سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

استواری طرح‌های A_{tc}-بهینه آزمایش-کنترل بلوکی با مشاهدات همبسته

محبوبه دوستی ایرانی، سعید پولادساز [۱]

[۱]

ایران

چکیدههنگام انجام آزمایش‌ها ممکن است برخی از مشاهدات از دست بروند. داده‌های گمشده مشکلات بسیار جدی برای طرح انتخاب شده به وجود می‌آورند. تا حدی که ممکن است کلیه ویژگی‌های خوب طرح را از بین برده و منجر به نتایجی نامعتبر گردند. به همین دلیل بررسی استواری طرح انتخاب شده نسبت به ویژگی‌های خوب طرح مانند کارایی ذر برابر فقدان مشاهدات از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله به بررسی استواری طرح‌های آزمایش-کنترل با مشاهدات همبسته تحت معیار A_{tc}-کارایی در مقابل از دست دادن یک یا چند مشاهده و همچنین فقدان یک یا چند بلوک می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: طرح بلوکی استوار، طرح آزمایش -کنترل

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 99X99، 99X99، 99X99، 99X99.

۱ مقدمه

مطالعات چند دهه اخیر در زمینه ساختار طرح‌های آزمایش، محققان را قادر به ساختن کلاس بزرگی از طرح‌ها به ازای پارامترهای یکسان نموده است. اما واضح است که در عمل استفاده از همه این طرح‌ها و یا انتخاب تصادفی یک طرح از یک کلاس مشخص، منجر به اتلاف وقت، انرژی و حتی دستیابی به نتایجی نامعتبر خواهد شد. لذا محققان لزوم استفاده از ملاکی مناسب، جهت انتخاب بین طرح‌های یک کلاس را مطرح نمودند. از جمله این ملاک ها می توان به معیارهای بهینگی اشاره نمود. علی رغم استفاده از معیارهای بهینگی برای انتخاب طرح، در برخی موارد شرایطی ایجاد می‌شود که دیگر نمی‌توان تنها بر معیارهای بهینگی تکیه کرد و از مناسب بودن طرح با اطمینان سخن گفت. از جمله این شرایط می‌توان به فقدان مشاهدات و یا حضور داده‌های پرت اشاره نمود. این شرایط می‌توانند طرح را با آسیب‌های جدی مواجه کنند و منجر به از دست رفتن خواص اولیه طرح، از جمله بهینگی آن گردند. اساسی‌ترین سوالی که در این مواقع مطرح می‌شود عبارت است از اینکه طرح مورد نظر، تا چه حد در برابر این آسیب‌ها مقاوم است؟ این مفهوم معمولا با نام استواری طرح، یاد شده و مورد بررسی قرار گرفته است. مفهوم استواری طرح در یک ارتباط تنگاتنگ با مفهوم کارایی قرار دارد. در واقع چنانچه

[1] محبوبه دوستی ایرانی : mdoostiirani@yahoo.co.uk

طرح در برابر شرایط ایجاد شده تا میزان مشخصی بتواند ویژگی‌های خود را حفظ کند و یا به عبارت دیگر همچنان یک طرح کارا باشد، استوار نامیده می‌شود. تاگوچی (۱۹۹۳) این روش را در ژاپن به کار گرفت و باعث ایجاد تحولاتی چشمگیر کیفی در صنعت این کشور گردید.

تاکنون مطالعات گسترده‌ای درباره استواری مختلف در برابر فقدان مشاهدات، حضور داده‌های پرت و تعویض تیمارها انجام گرفته است. مفهوم استواری یک طرح در برابر فقدان مشاهدات برای اولین بار توسط هدایت و جان (۱۹۷۴) تحت عنوان طرح‌هاس استوار بلوکی ناقص متعادل ارایه شد. طبق این مفهوم، طرح بلوکی ناقص متعادل را استوار گویند اگر در برابر فقدان مشاهدات، واریانس متعادل باقی بماند. در این رابطه سینگ و گوپتا (۱۹۹۱) شرایط کافی استواری طرح‌های بلوکی واریانس متعادل غیر دودویی با بلوک‌های اندازه را ارایه نمودند. علاوه بر آن‌ها سریواستاوا استوار بودن طرح‌های عاملی را بررسی کردند.

استواری طرح نسبت به معیار کارایی بیش از سایر معیارها مورد بررسی قرار گرفته است. سریواستاوا و همکاران (۱۹۹۰، ۱۹۹۱) نشان دادند که طرح‌های بلوکی ناقص متعادل و مربع بودن تحت معیار کارایی به ترتیب در مقابل فقدان یک بلوک کامل و یک ستون کامل از مشاهدات استوار می‌باشند. بهامیک و ویتینگل (۱۹۹۱) استواری طرح‌های بلوکی ناقص متعادل را بر اساس معیارهای بهینگی عمومی و با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس اطلاع طرح باقیمانده بررسی و یک نظریه تحت عنوان نظریه برتری را بیان نمودند و با استفاده از آن بدترین و بهترین حالت ممکن کارایی طرح‌های باقیمانده از حذف دو بلوک از طرح بلوکی ناقص متعادل را مشخص کردند.

استواری طرح‌های مربع لاتین در برابر فقدان جفت تیمار یک سطر (ستون) و دو جفت تیمار دلخواه هر دو سطر (ستون) تحت معیار کارایی توسط گاش و چاک (۲۰۱۰) مورد بررسی قرار گرفت و نشان داد که طرح‌های مربع لاتین در مقابل فقدان مشاهدات، استوار می‌باشند.

علاوه بر مطالعات ذکر شده استواری طرح‌های آزمایش-کنترل تحت معیار کارایی توسط سریواستاوا و همکاران (۱۹۹۶) بررسی شده است. آن‌ها توانستند شرایط کافی برای استواری طرح‌های بلوکی برای مقایسه تیمارها با یک کنترل در برابر فقدان یک تک مشاهده مربوط به یک تیمار مشخص را به دست آورند.

در مقاله حاضر، به بررسی استواری طرح‌های بلوکی آزمایش-کنترل با مشاهدات همبسته تحت معیار کارایی پرداخته خواهد شد. طرح‌های آزمایش-کنترل به آزمایشاتی گفته می‌شود که در آن‌ها هدف، مقایسه یک تیمار (تیمار کنترل) با یک یا چند تیمار دیگر (تیمارهای آزمایش) است. این دسته از طرح‌ها کاربردهای زیادی در علوم مختلف از جمله داروسازی، کشاورزی، شیمی و غیره دارند. کلاس طرح‌های آزمایش-کنترل بلوکی با یک تیمار کنترل و v تیمار آزمایشی که در b بلوک از اندازه k چیده شده‌اند را با $\mathcal{D}(v+1, b, k)$ نشان می‌دهیم. همچنین تیمار کنترل را با برچسب صفر و تیمارهای آزمایش را برچسب‌های ۱، ۲، ... و v نمادگذاری می‌کنیم. در این مقاله مشاهدات درون بلوک‌های طرح همبسته و بلوک‌های متفاوت مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند.

۲ استواری نسبت به از دست دادن یک یا چند بلوک تحت معیار A_{tc} کارایی

طبق تعریف، یک طرح A_{tc} بهینه است اگر متوسط واریانس مقابله‌ها بین تیمارهای آزمایش و کنترل را کمینه کند. بنابراین طرح d را A_{tc} - بهینه گویند هرگاه مقدار $\phi_{A_{tc}}(d)$ در رابطه زیر کمینه گردد.

$$\phi_{A_{tc}}(d) = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} var(\widehat{\tau_i - \tau_0})/\sigma^2$$

ماتریس اطلاع طرح که معمولا با C_d نشان داده می‌شود، متناظر با اثرات تیماری یعنی $(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_v)$ است. اما برای محاسبه مقدار A_{tc} -بهینگی، ماتریس اطلاع متناظر با $\tau_0 - \tau_1, ..., \tau_0 - \tau_v$ مورد نیاز است که با M_d نشان داده می‌شود و از حذف سطر و ستون مربوز به تیمار کنترل در ماتریس C_d به دست می‌آید. بنابراین می‌توان افراز زیر از ماتریس اطلاع را در نظر گرفت:

$$C_d = \begin{bmatrix} c_{d,00} & c'_{d,v} \\ c_{d,v} & M_d \end{bmatrix}$$

به طوری که $c_{d,00}$ یک مقدار اسکالر و $c_{d,v}$ یک بردار v بعدی است.

ماجامدار و نوتز (۱۹۸۳) با استفاده از ویژگی‌های ماتریس اطلاع M_d، نشان دادند مقدار A_{tc}-بهینگی حداقل برابر است با

$$a_d = \frac{v-1}{m_1(d)} + \frac{1}{m_2(d)} \tag{۱.۲}$$

که در آن

$$m_1(d) = \frac{1}{v-1}[tr(C_d) - (v+1)m_2(d)]$$

و

$$m_2(d) = \frac{1}{v}c_{d,00}$$

بنابراین طرح بهینه، طرحی است که کران فوف را کمینه کند. در حالتی که ماتریس M_d کاملاً متقارن باشد و یا به عبارت دیگر، طرح کاملاً متعادل باشد، کران فوق قابل دستیابی است. اما با توجه به همبسته بودن مشاهدات و همچنین غیرخطی رابطه ۱، دستیابی به طرح A_{tc} -بهینه با استفاده از کمینه کردن کران بهینگی کار بسیار دشواری است.

کانرت و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از رابطه ۱ و روش معرفی شده توسط کوشنر (۱۹۹۷) نشان دادند که طرح $d \in \mathcal{D}(v+1, b, k)$ با مشاهدات همبسته در هر بلوک، یک طرح A_{tc}-بهینه است اگر کمیت زیر را بیشینه کند:

$$\min_x Q_d(x) = \min_x[(1+x)^2 m_1(d) + x^2(v-1)m_2(d)].$$

همچنین آن‌ها با توجه به اینکه هر بلوک طرح در واقع از یک دنباله تیماری ساخته می‌شود و با قرار دادن دنباله‌های تیماری مشابه در یک کلاس نشان دادند طرح A_{tc}-بهینه حداکثر از دو کلاس تیماری مانند s_1 و s_2 ساخته می‌شود به طوری که

$$\min_x s_1(x) = \min_x Q_{s_2}(x) = \max_s \min_s Q_s(x). \tag{۲.۲}$$

و

$$\min_x Q'_{s_1}(x) \min_x Q'_{s_2}(x) \leq 0. \tag{۳.۲}$$

لازم به ذکر است دو دنباله تیماری مشابه در نظر گرفته می‌شوند اگر مقادیر m_1 و m_2 دو دنباله برابر باشند.

حال فرض کنید $d^* \in \mathcal{D}(v+1, b, k)$ یک طرح A_{tc}-بهینه در این کلاس و $d^\sharp$ طرح باقیمانده همچنان یک طرح کاراست یا از دست رفتن مشاهدات منجر به بی‌اعتبار شدن نتایج گردیده است؟ برای پاسخ به این سوال از معیار استواری استفاده می‌کنیم.

طبق تعریف طرح d^* تحت معیار A_{tc} کارایی استوار است اگر طرح باقیمانده و طرح اصلی تفاوت قابل ملاحظه‌ای نداشته باشند. همانطور که اشاره شد یک طرح A_{tc}-بهینه حداکثر از دو نو کلاس تیماری ساخته می‌شود. در این مقاله ما کلاس‌هایی را در نظر می‌گیریم

که حداقل شامل یک تکرار از تیمار کنترل هستند. طرح بهینه در اغلب موارد از ترکیب چنین کلاس‌هایی به دست می‌آید.

حال فرض کنید p تا از بلوک‌های طرح مفقود شده است. چون هر بلوک حداقل شامل یک تکرار از تیمار کنترل است طرح باقیمانده همبند خواهد بود. بنابراین با توجه به اینکه در هر طرح دلخواه d، $m_1(d) = \sum_{i=1}^{b} m_{1)(s_i)}$ و $m_2 = \sum_{i=1}^{b} m_2(s_i)$ و با استفاده از رابطه ۲ مقدار بهینگی طرح باقیمانده برابر است با

$$\begin{aligned}
\min_x Q^\sharp(x) &= (b-p)\min x\{(1+x)^2[\pi^\sharp m_1(s_1)+(1-\pi^\sharp)m_1 s_2]+x^2(v-1)[\pi^\sharp m_2(s_1)+(1-\pi^\sharp)m_2(s_2)\} \\
&= (b-p)\min_x \\
&\geq (b-p)[\pi^\sharp \min_x Q_{s_1}(x)+(1-\pi^\sharp)\min_x Q_{s_2}(x)] \\
&= (b-p)\min_x Q_{s_1}(x)
\end{aligned}$$

که در آن $\pi^\sharp$ نسبت بلوک‌هایی است که در طرح باقیمانده از کلاس s_1 ساخته شده‌اند. در رابطه ۵ تساوی آخر از این واقعیت نتیجه می‌شود که اگر دو کلاس در ساختن طرح A_{tc}-بهینه مورد استفاده قرار گیرند آن‌گاه رابطه ۲ برقرار است.

کارایی طرح $d^\sharp$ نسبت به طرح اصلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{A_{tc}} = \frac{\min_x Q_{d^\sharp}(x)}{\min_x Q_{d^*}(x)}.$$

که با توجه به رابطه ۵ حداقل برابر است با

$$e_{A_{tc}} \geq \frac{(b-p)\min_x Q_{s_1}(x)}{\min_x Q_{d^*}(x)}. \qquad (۴.۲)$$

از آنجا که طرحی با کارایی حداقل ۹۰ درصد معمولا طرح کارا در نظر گرفته می‌شود، در صورتی که نسبت فوق بیشتر از ۰/۹ باشد، طرح d^* یک طرح استوار در نظر گیرد.

قضیه ۱.۲. طرح A_{tc} -بهینه d^* پس از حذف p بلوک تحت معیار A_{tc}-کارایی استوار است اگر و تنها اگر $p \leq \frac{b}{10}$

اثبات. طبق رابطه (۶) باید

$$0/9 \leq \frac{(b-p)\min_x Q_{s_1}(x)}{\min_x Q_{d^*}(x)} \leq \frac{(b-p)\min_x Q_{s_1}(x)}{b\min_{s_1}(x)}. \qquad (۵.۲)$$

با ساده کردن عبارت فوق $p \leq \frac{b}{10}$ به دست می‌آید. □

۳ استواری طرح نسبت به از دست دادن یک یا چند مشاهده تحت معیار A_{tc}-کارایی

چون مشاهدات درون هر بلوک همبسته هستند مقدار کارایی طرح باقیمانده به این موضوع که مشاهده مفقود شده در کدام پلات قرار گرفته است، وابسته است. فرض کنید مشاهده مربوط به پلات i-ام در بلوک j-ام گمشده است. در این صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

۱) اگر پس از حذف مشاهده گمشده هیچ تکراری از تیمار کنترل در بلوک وجود نداشت، کل آن بلوک نادیده در نظر گرفته می‌شود، چون وجود چنین بلوکی می‌تواند منجر به از دست دادن ویژگی طرح گردد.

۲) اگر $k - i \geq i - ۱$ باشد و در $i - ۱$ پلات اولیخ بلوک حداقل یک تکرار از تیمار کنترل وجود داشته باشد، $k - i$ مشاهده آخر بلوک و در غیر این صورت پلات‌های اولیه را نادیده می‌گیریم.

۳) اگر $k - i < i - ۱$ باشد و در $k - i$ پلات پایانی بلوک حداقل یک تکرار از تیمار کنترل وجود داشته باشد، $i - ۱$ مشاهده اولیه بلوک و در غیر این صورت پلات‌های پایانی را نادیده می‌گیریم.

نادیده گرفتن پلات‌های قبل یا بعد از مشاهده گمشده باعث می‌شود در ساختار همبستگی بین مشاهدات تغییری ایجاد نگردد. با توجه به سه حالت ذکر شده چنانچه تعداد بلوک‌های حذف شده را برابر p در نظر بگیریم، طرح باقیمانده شامل $h = b - p$ بلوک با اندازه نابرابر خواهد بود به طوری که تعداد qتا از بلوک‌ها همان بلوک‌های طرح اولیه هستند. بنابراین

$$Q_{d^*}(x) = Q_{d_q}(x) + (b - q)Q_{s_۱}(x)$$

به طوری که Q_{d_q} مربوط به q بلوک مشترک بین طرح باقیمانده و طرح اصلی است. از طرفی

$$Q_{d^\sharp}(x) = Q_{d_q}(x) + \sum_{i=q+۱}^{h} Q_{s_i}(x).$$

بنابراین مقدار کارایی طرح باقیمانده نسبت به طرح اصلی برابر است با

$$\begin{aligned} e_{A_{tc}} &= \frac{\min_x [Q_{d_q}(x) + \sum_{i=q+۱}^{h} Q_{s_i}(x)]}{\min_x [Q_{d_q}(x) + (b-q)Q_{s_۱}(x)]} \\ &\geq \frac{\min_x Q_{d_q}(x) + \min_x \sum_{i=q+۱}^{h} Q_{s_i}(x)}{\min_x [Q_{d_q}(x) + (b-p)Q_{s_۱}(x)]} \end{aligned}$$

در نتیجه اگر طرح d استوار باشد بایستی رابطه زیر برقرار گردد:

$$۰/۹ \leq \frac{\min_x Q_{d_q}(x) + \min_x \sum_{i=q+۱}^{h} Q_{s_i}(x)}{(b/q) \min_x Q_{d_q}(x)}$$

۴ مثال

فرض کنید بخواهیم یک تیمار کنترل را با ۵ تیمار در ۱۸ بلوک از اندازه ۵ در حالی که مشاهدات در هر بلوک از فرایند اتورگرسیو مرتبه اول با پارامتر ۰/۵ پیروی می‌کنند مقایسه کنیم. با استفاده از الگوریتم مرفی شده توسط پولادساز و دوستی (۱۳۹۰) طرح A_{tc}–بهینه در این کلاس طرحی است که با نسبت ۰/۳۹۰۲ از کلاس [۱۰۲۰۳] : $s_۱$ و با نسبت ۰/۶۰۹۸ از کلاس [۱۰۲۳۴] : $s_۲$ ساخته شده باشد. در واقع طرح بهینه برای پارامترهای داده شده با استفاده از ۵ بلوک از کلاس $s_۱$ و ۱۳ بلوک از کلاس $s_۲$ ساخته می‌شود. جدول زیر کارایی طرح باقیمانده نسبت به طرح اولیه را در قبال حذف $(b_۱, b_۲)$ بلوک نشان می‌دهد. به طوری که $b_۱$ و $b_۲$ به ترتیب نشان دهنده تعداد بلوک‌های حذف شده از $s_۱$ و $s_۲$ هستند که به ترتیب در سطرها و ستون‌های جدول مشخص شده‌اند. همانطور که در جدول (۱) مشخص است تا زمانی که تعداد کل بلوک‌های حذف شده (صرف نظر ازنوع آن‌ها) کمتر از یک دهم کل بلوک‌ها باشد طرح استوار است.

جدول ۱: کارایی طرح باقیمانده نسبت به طرح اولیه.

تعداد بلوک‌های حذف شده	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۱	۰/۹۴۵۵	۰/۸۹۰۷	۰/۸۳۵۷	۰/۷۸۰۵
۱	۰/۹۴۱۱	۰/۸۸۶۹	۰/۸۳۲۶	۰/۷۸۰۵	۰/۷۲۳۵
۲	۰/۸۸۰۸	۰/۸۲۸۱	۰/۷۷۳۳	۰/۷۱۹۳	۰/۶۶۵۲
۳	۰/۸۱۱۹	۰/۷۶۵۶	۰/۷۱۲۲	۰/۶۵۸۷	۰/۶۰۵۱
۴	۰/۷۵۵۱	۰/۷۰۲۰	۰/۶۴۸۹	۰/۵۹۵۸	۰/۵۴۲۶

مراجع

پولادساز س. و دوستی، م. (۱۳۹۰). یک الگوریتم جدید برای یافتن طرح‌های آزمایش-کنترل بلوکی بهینه با مشاهدات همبسته، یازدهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه علم و صنعت.

Bhaumik D.K. and Whittinghill D.C. (1991), Optimality and robustness to the unavailability of blocks designs, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 53(2), 399-477.

Ghosh D.K. and Chhag S. (2010), Robustness of latin square design against loss of pairs of treatments, *Prob. Stat. Forum*, 3, 25-37.

Hedayat A. and John P.W.M. (1976), Resistant and suceptible BIBDs, *Annals of Statistics* 4, 960-962.

Kunert J., Martin R.J. and Eccleston J. (2010), Optimal block designs comparing test-treatments with a control when the errors are correlated, *Journal of Statisticak Planning and Inference*, 2719-2738.

Kushner H.B. (1997), Optimal repeated measurements designs: the linear optimality equation, *Annals of Statistics*, 25, 3228-2344.

Majumdar D. and Notz W.I. (1983), Optimal incomplete block designs for comparing treatments with a control, *Annals of Statistics*, 11(1), 258-266.

Sing R. and Gupta V.K. (1991), Resistance of block designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 27, 263-269.

Sirvastava R., Guota V.K. and Dey A. (1990), Robustness of some designs against missing observations, *Communicatuons in Statistics-Theory and Methods*, 19(1), 121-126.

Sirvastava R., Guota V.K. and Dey A. (1991), Robustness of some designs against missing data, *Journal of Applied Statistical Science*, 18, 313-318.

Sirvastava R., Guota V.K. and Dey A. (1996), Robustness of block designs for making test-control treatments comparison against missing observations, *Sankhya*, B, 58, 407-413.

Sirvastava R., Guota V.K. and Dey A. (2000), Structure resistant factorial designs, *Sankhya*, B, 62(2), 257-265.

Taguchi G. (1993), Taguchi methods: designs of experiments, *American Supplier Institute*, Inc, Dearborn.