



## استنباط برای مدل وایبل نمایی شده تحت سانسور فزاینده نوع II تعمیمی

محسن سعیدی مفرد<sup>۱</sup>، مهدی توانگر<sup>۱</sup>

گروه آمار دانشگاه اصفهان

چکیده: در این مقاله مسأله برآورد پارامترها، توابع قابلیت اعتماد و نرخ شکست برای توزیع وایبل نمایی شده دو-پارامتری تحت سانسور فزاینده نوع II تعمیمی با استفاده از روش‌های کلاسیک و بیزی بررسی می‌شود. با استفاده از برآوردهای ماکسیمم درستنمایی فواصل اطمینان تقریبی و فواصل اطمینان بوت‌استرپ ساخته می‌شود. سپس روش‌های برآورد پیشنهادی روی یک مجموعه داده طول عمر واقعی اجرا می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع وایبل نمایی شده، سانسور فزاینده، مونت کارلوی زنجیر مارکوفی، فواصل بوت‌استرپ.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 99X99، 99X99، 99X99.

### ۱ مقدمه

توزیع وایبل نمایی شده  $EW(\alpha, \theta)$  بسطی از توزیع وایبل معروف به واسطه اضافه کردن یک پارامتر شکل دیگر با چگالی احتمال

$$f(x; \alpha, \theta) = \alpha \theta x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha) (1 - \exp(-x^\alpha))^{\theta-1}, \quad x > 0, \quad \alpha, \theta > 0 \quad (1.1)$$

و تابع توزیع

$$F(x; \alpha, \theta) = (1 - \exp(-x^\alpha))^\theta \quad (2.1)$$

می‌باشد. تابع قابلیت اعتماد این توزیع در زمان  $t$  به صورت

$$S(t) = 1 - (1 - \exp(-t^\alpha))^\theta, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

و تابع نرخ شکست در زمان  $t$  به صورت

$$h(t) = \frac{\alpha \theta t^{\alpha-1} \exp(-t^\alpha) (1 - \exp(-t^\alpha))^{\theta-1}}{[1 - (1 - \exp(-t^\alpha))^\theta]}, \quad t > 0. \quad (4.1)$$

<sup>۱</sup> محسن سعیدی مفرد: m.saeidimofrad@sci.ui.ac.ir

است. کیم و همکاران (۲۰۱۱) برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی دو پارامتر شکل و تابع قابلیت اعتماد این توزیع را تحت سانسور فزاینده نوع II به دست آوردند.

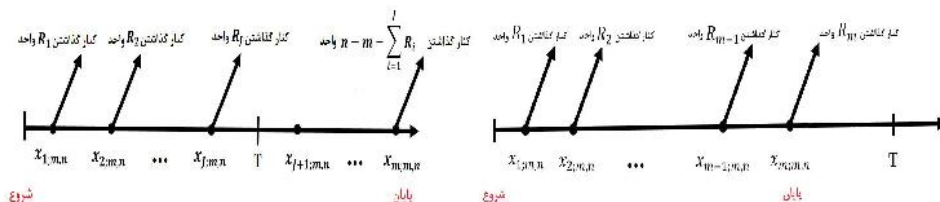
یک طرح سانسور می‌تواند میان کل زمان صرف شده برای آزمایش، تعداد واحدهای مورد استفاده در آن و کارایی استنباط آماری براساس نتایج آزمایش تعادل ایجاد کرده و آن را بهینه کند. طرح‌های سانسور نوع I (زمان) و نوع II (شکست) متداول‌ترین طرح‌های سانسور هستند. در سانسور نوع I زمان از پیش تعیین شده  $t$  و در سانسور نوع II مشاهده  $m$ -امین شکست به عنوان پایان آزمایش در نظر گرفته می‌شود. نقطه ضعفی که در سانسورهای نوع I و II وجود دارد آن است که امکان کنار گذاشتن واحدها در زمان‌هایی دیگر غیر از زمان پایان آزمایش وجود ندارد. در حالی که گاهی لازم است واحدها را در مراحل مختلف آزمایش کنار بگذاریم به خصوص هنگامی که داده‌های آزمایش به سختی به دست می‌آیند. به همین دلیل سانسورهای کلی‌تری به نام سانسورهای فزاینده معرفی می‌شوند از جمله می‌توان به بالاکریشنان (۲۰۰۷) اشاره نمود. فرض اساسی در طراحی آزمایشات سانسور شده فزاینده، از پیش مشخص بودن طرح سانسور می‌باشد اما در آزمایشات عمر واقعی چنین چیزی امکان‌پذیر نیست زیرا آزمایشگر ممکن است به هر دلیلی تعداد سانسورها را در طول آزمایش تغییر دهد.

## ۲ طرح سانسور فزاینده نوع II تعمیمی

در اغلب آزمایشات طول عمر از طرح سانسور فزاینده نوع II، که تعمیمی از سانسور نوع II است، استفاده می‌شود. در این طرح  $n$  واحد در زمان صفر وارد آزمایش می‌شود. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  طول عمر از هم مستقل واحدها با تابع چگالی  $f(x)$  و تابع توزیع  $F(x)$  است. پیش از انجام آزمایش، طرح سانسور  $R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$  با  $R_i \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^m R_i + m = n$  به طور کامل مشخص می‌شود. در زمان وقوع  $i$ -امین شکست،  $R_i$  واحد سالم به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند و آزمایش تا مشاهده  $m$  شکست ( $m < n$ ) ادامه می‌یابد و طول عمرهای مشاهده شده با  $X_{i;m;n}^R; i = 1, \dots, m$  نشان داده می‌شود که در واقع آماره‌های ترتیبی سانسور شده فزاینده نوع II از راست می‌باشند. فرض اساسی در طراحی آزمایشات سانسور شده فزاینده از پیش مشخص بودن طرح سانسور است. در حالی که این فرض در آزمایشات عمر واقعی ممکن است در نظر گرفته نشود زیرا آزمایشگر ممکن است تعداد سانسورها را در طول آزمایش تغییر دهد لذا ان‌جی و همکاران (۲۰۰۹) با معرفی طرح سانسور فزاینده نوع II تعمیمی سعی کردند این نقطه ضعف را پوشش دهند. در طرح سانسور فزاینده نوع II تعمیمی حجم نمونه موثر  $m$  و طرح سانسور از پیش تعیین شده‌اند ولی ممکن است مقادیر برخی از  $R_i$ ها در طول آزمایش تغییر کند. فرض کنید آزمایشگر زمان  $T$  را به عنوان کل زمان آزمون ایده‌آل برای آزمایش در نظر بگیرد. البته ممکن است اجازه دهیم آزمایش بعد از زمان  $T$  نیز ادامه یابد. اگر  $X_{m;m;n} < T$  آزمایش با طرح سانسور فزاینده از پیش تعیین شده پیش می‌رود و در  $X_{m;m;n}$  متوقف می‌شود (شکل ۱) در غیر این صورت زمان آزمایش از  $T$  عبور می‌کند در حالی که هنوز تعداد شکست‌های مشاهده شده به  $m$  نرسیده است. در نظر بگیرید که ما سعی داریم آزمایش را هر چه سریع‌تر برای مقدار ثابت و از پیش تعیین شده  $m$  به پایان برسانیم. حال فرض کنید  $J$  تعداد شکست‌های مشاهده شده قبل از زمان  $T$  باشد، یعنی  $X_{J;m;n} < T < X_{J+1;m;n}; J = 0, 1, \dots, m$ .

بعد از گذر از زمان  $T$ ، هیچ واحدی حذف نمی‌گردد به جز در زمان شکست  $m$ -ام که همه واحدهای سالم باقی‌مانده کنار گذاشته می‌شوند. بنابراین خواهیم داشت  $R_{m-1} = \dots = R_{J+1} = 0$  و  $R_J = n - m - \sum_{i=1}^J R_i$ . شکل ۱ نمایشی از این وضعیت را ارائه می‌دهد. در واقع هدف اصلی این طرح تسریع آزمون در حالتی است که مدت آزمون از آستانه از پیش تعیین شده  $T$  تجاوز کند. اگر

آزمایشگر علاقه‌مند باشد مشاهدات را هرچه سریع‌تر به دست آورد، واحدهای کمتری را حذف خواهد کرد و اگر بخواهد زمان‌های شکست مشاهده‌شده بزرگتری داشته باشد، واحدهای بیشتری را حذف خواهد کرد. بنابراین مقدار  $T$  نقش مهمی در تعیین مقادیر سانسورها داشته و همچنین میان مدت آزمون کوتاه‌تر و شانس مشاهده شکست‌های بزرگ مقادیر، تعادل برقرار می‌کند. توجه داشته باشید که اگر  $T = \infty$  باشد آنگاه حالت تعمیمی یاد شده به سانسور فزاینده نوع II و اگر  $T = 0$  باشد به طرح سانسور معمولی تبدیل خواهد شد.



شکل ۱: سمت راست: آزمایش قبل از زمان  $T$  پایان می‌یابد. سمت چپ: آزمایش بعد از زمان  $T$  پایان می‌یابد.

### ۳ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید  $X_{i;m,n}; i = 0, 1, \dots, m$  نمونه سانسور شده فزاینده نوع II تعمیمی باشد، که از نمونه‌ای به حجم  $n$  با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  و تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  گرفته شده و طرح سانسور فزاینده تعمیمی به صورت  $R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$  است. با تعیین  $J = j$ ، تابع درستنمایی برای  $0 < x_{1;m,n,k}^R < \dots < x_{m;m,n,k}^R < \infty$  به صورت

$$f(x_{1;m,n}^R, \dots, x_{m;m,n}^R) = B_J \left[ \prod_{i=1}^m f(x_{i;m,n}^R) \right] \times \left[ \prod_{i=1}^J [\lambda - F(x_{i;m,n}^R)]^{R_i} \right] [\lambda - F(x_{m;m,n}^R)]^{C_j} \quad (1.3)$$

خواهد بود، که در آن

$$B_J = \prod_{i=1}^m \left[ n - i + 1 - \sum_{k=1}^{\min\{i-1, J\}} R_k \right]$$

و  $C_j = n - m - \sum_{i=1}^J R_i$  حال با استفاده از روابط ۱.۱ و ۲.۱ در معادله ۱.۳، تابع درستنمایی  $\alpha$  و  $\theta$  به صورت

$$L(\alpha, \theta | \underline{x}) \propto \alpha^m \theta^m \prod_{i=1}^m V_i U_i^{\theta-1} \times \left[ \prod_{i=1}^J (\zeta_i^{R_i}) \right] \times [\zeta_m]^{C_j} \quad (2.3)$$

به دست می‌آید، به طوری که

$$\begin{cases} x_i \equiv x_{i;m,n}^R \\ U_i(\alpha) \equiv U_i = 1 - \exp(-x_i^\alpha) \\ V_i(\alpha) \equiv V_i = x_i^{\alpha-1} \exp(-x_i^\alpha) \\ \zeta_i(\alpha, \theta) \equiv \zeta_i = 1 - U_i^\theta \end{cases} \quad (3.3)$$

با استفاده از  $\ell(\alpha, \theta | \underline{x}) = \log L(\alpha, \theta | \underline{x})$  و

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\alpha, \theta | \underline{x}) = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^m (\eta_{\lambda i} + (\theta - 1) \eta_{\tau i}) - \sum_{i=1}^J (R_i \phi_i) - C_j \phi_m = 0 \quad (۴.۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\alpha, \theta | \underline{x}) = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \log U_i - \sum_{i=1}^J (R_i Q_i) - C_j Q_m = 0 \quad (۵.۳)$$

که در آن  $\phi_i = \theta U_i^{\theta-1} W_i$ ,  $W_i = \frac{\varpi_i}{\zeta_i} \eta_{\tau i} = \frac{\varpi_i}{U_i}$ ,  $\varpi_i = x_i^\alpha \exp[-x_i^\alpha] \log x_i$ ,  $\eta_{\lambda i} = (1 - x_i^\alpha) \log x_i$  و  $Q_i = \frac{U_i^\theta \log U_i}{\zeta_i}$  برآوردگرهای ماکسیم درستنمایی به دست می‌آیند و از آنجا که این دو معادله جواب دقیقی ندارند،  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\alpha}$  با استفاده از روش‌های عددی مانند روش نیوتون محاسبه می‌شوند. علاوه بر این برآوردهای ماکسیم درستنمایی  $S(t)$  و  $h(t)$  با استفاده از ویژگی پایایی برآوردهای  $ML$  به سادگی از روابط

$$\hat{S}(t) = 1 - \left(1 - \exp(-t^{\hat{\alpha}})\right)^{\hat{\theta}}, \quad t > 0 \quad (۶.۳)$$

و

$$\hat{h}(t) = \hat{\alpha} \hat{\theta} t^{\hat{\alpha}-1} \exp(-t^{\hat{\alpha}}) \left(1 - \exp(-t^{\hat{\alpha}})\right)^{\hat{\theta}-1} \left[1 - \left(1 - \exp(-t^{\hat{\alpha}})\right)^{\hat{\theta}}\right]^{-1}, \quad t > 0 \quad (۷.۳)$$

حاصل می‌شوند.

## ۴ فواصل اطمینان جانبی

### ۱.۴ فواصل اطمینان $\alpha$ و $\theta$

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \alpha^2} &= -\frac{m}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^m \left(x_i^\alpha \log^2 x_i\right) - (\theta - 1) \sum_{i=1}^m \eta_{\tau i} (\eta_{\tau i} - \eta_{\lambda i}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^J (R_i \phi_i ((\theta - 1) \eta_{\tau i} + \eta_{\lambda i} + \phi_i)) - C_j \phi_m ((\theta - 1) \eta_{\tau m} + \eta_{\lambda m} + \phi_m). \end{aligned} \quad (۱.۴)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \theta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^m \eta_{\tau i} - \sum_{i=1}^J (R_i \phi_i \Delta_i) - C_j \phi_m \Delta_m \quad (۲.۴)$$

و

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \theta^2} = \frac{-m}{\theta^2} - \sum_{i=1}^J \left(R_i Q_i \frac{\log^2 U_i}{\zeta_i}\right) - C_j Q_m \frac{\log^2 U_m}{\zeta_m} \quad (۳.۴)$$

که  $\Delta_i = \left(\frac{1}{\theta} + \log U_i + Q_i\right)$ . ماتریس واریانس کواریانس جانبی  $MLE$  برای  $\alpha$  و  $\theta$  از مولفه‌های معکوس ماتریس اطلاع

فیشر تعیین می‌شوند که با استفاده از رابطه

$$I_0(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \alpha \partial \theta} \\ -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \theta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \theta | \underline{x})}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$$

تقریب زده می‌شود. از آنجا که  $MLE$  مجاناً نرمال است بنابراین  $(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) \sim N((\alpha, \theta), I_0(\hat{\alpha}, \hat{\theta}))$  لذا فواصل اطمینان تقریبی  $100(1-\gamma)\%$  برای  $\alpha$  و  $\theta$  به ترتیب به صورت  $\hat{\alpha} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})}$  و  $\hat{\theta} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$  حاصل می‌شوند.

#### ۲.۴ فواصل اطمینان $h(t)$ و $S(t)$

برای یافتن برآوردهای تقریبی واریانس‌های  $\hat{S}(t)$  و  $\hat{h}(t)$  از روش دلتا استفاده می‌کنیم. با تعریف  $G_1 = \left( \frac{\partial S(t)}{\partial \alpha}, \frac{\partial S(t)}{\partial \theta} \right)$  و  $G_2 = \left( \frac{\partial h(t)}{\partial \alpha}, \frac{\partial h(t)}{\partial \theta} \right)$  واریانس‌های مجانبی تقریبی  $\hat{S}(t)$  و  $\hat{h}(t)$  به ترتیب به صورت  $\widehat{Var}(\hat{S}(t)) \simeq [G_1^T I_0 G_1] \Big|_{(\hat{\alpha}, \hat{\theta})}$  و  $\widehat{Var}(\hat{h}(t)) \simeq [G_2^T I_0 G_2] \Big|_{(\hat{\alpha}, \hat{\theta})}$  خواهند بود. بنابراین فواصل اطمینان تقریبی برای  $S(t)$  و  $h(t)$  به ترتیب به صورت

$$\left( \hat{S}(t) - Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{S}(t))}, \hat{S}(t) + Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{S}(t))} \right) \quad (۴.۴)$$

و

$$\left( \hat{h}(t) - Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{h}(t))}, \hat{h}(t) + Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{h}(t))} \right) \quad (۵.۴)$$

حاصل می‌شوند.

## ۵ برآوردهای بیزی

روش‌های بیزی این امکان را فراهم می‌سازند که با استفاده از اطلاعات پیشین به استنباط در مورد پارامترها بپردازیم. اطلاعات پیشین می‌توانند آگاهی‌بخش یا غیرآگاهی‌بخش باشند. استنباط روی پارامترها در رهیافت بیز با استفاده از توزیع‌های کناری پسین انجام می‌شود. در این بخش با استفاده از از تابع زیان مربع خطا برآوردهای بیزی پارامترهای نامعلوم  $\alpha, \theta, S(t)$  و  $h(t)$  را به دست می‌آوریم. با فرض توزیع‌های پیشین گامای مستقل  $G(a, b)$  و  $G(c, d)$  برای  $\alpha$  و  $\theta$  پیشین توأم برای  $\alpha > 0, \theta > 0, c > 0, d > 0, b > 0$ ،

$$\pi(\alpha, \theta | \underline{x}) \propto \alpha^{m+a-1} \theta^{m+c-1} e^{-b\alpha} e^{-d\theta} (\lambda - U_m^\theta)^{C_j} \prod_{i=1}^m V_i U_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^j \zeta_i^{R_i}.$$

به دست می‌آید، که آن را به صورت  $D(\alpha, \theta | \underline{x}) \propto g_1(\alpha | \theta, \underline{x}) g_2(\theta | \alpha, \underline{x}) D(\alpha, \theta | \underline{x})$  نیز می‌توان نوشت، به طوری که  $g_1(\alpha | \theta, \underline{x}) \propto \alpha^{m+a-1} e^{-b\alpha} \prod_{i=1}^m V_i$  و  $g_2(\theta | \alpha, \underline{x}) \propto \theta^{m+c-1} e^{-d\theta}$  بوده و

$$D(\alpha, \theta | \underline{x}) \propto (\lambda - U_m^\theta)^{C_j} \prod_{i=1}^m U_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^j \zeta_i^{R_i}.$$

بنابراین برآورد بیز هر تابع مانند  $u(\alpha, \theta)$  به صورت

$$u_B(\alpha, \theta) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty u(\alpha, \theta) g_1(\alpha | \theta, \underline{x}) g_2(\theta | \alpha, \underline{x}) D(\alpha, \theta | \underline{x}) d\alpha d\theta}{\int_0^\infty \int_0^\infty g_1(\alpha | \theta, \underline{x}) g_2(\theta | \alpha, \underline{x}) D(\alpha, \theta | \underline{x}) d\alpha d\theta} \quad (۱.۵)$$

است و چون محاسبه‌ی آن به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست با استفاده از الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی ( $MCMC$ ) و نمونه‌گیری سازوار تقریب زده می‌شود. بنابراین نمونه‌های  $MCMC$  را تولید کرده، سپس با استفاده از آن برآوردهای بیزی و

فواصل اطمینان مربوط را محاسبه می‌کنیم. از آن جایی که  $g_1(\alpha|\theta, \underline{x})$  تابع چگالی لوگ-مقعر دارد، لذا  $\alpha_i$  با استفاده از تعمیم روش دوروی (۱۹۸۴) از  $g_1(\alpha|\theta, \underline{x})$  و  $\theta_i$  از  $g_2(\theta|\alpha, \underline{x})$  که دارای توزیع  $G(m+c, d)$  است، تولید شده و  $\{(\alpha_i, \theta_i), i=1, 2, \dots, M\}$  حاصل می‌شود. پس برآوردهای بیزی تقریبی از هر تابع  $u(\alpha, \theta) \equiv \Theta \equiv (\alpha, \theta, S(t), h(t))$  با توجه به تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{\Theta} = \hat{u}_B(\alpha, \theta) = \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(\alpha_i, \theta_i) D(\alpha_i, \theta_i | \underline{x})}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D(\alpha_i, \theta_i | \underline{x})}$$

به دست می‌آید و فاصله اعتبار  $\% (1-\gamma) (1-\gamma)$  برای  $\Theta$  با استفاده از روش چن و شائو (۱۹۹۹) به صورت  $(\hat{\Theta}(\frac{k}{M}), \hat{\Theta}(\frac{k+(1-\gamma)M}{M}))$  ساخته می‌شود، که  $k=1, 2, \dots, M - [(1-\gamma)M]$  و  $[ \cdot ]$  تابع جز صحیح می‌باشد.

## ۶ فواصل اطمینان بوت استرپ

اگر اندازه نمونه کم باشد تقریب‌های نرمال نمی‌توانند مفید باشند لذا روش‌های باز نمونه‌گیری بوت استرپ که فواصل اطمینان تقریبی دقیق‌تری را فراهم می‌کنند، اهمیت می‌یابند. در این جا دو فاصله اطمینان بر اساس روش‌های بوت استرپ پارامتری پیشنهاد می‌نماییم.

### ۱.۶ فواصل صدکی بوت استرپ PB

با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II تعمیمی برآورد ماکسیم درست‌نمایی  $\Theta = (\alpha, \theta, S(t), h(t))$  را محاسبه کرده و  $\hat{\Theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{S}(t), \hat{h}(t))$  نشان می‌دهیم. بر اساس طرح سانسور فزاینده تعمیمی از پیش تعیین شده  $R = (R_1, \dots, R_m)$  و تغییر زمان  $T$ ، با استفاده از الگوریتم ان‌جی و همکاران (۲۰۰۹) یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع II تعمیمی از توزیع EW با پارامتر  $(\hat{\alpha}, \hat{\theta})$  تولید نموده و با استفاده از آن برآورد ماکسیم درست‌نمایی  $\Theta$  را به دست آورده و با  $\hat{\Theta}^*$  نمایش می‌دهیم. با  $B$  بار تکرار این کار،  $\hat{\Theta}_1^*, \hat{\Theta}_2^*, \dots, \hat{\Theta}_B^*$  حاصل می‌شوند و فواصل اطمینان  $\% (1-\gamma) (1-\gamma)$  با آماره‌های ترتیبی به صورت  $(\hat{\alpha}_{(\frac{B-\gamma}{\gamma})}^*, \hat{\alpha}_{(B(\frac{1-\gamma}{\gamma}))}^*)$ ،  $(\hat{\theta}_{(\frac{B-\gamma}{\gamma})}^*, \hat{\theta}_{(B(\frac{1-\gamma}{\gamma}))}^*)$ ،  $(\hat{S}_{(B(\frac{1-\gamma}{\gamma}))}^*, \hat{S}_{(\frac{B-\gamma}{\gamma})}^*)$  و  $(\hat{h}_{(B(\frac{1-\gamma}{\gamma}))}^*, \hat{h}_{(\frac{B-\gamma}{\gamma})}^*)$  خواهند بود.

### ۲.۶ فواصل تی-بوت استرپ BT

با استفاده از  $(\hat{\alpha}_{(1)}^*, \hat{\alpha}_{(2)}^*, \dots, \hat{\alpha}_{(B)}^*)$  و  $(\hat{\theta}_{(1)}^*, \hat{\theta}_{(2)}^*, \dots, \hat{\theta}_{(B)}^*)$  آماره‌ی تی را به شکل

$$T_{\alpha^{(j)}}^* = \frac{[(\hat{\alpha}_{(j)}^* - \hat{\alpha})]}{\sqrt{Var(\hat{\alpha})}}, \quad T_{\theta^{(j)}}^* = \frac{[(\hat{\theta}_{(j)}^* - \hat{\theta})]}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}}, \quad j = 1, 2, \dots, B.$$

محاسبه می‌کنیم و با در نظر گرفتن  $F_k(x) = P(T_k^* \leq x)$  به طوری که  $k=1, 2$ ،  $T_1^* = T_{\alpha^{(j)}}^*$  و  $T_2^* = T_{\theta^{(j)}}^*$  با تعریف  $\alpha_{BT}(x) = \hat{\alpha} + F_1^{-1}(x) \sqrt{Var(\hat{\alpha})}$  و  $\theta_{BT}(x) = \hat{\theta} + F_2^{-1}(x) \sqrt{Var(\hat{\theta})}$  معلوم، فواصل اطمینان  $\% (1-\gamma) (1-\gamma)$  تقریبی برای  $\alpha$  و  $\theta$  به ترتیب به صورت  $(\alpha_{BT}(\frac{\gamma}{\gamma}), \alpha_{BT}(1-\frac{\gamma}{\gamma}))$  و  $(\theta_{BT}(\frac{\gamma}{\gamma}), \theta_{BT}(1-\frac{\gamma}{\gamma}))$  یافته

می‌شوند. اکنون با استفاده از  $(\hat{S}_{(1)}^*, \hat{S}_{(2)}^*, \dots, \hat{S}_{(B)}^*)$  و  $(\hat{h}_{(1)}^*, \hat{h}_{(2)}^*, \dots, \hat{h}_{(B)}^*)$  آماره تی را به صورت

$$T_{S(j)}^* = \frac{[\sqrt{m}(\hat{S}_{(j)}^* - \hat{S}(t))]}{\sqrt{\text{Var}(\hat{S}(t))}}, \quad T_{h(j)}^* = \frac{[\sqrt{m}(\hat{h}_{(j)}^* - \hat{h}(t))]}{\sqrt{\text{Var}(\hat{h}(t))}}, \quad j = 1, 2, \dots, B$$

محاسبه کرده و با در نظر گرفتن  $G_k(x) = P(T_k^* \leq x)$  به طوری که  $k = 1, 2$  فواصل اطمینان  $BT$  تقریبی  $\gamma\%$   $(1 - \gamma)$  برای  $S(t)$  و  $h(t)$  به صورت  $(S_{BT}(\frac{\gamma}{2}), S_{BT}(1 - \frac{\gamma}{2}))$  و  $(h_{BT}(\frac{\gamma}{2}), h_{BT}(1 - \frac{\gamma}{2}))$  یافته می‌شوند، که در آن

$$S_{BT}(x) = \hat{S}(t) + G_1^{-1}(x) \sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{S}(t))}{m}}, \quad h_{BT}(x) = \hat{h}(t) + G_2^{-1}(x) \sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{h}(t))}{m}}.$$

## ۷ مثال عددی

حالتی را در نظر می‌گیریم که داده‌ها سانسور شده فزاینده نوع II تعمیمی باشند.  $60$  داده مشاهده گردیده و بقیه داده‌ها سانسور شده‌اند. دو مقدار متمایز  $T = 1/41$  و  $T = 3/33$  را در نظر گرفته و طرح سانسور را به صورت  $R = (20, 0.58, 20)$  مشخص می‌کنیم. با توجه به داده‌های **الصبحی و سالمیان (2016)** برای  $T = 1/40$ ،  $j = 8$  پس  $X_{m;m,n} > T$  برای  $T = 3/33$ ،  $j = 60$ ، یعنی  $X_{m;m,n} < T$ . برآوردهای  $ML$  کمیت‌های نامعلوم تحت داده‌های کامل ( $n = m = 100$ ) عبارتند از  $(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}) = (1/0.2514, 7/92322)$  و  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}) = (0.826088, 0.42742, 0.8239, 0.4134)$ . حال با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II تعمیمی ذکر شده در بالا برآوردهای  $BT$ ،  $PB$ ،  $ML$  و فواصل اطمینان 95 درصد مربوط محاسبه می‌شوند. برای برآوردهای بیزی فرض شده که هر دو پارامتر نامعلوم هستند. چون اطلاع پیشینی نداریم، از پیشین غیرآگاهی‌بخش برای هر دو پارامتر استفاده می‌کنیم ( $a = b = c = d = 0$ ). با استفاده از الگوریتم گفته شده در بخش قبل 1000 نمونه تولید کرده و برآوردهای بیزی تقریبی به دست می‌آیند. نتایج در جداول 1 و 2 آورده شده‌اند.

جدول 1: برآوردهای نقطه‌ای در  $t = 1/6$

$T = 3/33$				$T = 1/41$				
MCMC	BT	PB	ML	MCMC	BT	PB	ML	
1/100	1/194	1/213	1/157	1/578	1/705	1/712	1/624	$\alpha$
7/8561	7/9490	8/829	7/9485	7/7379	7/8029	8/0067	7/7796	$\theta$
0/8239	0/8321	0/8295	0/8295	0/8067	0/8131	0/8137	0/8105	$S(t)$
0/4202	0/4134	0/4178	0/4167	0/4757	0/4730	0/4730	0/4744	$h(t)$

## بحث و نتیجه‌گیری

طرح سانسور معرفی شده، به آزمایشگر اجازه می‌دهد تا بتواند تعداد سانسورهای بعدی را با توجه به تعداد سانسورها و زمان‌های شکست قبلی تعیین کند و اگر مدت آزمون از آستانه‌ی از پیش تعیین شده  $T$  تجاوز کرد آزمون را تسریع بخشد. مقایسه‌ی برآوردها از روی مقادیر جدول نشان می‌دهد اگر اطلاع پیشینی در دست نداشته باشیم عملکرد برآوردهای  $ML$  و بیز بسیار نزدیک‌اند.

جدول ۲: فواصل طمینان ۹۵ درصد در  $t = 1/6$

$T = 3/33$		$T = 1/41$			
طول	فاصله	طول	فاصله		
۰٫۱۹۵۱	(۰٫۹۱۸۱، ۱٫۱۱۳۲)	۰٫۲۰۸۸	(۰٫۹۵۸۰، ۱٫۱۶۶۸)	$\alpha$	ML
۳٫۴۹۸۲	(۶٫۱۴۹۴، ۹٫۶۴۶۷)	۳٫۵۴۵۷	(۶٫۰۰۶۷، ۹٫۵۵۲۴)	$\theta$	
۰٫۱۲۳۳	(۰٫۷۶۷۸، ۰٫۸۹۱۱)	۰٫۱۲۸۰	(۰٫۷۴۶۵، ۰٫۸۷۴۵)	$S(t)$	
۰٫۲۱۴۶	(۰٫۳۰۹۴، ۰٫۵۲۴)	۰٫۲۳۳۲	(۰٫۳۵۷۸، ۰٫۵۹۱)	$h(t)$	
۰٫۲۰۶۲	(۰٫۹۲۵۲، ۱٫۱۳۱۴)	۰٫۲۱۶۲	(۰٫۹۶۹۸، ۱٫۱۸۶۰)	$\alpha$	PB
۳٫۶۲۲۲	(۶٫۴۹۵۷، ۱۰٫۱۱۷۹)	۳٫۶۷۹۲	(۶٫۳۸۷۹، ۱۰٫۰۶۷۱)	$\theta$	
۰٫۱۱۹۰	(۰٫۷۷۲۰، ۰٫۸۹۱۰)	۰٫۱۲۳۲	(۰٫۷۴۹۵، ۰٫۸۷۲۶)	$S(t)$	
۰٫۲۱۶۸	(۰٫۳۱۰۲، ۰٫۵۲۷۰)	۰٫۲۴۳۹	(۰٫۳۶۵۲، ۰٫۶۰۹۱)	$h(t)$	
۰٫۲۰۶۳	(۰٫۹۱۳۹، ۱٫۱۲۰۲)	۰٫۲۰۴۶	(۰٫۹۶۵۳، ۱٫۱۶۹۹)	$\alpha$	BT
۳٫۶۲۷۴	(۶٫۰۳۰۸، ۹٫۶۵۸۲)	۳٫۶۹۲	(۵٫۷۷۱۴، ۹٫۴۶۳۵)	$\theta$	
۰٫۱۳۱۶	(۰٫۷۶۸۶، ۰٫۹۰۰۲)	۰٫۱۴۰۶	(۰٫۷۴۷۷، ۰٫۸۸۸۳)	$S(t)$	
۰٫۲۴۱	(۰٫۲۹۹۱، ۰٫۵۲۳۲)	۰٫۲۴۸۷	(۰٫۳۹۱، ۰٫۵۸۷۸)	$h(t)$	
۰٫۱۹۴۳	(۰٫۹۱۱۸، ۱٫۱۰۶۰)	۰٫۲۱۰	(۰٫۹۵۰۳، ۱٫۱۶۰۸)	$\alpha$	MCMC
۳٫۵۶۱۴	(۶٫۱۶۴۲، ۹٫۷۲۵۶)	۳٫۳۷۹	(۶٫۰۷۲۲، ۹٫۶۰۷۱)	$\theta$	
۰٫۱۲۷۷	(۰٫۷۵۴۹، ۰٫۸۸۲۵)	۰٫۱۲۷۸	(۰٫۷۳۸۲، ۰٫۸۶۵۹)	$S(t)$	
۰٫۲۰۳۰	(۰٫۳۲۰۰، ۰٫۵۲۳۰)	۰٫۲۲۶۱	(۰٫۳۶۷۳، ۰٫۵۹۳۴)	$h(t)$	

### مراجع

Al Sobhi M.M. and Soliman A.A. (2016), Estimation for the exponentiated weibull model with adaptive Type-II progressive censoring schemes. *Applied Mathematical Modelling* 40, 1180-1192.

Balakrishnan N. (2007), Progressive censoring methodology: an appraisal. *Test* 16, 211-296.

Chen M.-H. and Shao Q.-M. (1999), Monte Carlo estimation of bayesian credible and HPD intervals. *J. Comput. Graph. Stat.* 8, 69-92.

Devroye L. (1984), A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density function. *Computing* 33, 247-257.

Kim C. , Jung J. and Chung Y. (2011), Bayesian estimation for the exponentiated weibull model under Type II progressive censoring. *Stat. Pap.* 52, 53-70.

Ng H.K.T. , Kundu D. and Chan P.S. (2009), Statistical analysis of exponential lifetimes under an adaptive Type-II progressive censoring scheme. *Naval Res. Logist.* 56, 687-698.