سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۴-۲ شهریور ۱۳۹۵

طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیونی درجه دوم بتا

حبیب جعفری، شیما پیرمحمدی[۱]، فاطمه آلبوغبیش
دانشگاه رازی، دانشکده علوم، گروه آمار

چکیده: برازش مدل‌های رگرسیونی پارامترهایی وجود دارد که برآورد آن‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای است. برای برازش بهتر این مدل‌ها نیازمند معیارهایی می‌باشیم که مدل را به مناسب‌ترین شکل برازش دهد. معیار D- بهینه یکی از این نوع معیارهاست که بسیار پرکاربرد است و مدلی که در این مقاله مدنظر قرار دارد مدل رگرسیونی درجه دوم بتا می‌باشد. یکی از روش‌های بدست آوردن طرح‌های بهینه، روش بیزی است که در این مقاله با توجه به مدل مورد بررسی از این روش برای بدست آوردن طرح‌های بهینه استفاده شده است، به‌طوری‌که برای پارامترهای مدل، توزیع‌های پیشین یکنواخت در نظر گرفته و نتایج به‌دست آمده تحلیل شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: معیار D-بهینگی، طرح D-بهینه‌ی بیزی، مدل رگرسیونی بتا، ماتریس اطلاع فیشر

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62K05، 62F15، 62J12.

۱ مقدمه

برای مدل‌های غیر خطی، ماتریس اطلاع فیشر به پارامترهای مجهول مدل وابسته است، که همین امر باعث وابستگی ملاک‌های بهینگی به پارامترهای مدل خواهد شد، زیرا ملاک‌های مورد نظر در این مقاله، توابعی بر حسب ماتریس اطلاع می‌باشند. این در حالی است که هدف از ارائه طرح یافتن نقاط بهینه، جمع آوری داده‌ها و برآورد پارامترهای مجهول مدل است و وابستگی ملاک‌های بهینگی به پارامترهای مجهول، سبب ایجاد نوعی تناقض در مسأله طرح می‌شود. اولین و ساده‌ترین راه‌حل، جایگزینی پارامترهای مجهول مدل با حدس‌های اولیه است. به طرح‌هایی که با استفاده از این روش به‌دست می‌آیند، طرح‌های بهینه موضعی گفته می‌شود. این طرح‌ها اولین بار توسط چرنوف (۱۹۵۳) مطرح گردید. انتخاب یک حدس اولیه‌ی مناسب، تأثیر زیادی در کارایی طرح موضعی دارد. اگر حدس اولیه از مقدار واقعی آن دور باشد، طرح بهینه‌ی به‌دست آمده، مناسب نخواهد بود. همچنین فضای پارامتر در بیشتر مسائل شامل بی‌نهایت نقطه است که نمی‌توان تمامی نقاط را در نظر گرفت و تنها تعداد محدودی از نقاط مورد بررسی قرار می‌گیرند. به همین دلیل روش‌های دیگری جهت رفع این مشکل ارائه گردیدند که از آن جمله می‌توان معیارهای بهینگی بیزی را نام برد. در طرح‌های بیزی از یک توزیع

[۱] شیما پیرمحمدی : pirmohammadi_sh@yahoo.com

پیشین برای پارامترهای مجهول مدل به جای یک حدس اولیه استفاده می‌شود. یک طرح بهینه‌ی بیزی، ملاک بهینگی مناسب را بر روی توزیع پیشین، بیشینه می‌کند. لیندلی (۱۹۷۲) روش نظریه تصمیم را ارائه و یک اساس ریاضی برای انتخاب طرح‌های بهینه بیزی فراهم آورد. چالونر و لارنتز (۱۹۸۹) یک نظریه متحد را برای طرح بهینه بیزی در مدل‌های غیر خطی ارائه دادند. چالونر و وردنیلی (۱۹۹۵) یک بازبینی کلی از طرح‌های بهینه بیزی انجام دادند.

در این مقاله طرح D-بهینه‌ی بیزی برای مدل رگرسیونی درجه دوم بتا با معلوم بودن پارامتر مزاحم محاسبه گردیده است. همچنین توزیع‌های پیشین یکنواخت برای پارامترها در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که طرح D-بهینه‌ی موضعی برای مدل رگرسیونی درجه دوم بتا توسط لطیف و ظفریاب (۲۰۱۴) ارائه شده است.

با توجه به موارد بیان شده، ادامه‌ی این مقاله در پنج بخش ساماندهی شده است. در بخش دوم به معرفی مدل رگرسیونی بتا پرداخته‌ایم. ماتریس اطلاع مربوط به مدل مورد نظر در بخش ۳ محاسبه شده و در بخش‌های ۴ و ۵ به‌ترتیب به معرفی طرح بهینه‌ی بیزی و محاسبه‌ی آن برای مدل رگرسیونی درجه دوم بتا پرداخته شده و در آخر بحث و نتیجه‌گیری حاصل از موضوع مقاله، آورده شده است.

۲ معرفی مدل رگرسیونی بتا

توزیع بتا، توزیع احتمالی پیوسته‌ای است که بر بازه‌ی صفر و یک تعریف می‌شود و دارای دو پارامتر است. به‌طوری‌که اگر داشته باشیم $Y_i \sim Beta(p,q); i = ۱,۲,...,n$ و n برابر با تعداد مشاهدات باشد، آنگاه تابع چگالی آن به‌صورت زیر است:

$$f_{p,q}(y_i) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y_i^{p-۱}(۱-y_i)^{q-۱} \quad ; y_i \in (۰,۱), p,q > ۰. \qquad (۱.۲)$$

اگر فرض کنیم $\phi = p+q$، آنگاه تابع چگالی (۱.۲) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_{\mu_i,\phi}(y_i) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_i\phi)\Gamma((۱-\mu_i)\phi)} y_i^{\mu_i\phi-۱}(۱-y_i)^{(۱-\mu_i)\phi-۱} \quad ; y_i \in (۰,۱), ۰ < \mu_i < ۱, \phi > ۰ \qquad (۲.۲)$$

که در آن ϕ پارامتر مزاحم بوده و μ_i امید ریاضی متغیر تصادفی Y_i است، به‌طوری‌که:

$$\mu_i = E(Y_i) = \frac{p}{p+q}.$$

حال تابع لینک را به صورت زیر معرفی می‌نماییم:

$$g(\mu_i) = \mathbf{f}^T(x_i)\boldsymbol{\beta},$$

که در آن

$$\mathbf{f}^T(x_i) = (f_۰(x_i), f_۱(x_i), \cdots, f_{r-۱}(x_i))^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱, \cdots, \beta_{r-۱})^T$$

جایی‌که $g(.)$ تابع لینک مناسب، $\boldsymbol{\beta}$ بردار پارامترهای مجهول، $\mathbf{f}(x_i)$ بردار توابع معلوم از پیشگوکننده‌ها و x_i برداری از پیشگوکننده‌هاست.

در این مقاله فرض شده است $x_i \in [۰,۱]$ و با توجه به اینکه $\mu_i \in (۰,۱)$، تابع لینک مناسب در این حالت، تابع لینک لجیت می‌باشد، یعنی:

$$Logit(\mu_i) = \mathbf{f}^T(x_i)\boldsymbol{\beta}.$$

مدل مورد نظر در این مقاله، مدل رگرسیونی درجه دوم بتا است، بنابراین:

$$\mathbf{f}(x_i) = (۱ \quad x_i \quad x_i^۲)^T; r = ۳$$

۳ ماتریس اطلاع فیشر

با توجه به این‌که بخش عمده‌ای از معیارهای بهینگی توابعی از ماتریس اطلاع هستند (اتکینسون و همکاران (۲۰۰۷))، بنابراین لازم است ابتدا ماتریس اطلاع فیشر مربوط به مدل (۲.۲) را محاسبه نماییم. ماتریس اطلاع فیشر در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, x_i) = -E\left(\frac{\partial \ln(f_{\boldsymbol{\beta}}(y \mid x_i))}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T}\right) \tag{۱.۳}$$

که در آن $\boldsymbol{\beta}$ بردار پارامترهای مجهول مدل و $\ln(.)$ بیانگر لگاریتم طبیعی است.

حال با توجه به این‌که در این مقاله مدل رگرسیونی درجه دوم بتا با پارامتر مزاحم معلوم مورد نظر است، بنابراین بردار پارامترهای مجهول، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲)^T$ می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۱.۳) و متقارن بودن ماتریس اطلاع فیشر، داریم:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}, x_i) = \begin{pmatrix} M_{۱۱} & M_{۱۲} & M_{۱۳} \\ & M_{۲۲} & M_{۲۳} \\ & & M_{۳۳} \end{pmatrix} \tag{۲.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
M_{۱۱} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] \\
M_{۱۲} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] x_i \\
M_{۱۳} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] x_i^۲ \\
M_{۲۲} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] x_i^۲ \\
M_{۲۳} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] x_i^۳ \\
M_{۳۳} &= \phi^۲ \mu_i^۲ (۱-\mu_i)^۲ \left[\Psi^{'}(\mu_i\phi) + \Psi^{'}((۱-\mu_i)\phi)\right] x_i^۴
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $\Psi^{'}(.)$ نشان‌دهنده‌ی مشتق دوم تابع گاما می‌باشد(فراری و سری‌باری‌نتو (۲۰۰۴)).

۴ طرح D-بهینه‌ی بیزی

اگر ξ یک طرح دلخواه به‌صورت زیر باشد:

$$\xi = \left\{ \begin{array}{cccc} x_۱ & x_۲ & \dots & x_n \\ w_۱ & w_۲ & \dots & w_n \end{array} \right\} \in \Xi; n \geq r, \tag{۱.۴}$$

که در آن x_i ها و w_i ها، به‌ترتیب نقاط طرح و وزن‌های مربوط به هرنقطه، r تعداد پارامترهای مجهول مدل و Ξ مجموعه‌ای از کلیه‌ی طرح‌های ممکن به‌صورت زیر است:

$$\Xi = \left\{ \xi \mid \sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱, \quad ۰ \leq w_i \leq ۱ \right\}.$$

ماتریس اطلاع مربوط به طرح (۱.۴) برابر است با:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi)=\sum_{i=1}^{n}w_i\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},x_i)$$

(اتکینسون و همکاران (۲۰۰۷)).

حال با توجه به این‌که معیار بهینگی در این مقاله، معیار D-بهینگی بیزی است، این معیار را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Phi_\pi(\xi)&=E_{\pi(\boldsymbol{\beta})}(-\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi)))\\&=-\int\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi))\pi(\boldsymbol{\beta})d\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

که در آن $\pi(\boldsymbol{\beta})$ تابع احتمال توأم پیشین پارامترهای مجهول و $\det(.)$ نماد دترمینان ماتریس است. با توجه به معیار بهینگی بیزی ذکر شده، اگر یک طرح Φ-بهینه را به‌صورت زیر نمایش دهیم:

$$\xi^*=\left\{\begin{array}{cccc}x_1^* & x_2^* & \dots & x_m^*\\ w_1^* & w_2^* & \dots & w_m^*\end{array}\right\};m\leq n, \tag{۲.۴}$$

سپس ξ^* را یک طرح D-بهینه‌ی بیزی می‌نامیم، اگر و فقط اگر:

$$\xi^*=\arg\min_{\xi\in\Xi}E_{\pi(\boldsymbol{\beta})}(-\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi))). \tag{۳.۴}$$

۵ طرح D-بهینه‌ی بیزی در مدل رگرسیونی درجه دوم بتا

با توجه به مدل (۲.۲)، جعفری و پیرمحمدی (۲۰۱۵) طرح D-بهینه‌ی بیزی را برای حالت مدل رگرسیونی ساده محاسبه نموده‌اند. در این بخش با توجه به رابطه‌ی (۳.۴) و ماتریس (۲.۳)، طرح‌های D-بهینه‌ی بیزی برای مدل رگرسیونی درجه دوم بتا محاسبه شده‌اند. برای ϕ دو مقدار ۵۰ و ۱۰۰ و برای پارامترهای مجهول β_0,β_1 و β_2 توزیع‌های پیشین یکنواخت با دامنه‌های مختلف در نظر گرفته شده است. پارامترهای مجهول مدل مستقل از هم در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین توابع احتمال توأم پیشین، حاصل‌ضرب توابع احتمال پیشین حاشیه‌ای آن‌ها می‌باشد. با توجه به این‌که برای معیار بهینگی فرم بسته‌ای وجود ندارد، بنابراین برای حل امید ریاضی مورد نظر باید از روش‌های عددی برای حل انتگرال آن استفاده نمود، که در این مقاله روش سیمپسون در نظر گرفته شده است.

۱- $\phi=50$: در این حالت برای پارامترهای β_1 و β_2 توزیع‌های پیشین یکنواخت $U(-a,a)$ جایی‌که $a=1,5,9$ می‌باشد، در سه حالت مورد بررسی قرار گرفته شده است.

الف) $\beta_0\sim U(-1,1)$

با توجه به جدول ۱ مشاهده می‌شود، همه‌ی طرح‌های بهینه‌ی به‌دست آمده، طرح‌های سه نقطه‌ای هستند. نقاط صفر و یک در تمام طرح‌ها نقاط ابتدا و انتها می‌باشد و وزن مربوط به هر یک از نقاط یکسان و برابر با ۰.۳۳۳ است. با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_1 و افزایش دامنه در توزیع β_2، نقطه‌ی دوم طرح کاهش می‌یابد. همچنین با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_2 و افزایش دامنه در توزیع β_1، نقطه‌ی دوم طرح کاهش یافته و به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

ب) $\beta_0\sim U(-5,5)$

جدول ۲ نشان می‌دهد که همه‌ی طرح‌های بهینه‌ی به‌دست آمده، طرح‌های سه نقطه‌ای هستند. نقاط صفر و یک در تمام طرح‌ها نقاط

ابتدا و انتها می‌باشد و وزن مربوط به هر یک از نقاط یکسان و برابر با ۰.۳۳۳ است. با ثابت در نظر گرفتن توزیع $\beta_۱$ و افزایش دامنه در توزیع $\beta_۲$، نقطه‌ی دوم طرح کاهش می‌یابد. این روند همچنین با ثابت در نظر گرفتن توزیع $\beta_۲$ و افزایش دامنه در توزیع $\beta_۱$ نیز، برقرار است.

ج) $\beta_۰ \sim U(-۹,۹)$

با توجه به جدول ۳، تقریباً همان روند موجود در جداول اول و دوم در این جدول نیز تکرار می‌شود، با این تفاوت که نقطه‌ی دوم مربوط به بیشتر طرح‌های بهینه برابر با ۰.۵۰۰ می‌باشد.
همچنین با توجه به جداول ۱، ۲ و ۳ (جایی که $\phi = ۵۰$ است) مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه‌ی مربوط به پارامتر $\beta_۰$ و ثابت در نظر گرفتن توزیع دو پارامتر $\beta_۱$ و $\beta_۲$، نقطه‌ی دوم طرح افزایش یافته و به یک نزدیک‌تر می‌شود.

جدول ۱: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = ۵۰$ و $\beta_۰ \sim U(-۱,۱)$

		$\beta_۱$		
		$U(-۱,۱)$	$U(-۵,۵)$	$U(-۹,۹)$
	$U(-۱,۱)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۳ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۲۱ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۳۴۸ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
$\beta_۲$	$U(-۵,۵)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۵۵ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۰۷ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۳۴۴ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
	$U(-۹,۹)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۰۹ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۳۸۱ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۳۳۶ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$

جدول ۲: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = ۵۰$ و $\beta_۰ \sim U(-۵,۵)$

		$\beta_۱$		
		$U(-۱,۱)$	$U(-۵,۵)$	$U(-۹,۹)$
	$U(-۱,۱)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۹ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۸۷ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۵۶ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
$\beta_۲$	$U(-۵,۵)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۴ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۸۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۵۲ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
	$U(-۹,۹)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۸۱ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۶۸ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۴۳ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$

جدول ۳: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = ۵۰$ و $\beta_۰ \sim U(-۹,۹)$

		$\beta_۱$		
		$U(-۱,۱)$	$U(-۵,۵)$	$U(-۹,۹)$
	$U(-۱,۱)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۵۰۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۵۰۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۸ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
$\beta_۲$	$U(-۵,۵)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۵۰۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۵۰۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۷ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$
	$U(-۹,۹)$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۵۰۰ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۹ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۴۹۵ & ۱ \\ ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ & ۰/۳۳۳ \end{pmatrix}$

۲- $\phi = ۱۰۰$: در این حالت برای پارامترهای $\beta_۱$ و $\beta_۲$ توزیع‌های پیشین یکنواخت $U(-a,a)$ جایی‌که $a = ۱,۵,۹$ می‌باشد، در

سه حالت مورد بررسی قرار گرفته شده است.

الف) $\beta_0 \sim U(-1, 1)$

با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود، مانند جدول ۱ یعنی وقتی‌که $\phi = 50$ بود، همه‌ی طرح‌های بهینه‌ی به‌دست آمده، طرح‌های سه نقطه‌ای هستند. نقاط صفر و یک که ابتدا و انتهای فضای متغیر مستقل می‌باشند، در تمام طرح‌ها جزء نقاط بهینه‌اند. با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_1 و افزایش دامنه در توزیع β_2 و همچنین با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_2 و افزایش دامنه در توزیع β_1، نقطه‌ی دوم طرح کاهش یافته و به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

جدول ۴: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = 100$ و $\beta_0 \sim U(-1, 1)$

		β_1		
		$U(-1, 1)$	$U(-5, 5)$	$U(-9, 9)$
	$U(-1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.493 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.418 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.336 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
β_2	$U(-5, 5)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.454 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.402 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.332 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
	$U(-9, 9)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.406 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.376 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.323 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$

ب) $\beta_0 \sim U(-5, 5)$

جدول ۵ نشان می‌دهد که، همه‌ی طرح‌های بهینه‌ی به‌دست آمده، طرح‌های سه نقطه‌ای هستند. وزن مربوط به هر سه نقطه از طرح‌های بهینه یکسان و برابر با ۰.۳۳۳ است. با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_1 و افزایش دامنه در توزیع β_2، نقطه‌ی دوم طرح کاهش می‌یابد. این روند همچنین با ثابت در نظر گرفتن توزیع β_2 و افزایش دامنه در توزیع β_1 نیز، برقرار است.

جدول ۵: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = 100$ و $\beta_0 \sim U(-5, 5)$

		β_1		
		$U(-1, 1)$	$U(-5, 5)$	$U(-9, 9)$
	$U(-1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.499 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.479 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.441 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
β_2	$U(-5, 5)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.489 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.471 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.437 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
	$U(-9, 9)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.471 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.456 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.427 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$

ج) $\beta_0 \sim U(-9, 9)$

با توجه به جدول ۶ در می‌یابیم، همان روندی که در جدول ۳ ($\phi = 50$) برقرار است، تکرار می‌شود.

با توجه به جداول ۴، ۵ و ۶ (جایی که $\phi = 100$ است)، مشاهده می‌شود که، با افزایش دامنه‌ی مربوط به پارامتر β_0 و ثابت در نظر گرفتن توزیع دو پارامتر β_1 و β_2، نقطه‌ی دوم طرح افزایش یافته و به یک نزدیک‌تر می‌شود.

جدول ۶: طرح‌های D-بهینه بیزی وقتی $\phi = 100$ و $\beta_0 \sim U(-9, 9)$

		β_1		
		$U(-1, 1)$	$U(-5, 5)$	$U(-9, 9)$
	$U(-1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.500 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.500 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.496 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
β_2	$U(-5, 5)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.500 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.499 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.495 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$
	$U(-9, 9)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.500 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.498 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.491 & 1 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به این‌که در این مقاله ماتریس اطلاع فیشر به پارامترهای مجهول وابسته می‌باشد، بنابراین از روش بیزی برای به‌دست آوردن طرح D-بهینه استفاده شده است. در روش بیزی لازم است ابتدا توزیع‌های پیشین برای پارامترهای مجهول انتخاب شود، که در این مقاله توزیع پیشین یکنواخت با دامنه‌های مختلف در نظر گرفته شده است. تمام طرح‌های D-بهینه‌ی بیزی به‌دست آمده، طرح‌های سه نقطه‌ای هستند. نقاط صفر و یک که ابتدا و انتهای طرح می‌باشند، در تمام طرح‌ها جزء نقاط بهینه‌اند و وزن‌های مربوط به هر سه نقطه‌ی طرح بهینه نیز با هم برابراند.

مراجع

Atkinson A.C., Donev A.N. and Tobias R.D. (2007), *Optimum Experimental Designs, With SAS*. Oxford University Press, New york.

Chaloner K., Larntz K. (1989), Optimal Bayesian designs applied to logistic regression experiments, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 21, 191 - 208.

Chaloner K. and Verdinelli I. (1995), Bayesian Experimental Design: A Review, *Statistical Science*, 10, 237 - 304.

Chernoff H. (1953), Locally Optimal Designs for Estimating Parameters, *The Annals of Mathematical Statistics* 26, 586 - 602.

Ferrari SLP., Cribari-Neto F. (2004), Beta regression for modelling rates and proportions, *J. Appl. Stat.* 31, 799 - 815.

Jafari H., Pirmohammadi SH. (2015), The bayesian D-optimal design for simple beta regression model in two cases (both known and unknown nuisance parameter) with uniform, normal and exponential prior distribution for parameters, *(PrePrint)*.

Latif S., ZafarYab M. (2014), D-optimal designs for beta regression models with single predictor, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, http://dx.doi.org/10.1080/00949655.2014.893581.

Lindley D.V. (1972), *Bayesian Statistics - A Review*, SIAM. Philadelphia.