسی [۲]

[۱,۲] دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده: در این مقاله برآوردگرهای کمترین مربعات شرطی مدل اتورگرسیو فضایی مرتبه اول با ضرایب تصادفی، RCINAR(1,1)، معرفی می شوند و به روش شبیه سازی خواص این برآوردگر با برآوردگر یول-واکر مقایسه می شود.

واژه‌های کلیدی: مدل اتورگرسیو فضایی با مقادیر صحیح نامنفی، عملگر نازک دوجمله ای، برآورد کمترین مربعات شرطی

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62M30.

۱ مقدمه

سری های زمانی هم چون تعداد تصادفات، ارقام بیکاری، تعداد اتاق های خالی یک هتل و غیره که در دوره های زمانی مشخص ثبت می شوند، نمونه هایی از سری های زمانی با مقادیرصحیح نامنفی می باشند که با استفاده از الگوهای INAR مدل می شوند (ال اوش و ال زید (۱۹۸۷)، ال زید و ال اوش (۱۹۹۰)، دو و لی (۱۹۹۱)، سیلوا و الیویرا (۲۰۰۴، ۲۰۰۵) و سیلوا و سیلوا (۲۰۰۶)). و .... ژنگ و همکاران (۲۰۰۶a،b) مدل RCINAR را که در آن پارامتر مدل به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شد، معرفی نمودند.

داده های فضایی با مقادیر صحیح نامنفی نیز وجود دارند. تعداد تصادفات در جاده های کشور، تعداد مبتلایان به یك بیماری خاص در نقاط مختلف کشور و تعداد جرایم در نقط مختلف یك شهر مثال هایی از فرایندهای فضایی با مقادیر صحیح نامنفی می باشند. مدل اتورگرسیو مرتبه اول فضایی با مقادیر صحیح نامنفی (SINAR(1,1)) توسط قدسی و همکاران (۲۰۱۲) برای مدل کردن این نوع داده های فضایی معرفی شدند. و همچنین مدل اتورگرسیو مرتبه اول فضایی با مقادیر صحیح نامنفی و ضرایب تصادفی (RCINAR(1,1)) به صورت زیر معرفی شد

$$X_{ij} = \phi_1^{(ij)} \circ X_{i-1,j} + \phi_2^{(ij)} \circ X_{i,j-1} + \phi_3^{(ij)} \circ X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij} \qquad (1.1)$$

[۲] عاطفه تابنده : atefeh.tabandeh@yahoo.com

که عملگر $\circ$ عملگر نازک دوجمله ای نامیده شده و به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi \circ X = \sum_{k=1}^{X} Y_i$$

که در آن $\{Y_i\}$ سری شمارشی $\phi \circ X$ نامیده شده و دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر ϕ و مستقل از X است و $\{\phi_r^{(ij)}\}$ برای هر $r = 1, 2, 3$، دنباله ای از متغیر های تصادفی مستقل و هم توزیع روی $[0, 1)$ می باشند. $\{\varepsilon_{ij}\}$ دنباله ای از متغیر های تصافی i.i.d با مقادیر صحیح نامنفی، مستقل از $\{\phi_r^{(ij)}, r = 1, 2, 3\}$ و مستقل از $\{X_{i-k,j-l}\}$ برای هر $k \geq 1$ یا $l \geq 1$ می باشد.

فرض می شود

$$\mu_{\phi_r} = E(\phi_r^{(ij)}), \sigma^2_{\phi_r} = Var(\phi_r^{(ij)}), \mu_\varepsilon = E(\varepsilon_{ij}), \sigma^2_\varepsilon = Var(\varepsilon_{ij}),$$

همه متناهی باشند و حداکثر یکی از μ_{ϕ_r}ها می تواند صفر باشد. هم چنین فرض می شود

$$\mu_{\phi_1} + \mu_{\phi_2} + \mu_{\phi_3} < 1.$$

در این مقاله ابتدا در بخش ۲ برآوردگرهای کمترین مربعات شرطی پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه اول فضایی با ضرایب تصادفی معرفی می شوند و سپس در بخش بعد با استفاده از شبیه سازی خواص برآوردهای یول-واکر و کمترین مربعات شرطی با یکدیگر مقایسه خواهند شد.

۲ برآورد کمترین مربعات شرطی

قضیه ۱.۲. *در فرآیند RCINAR(1,1) تعریف شده در رابطه (۱.۱) برآورد کمترین مربعات شرطی* $\theta = (\mu_{\phi_1}, \mu_{\phi_2}, \mu_{\phi_3}, \lambda)$ *با می نیمم کردن تابع*

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}(X_{ij} - E(X_{ij} \mid \boldsymbol{X}^-_{\boldsymbol{ij}}))^2$$

به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

که

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sum X^2_{i-1,j} & & & \\ \sum X_{i,j-1}X_{i-1,j} & \sum X^2_{i,j-1} & & \\ \sum X_{i-1,j-1}X_{i-1,j} & \sum X_{i-1,j-1}X_{i,j-1} & \sum X^2_{i-1,j-1} & \\ \sum X_{i-1,j} & \sum X_{i,j-1} & \sum X_{i-1,j-1} & (n_1-1)(n_2-1) \end{bmatrix}$$

که $\boldsymbol{A}$ *ماتریسی متقارن است و مجموع ها روی* $i = 2, 3, ..., n_1$ *و* $j = 2, 3, ..., n_2$ *می باشد و*

$$\boldsymbol{b} = (\sum X_{i-1,j}X_{ij}, \sum X_{i,j-1}X_{ij}, \sum X_{i-1,j-1}X_{ij}, \sum X_{i,j})'.$$

اثبات. فرض کنید $\boldsymbol{X}_{ij}^{-} = (X_{i-1,j}, X_{i,j-1}, X_{i-1,j-1})$ داریم

$$\begin{aligned} E(X_{ij} \mid X_{ij}^{-}) &= E(\phi_1^{(ij)} \circ X_{i-1,j} + \phi_2^{(ij)} \circ X_{i,j-1} + \phi_3^{(ij)} \circ X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij} \mid X_{ij}^{-}) \\ &= E(\phi_1^{(ij)} \circ X_{i-1,j} \mid X_{ij}^{-}) + E(\phi_2^{(ij)} \circ X_{i,j-1} \mid X_{ij}^{-}) \\ &+ E(\phi_3^{(ij)} \circ X_{i-1,j-1} \mid X_{ij}^{-}) + E(\varepsilon_{ij} \mid X_{ij}^{-}) \\ &= \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} + \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} + \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} + \lambda \end{aligned}$$

برآوردهای کمترین مربعات شرطی فرآیند RCINAR(1,1) با می نیمم کردن عبارت زیر نسبت به پارامترها به دست می آیند

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}(X_{ij} - E(X_{ij} \mid \boldsymbol{X}_{ij}^{-}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}(X_{ij} - \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} - \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} - \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} - \lambda)^2 \end{aligned}$$

که $\boldsymbol{\theta} = (\mu_{\phi_1}, \mu_{\phi_2}, \mu_{\phi_3}, \lambda)$. با مشتق گرفتن نسبت به λ ، $\mu_{\phi_1}, \mu_{\phi_2}, \mu_{\phi_3}$ به دست می آوریم

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} = -2\sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=2}^{n_2}(X_{ij} - \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} - \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} - \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} - \lambda)$$

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_{\phi_1}} = -2\sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=2}^{n_2} X_{i-1,j}(X_{ij} - \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} - \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} - \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} - \lambda)$$

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_{\phi_2}} = -2\sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=2}^{n_2} X_{i,j-1}(X_{ij} - \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} - \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} - \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} - \lambda)$$

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_{\phi_3}} = -2\sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=2}^{n_2} X_{i-1,j-1}(X_{ij} - \mu_{\phi_1} X_{i-1,j} - \mu_{\phi_2} X_{i,j-1} - \mu_{\phi_3} X_{i-1,j-1} - \lambda)$$

با مساوی صفر قرار دادن روابط فوق رابطه زیر به دست می آید

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A\theta}$$

و این اثبات را کامل می کند.

□

۳ نتایج شبیه سازی مدل RCINAR(1,1)

در این بخش نتایج حاصل از شبیه سازی را مورد بحث قرار می دهیم. یادآوری می شود (تابنده و قدسی) در روش یول-واکر برآورد پارامترهای ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 به صورت زیر به دست می آید

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad (۱.۳)$$

که $\hat{\boldsymbol{\phi}}' = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$، $\hat{\boldsymbol{\rho}}' = (\hat{\rho}(1,0), \hat{\rho}(0,1), \hat{\rho}(1,1))$ و

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1,-1) & \hat{\rho}(0,1) \\ \hat{\rho}(1,-1) & 1 & \hat{\rho}(1,0) \\ \hat{\rho}(0,1) & \hat{\rho}(1,0) & 1 \end{pmatrix}$$

توجه داشته باشید که $\hat{\rho}(k,l) = \hat{\gamma}(k,l)/\hat{\gamma}(0,0)$ که $\hat{\gamma}(k,l)$ برای مجموعه داده $\{X_{ij}; i = 1,...,n_1 \quad \& \quad j = 1,...,n_2\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{\gamma}(k,l) = \frac{1}{n_1 n_2}\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})(X_{i+k,j+l} - \bar{X}), \qquad (۲.۳)$$

که $\max\{1, 1-k\} < i < \min\{n_1, n_1 - k\}$، $\max\{1, 1-l\} < j < \min\{n_2, n_2 - l\}$ و $k, l \in \mathbb{Z}$.

ما شبیه سازی را با استفاده از (۱.۱) با فرض این که $\varepsilon_{ij} \sim Poisson(\lambda)$ و $\phi_i \sim Uniform(0, \eta)$ برای $i = 1,2,3$ و $\eta = \frac{\mu_{\phi_i}}{2}$ باشد. با سه مجموعه مختلف از $\boldsymbol{\theta}' = (\mu_{\phi_1}, \mu_{\phi_2}, \mu_{\phi_3}, \lambda)$ انجام داده ایم. (i) $\boldsymbol{\theta}' = (0/05, 0/05, 0/05, 1)$، (ii) $\boldsymbol{\theta}' = (0/15, 0/15, 0/15, 1)$، (iii) $\boldsymbol{\theta}' = (0/3, 0/3, 0/3, 1)$، حجم فرایندهای تولید شده ۸×۸، ۱۶×۱۶، ۳۲×۳۲ و ۶۴×۶۴ هستند.

فرض کنید s تعداد تکرارها را نشان می دهد که در این مطالعه برابر ۵۰۰۰ است. مقادیر زیر در مطالعه شبیه سازی محاسبه شده اند.

۱.اریبی $(Bais) = \bar{\hat{\theta}} - \theta$

۲.ریشه میانگین مربعات خطا $(RMSE) = \sqrt{\sum_{i=1}^{s}(\hat{\theta}_i - \theta)^2/s}$

نتایج در جدول ۱،۲،۳ نشان داده شده است. نتایج بیان میکند که برآوردهای یول-واکر نسبت به برآوردهای کمترین مربعات شرطی اغلب زمانی که مقدار پارامترها کوچک و حجم نمونه نیز کوچک باشد دارای RMSE کوچکتر می باشند. در حالی که اگر مقدار پارامترها بزرگتر و نزدیک ۱ باشند و حجم نمونه نیز بزرگ باشد RMSE برآوردهای کمترین مربعات شرطی اغلب کمتر از برآوردهای یول-واکر است.

برای مقادیر کوچک پارامترها و حجم کوچک، اریبی برآوردهای یول-واکر اغلب کمتر از برآوردهای کمترین مربعات شرطی است. اما در سایر حالات اریبی برآوردهای کمترین مربعات شرطی اغلب کمتر از برآوردهای یول-واکر است.

به طور کلی در حجم های بالا روش کمترین مربعات شرطی و در حجم های کوچک روش یول-واکر بهتر می باشند (از لحاظ اریبی و RMSE).

جدول ۱: Biasو RMSE مدل RCINAR(1,1) برای مجموعه (i)

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_1$ Bias	$\hat{\phi}_1$ RMSE	$\hat{\phi}_2$ Bias	$\hat{\phi}_2$ RMSE
	۸ × ۸	YW	۰,۰۱۰۷	۰,۰۷۶۹	۰,۰۰۸۵	۰,۰۷۶۷
		CLS	۰,۰۲۱۳	۰,۰۹۵۵	۰,۰۲۰۷	۰,۰۹۶۱
	۱۶ × ۱۶	YW	۰,۰۰۰۳	۰,۰۴۸۵	۰,۰۰۱۱	۰,۰۴۸۱
		CLS	۰,۰۰۴۱	۰,۰۵۳۲	۰,۰۰۴۸	۰,۰۵۲۸
	۳۲ × ۳۲	YW	-۰,۰۰۱۶	۰,۰۲۹۰	-۰,۰۰۱۹	۰,۰۲۹۷
		CLS	-۰,۰۰۰۴	۰,۰۳۰۲	-۰,۰۰۰۴	۰,۰۳۰۹
	۶۴ × ۶۴	YW	-۰,۰۰۱۰	۰,۰۱۶۰	-۰,۰۰۱۳	۰,۰۱۵۹
		CLS	-۰,۰۰۰۴	۰,۰۱۶۴	-۰,۰۰۰۶	۰,۰۱۶۲

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_3$ Bias	$\hat{\phi}_3$ RMSE	$\hat{\lambda}$ Bias	$\hat{\lambda}$ RMSE
	۸ × ۸	YW	۰,۰۰۵۲	۰,۰۷۲۱	۰,۰۸۷۷	۰,۲۷۷۲
		CLS	۰,۰۲۴۳	۰,۰۹۹۳	۰,۰۷۲۷	۰,۳۳۰۹
	۱۶ × ۱۶	YW	-۰,۰۰۱۴	۰,۰۴۶۳	۰,۰۳۰۶	۰,۱۳۷۳
		CLS	۰,۰۰۵۴	۰,۰۵۳۱	۰,۰۱۷۸	۰,۱۴۷۹
	۳۲ × ۳۲	YW	-۰,۰۰۳۷	۰,۰۲۹۵	۰,۰۱۲۲	۰,۰۶۹۰
		CLS	-۰,۰۰۰۶	۰,۰۳۱۲	۰,۰۰۵۷	۰,۰۷۱۳
	۶۴ × ۶۴	YW	-۰,۰۰۲۰	۰,۰۱۵۶	۰,۰۰۵۳	۰,۰۳۵۲
		CLS	-۰,۰۰۰۴	۰,۰۱۶۰	۰,۰۰۱۹	۰,۰۳۵۷

جدول ۲: Biasو RMSE مدل RCINAR(1,1) برای مجموعه (ii)

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_1$ Bias	$\hat{\phi}_1$ RMSE	$\hat{\phi}_2$ Bias	$\hat{\phi}_2$ RMSE
	۸×۸	YW	-۰٫۰۲۹۱	۰٫۱۰۳۷	-۰٫۰۲۸۸	۰٫۱۰۳۲
		CLS	-۰٫۰۱۵۴	۰٫۱۲۰۵	-۰٫۰۱۵۰	۰٫۱۱۸۳
	۱۶×۱۶	YW	-۰٫۰۱۱۳	۰٫۰۶۱۷	-۰٫۰۱۳۲	۰٫۰۶۳۹
		CLS	-۰٫۰۰۶۱	۰٫۰۶۶۸	-۰٫۰۰۸۱	۰٫۰۶۸۸
	۳۲×۳۲	YW	-۰٫۰۰۴۸	۰٫۰۳۲۰	-۰٫۰۰۵۴	۰٫۰۳۲۲
		CLS	-۰٫۰۰۲۲	۰٫۰۳۳۲	-۰٫۰۰۲۶	۰٫۰۳۳۳
	۶۴×۶۴	YW	-۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۱۶۱	-۰٫۰۰۱۷	۰٫۰۱۶۱
		CLS	-۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۱۶۴	-۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۱۶۴

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_3$ Bias	$\hat{\phi}_3$ RMSE	$\hat{\lambda}$ Bias	$\hat{\lambda}$ RMSE
	۸×۸	YW	-۰٫۰۴۴۷	۰٫۱۰۲۴	۰٫۲۴۲۷	۰٫۴۳۴۲
		CLS	-۰٫۰۰۴۶	۰٫۱۲۵۰	۰٫۱۴۹۰	۰٫۴۶۷۴
	۱۶×۱۶	YW	-۰٫۰۲۶۲	۰٫۰۶۵۵	۰٫۰۹۲۹	۰٫۲۰۲۹
		CLS	-۰٫۰۰۷۰	۰٫۰۶۹۳	۰٫۰۳۹۹	۰٫۱۹۸۹
	۳۲×۳۲	YW	-۰٫۰۱۱۸	۰٫۰۳۴۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۹۷۸
		CLS	-۰٫۰۰۱۹	۰٫۰۳۴۰	۰٫۰۱۲۱	۰٫۰۹۳۶
	۶۴×۶۴	YW	-۰٫۰۰۵۳	۰٫۰۱۷۰	۰٫۰۱۵۹	۰٫۰۴۸۶
		CLS	-۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۰۱۹	۰٫۰۴۶۹

جدول ۳: Biasو RMSE مدل RCINAR(1,1) برای مجموعه (iii)

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_1$ Bias	$\hat{\phi}_1$ RMSE	$\hat{\phi}_2$ Bias	$\hat{\phi}_2$ RMSE
	۸ × ۸	YW	-۰,۰۵۱۹	۰,۱۲۷۸	-۰,۰۵۱۶	۰,۱۲۹۶
		CLS	-۰,۰۶۸۳	۰,۱۴۷۸	-۰,۰۶۸۰	۰,۱۴۸۸
	۱۶ × ۱۶	YW	-۰,۰۰۲۲	۰,۰۶۵۷	-۰,۰۰۱۴	۰,۰۶۵۲
		CLS	-۰,۰۲۰۵	۰,۰۷۰۹	-۰,۰۱۸۸	۰,۰۷۰۲
	۳۲ × ۳۲	YW	۰,۰۰۶۵	۰,۰۳۵۹	۰,۰۰۵۷	۰,۰۳۶۵
		CLS	-۰,۰۰۵۸	۰,۰۳۵۲	-۰,۰۰۶۳	۰,۰۳۵۶
	۶۴ × ۶۴	YW	۰,۰۰۴۸	۰,۰۱۹۲	۰,۰۰۴۸	۰,۰۱۹۴
		CLS	-۰,۰۰۱۸	۰,۰۱۸۱	-۰,۰۰۱۹	۰,۰۱۸۳

مجموعه	حجم نمونه	روش	$\hat{\phi}_3$ Bias	$\hat{\phi}_3$ RMSE	$\hat{\lambda}$ Bias	$\hat{\lambda}$ RMSE
	۸ × ۸	YW	-۰,۱۳۴۸	۰,۱۷۶۹	۲,۲۲۱۶	۲,۶۷۴۴
		CLS	-۰,۰۲۳۸	۰,۱۴۸۳	۰,۱,۴۹۵۶	۲,۲۴۴۵
	۱۶ × ۱۶	YW	-۰,۰۸۲۵	۰,۱۰۷۵	۰,۸۰۴۰	۱,۰۳۲۵
		CLS	-۰,۰۰۸۶	۰,۰۷۵۸	۰,۴۲۶۱	۰,۸۰۴۶
	۳۲ × ۳۲	YW	-۰,۰۴۶۳	۰,۰۶۰۳	۰,۳۱۵۰	۰,۴۵۳۹
		CLS	-۰,۰۰۴۰	۰,۰۳۹۵	۰,۱۴۰۴	۰,۳۶۸۶
	۶۴ × ۶۴	YW	-۰,۰۲۳۴	۰,۰۳۱۰	۰,۱۲۹۰	۰,۲۲۳۱
		CLS	-۰,۰۰۱۱	۰,۰۲۰۵	۰,۰۴۴۶	۰,۱۸۹۶

مراجع

Al-Osh, M. A. and A. A. Alzaid (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, **8**, 261–275.

Alzaid, A. A. and M. A. Al-Osh (1990). An integer-valued pth-order autoregressive structure (INAR(p)) process. *Journal of Applied Probability*, **27**, 314–324.

Du, Jin-Guan and Yuan Li (1991). The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model. *Journal of Time Series Analysis*, **12**, 129–142.

Ghodsi, A., Shitan, M. and Bakouch, H. (2012). A first-order spatial integer-valued autoregressive SINAR(1,1) model. *Communication in Statistics-Theory and Methods* , **41**, 2773–2787.

Silva, M.E. and Oliveira V. L. (2004). Difference equations for the higher-order moments and cumulants of the INAR(1) model. *Journal of Time Series Analysis*, **25**, 317–333.

Silva, M. E. and V.L. Oliveira (2005). Difference equations for the higher-order moments and cumulants of the INAR(p) model. *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 17–36.

Silva, I. and Silva, M. E. (2006). Asymptotic distribution of the Yule-Walker estimator for INAR(p) processes. *Statistics and Probability Letters*, **76**, 1655-1663.

Zheng, H. T., Basawa, I. V. and Datta, S. (2006a) The Inference for pth-order random coefficient integer-valued autoregressive processes. *Journal Of Time Series Analysis*, **27(3)**, 411–440.

Zheng, H. T., Basawa, I. V. and Datta, S. (2006b) The first order random coefficient integer-valued autoregressive processes. *Journal of Statistics, Planning Inference*, **173**, 212–229.