سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

اطلاع کولبک- لایبلر توزیع تعادلی و کاربرد آن در آزمون نیکویی برازش

مهران صادق‌پور[۱]،آرزو حبیبی‌راد
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در سال‌های اخیر تعمیم آنتروپی و اطلاع کولبک-لایبلر بر اساس تابع توزیع تجمعی مورد توجه قرار گرفته است زیرا به خوبی می‌توان آن را بر اساس تابع توزیع تجمعی تعریف کرد. در این مقاله ابتدا اطلاع کولبک-لایبلر توزیع تعادلی را با کمک تابع توزیع تجربی تعریف (پارک و همکاران (۲۰۱۴)) و سپس آماره آزمون نیکویی برازش را بر مبنای تابع توزیع تجربی بیان می‌کنیم. در ادامه توان آماره آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی را در دو حالت داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده محاسبه نموده و با چند آماره معروف دیگر مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: اطلاع کولبک-لایبلر باقیمانده تجمعی، توزیع نمایی، آزمون نیکویی برازش، توزیع تعادلی، داده‌های سانسور شده
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N01، 62N03، 62N05.

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی اولین بار در علم فیزیک برای کمی سازی مفاهیمی چون عدم حتمیت و بی نظمی به کار برده شده و سپس از ین مفهوم برای اندازه‌گیری اطلاعات حاصل از مشاهدات متغیرهای تصادفی نیز استفاده نموده‌اند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F(x) و تابع چگالی پیوسته f(x) باشد. آنتروپی شانون به صورت

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx$$

تعریف می‌شود.

آنتروپی آماره‌های ترتیبی توسط محققین زیادی از جمله پارک (۱۹۹۵)، ابو-النین (۲۰۱۱) و مصیب و برزادران (۲۰۱۳) توسعه و بررسی شده‌اند.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع چگالی احتمال f(x) ، g(y) و توابع توزیع F(x) ، G(y) باشند، اطلاع

[۱] مهران صادق‌پور: sadeghpoor.mehran@stu.um.ac.ir

کولبک-لایبلر بین دو توزیع به صورت

$$KL(F_x, G_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx,$$

تعریف می‌شود که در آن g را توزیع مرجع می‌نامند. اطلاع کولبک-لایبلر نامنفی است و مساوی صفر است اگر و تنها اگر f(x)=g(x)، (کولبک (۱۹۵۹)).

گزاره ۱.۱. رائو و همکاران (۲۰۰۴) آنتروپی باقیمانده تجمعی (CRE) را به صورت زیر معرفی کردند

$$CRE(F) = -\int_{0}^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx.$$

همچنین براتپور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲) اطلاع کولبک-لایبلر باقیمانده تجمعی $(CRKL)$ را به شکل زیر پیشنهاد دادند.

$$CRKL(G:F) = \int_{0}^{\infty} \bar{G}(x) \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} dx + E(X) - E(Y),$$

که به خوبی روی تابع توزیع تجربی تعریف می‌شود.

در این مقاله توزیع مورد نظر، کلاسی از توزیع می‌باشند که به توزیع تعادلی معروف هستند. در این کلاس توابع چگالی احتمال آن به صورت $f^* = \bar{F}(x)/\int_{0}^{\infty} \bar{F}(x)dx$ تعریف می‌شوند. با در نظر گرفتن این کلاس از توزیع‌ها، آنتروپی و اطلاع کولبک-لایبلر آن به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$H(f^*) = -\int_{0}^{+\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\int_{0}^{\infty} \bar{F}(x)dx} \log \frac{\bar{F}(x)}{\int_{0}^{\infty} \bar{F}(x)dx} dx,$$

همچنین

$$KL(g^* : f^*) = \int_{0}^{\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\int_{0}^{\infty} \bar{G}(x)dx} \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} dx + \log \frac{\int_{0}^{\infty} \bar{F}(X)dx}{\int_{0}^{\infty} \bar{G}(x)dx},$$

که به خوبی روی تابع توزیع تجربی تعریف می‌شود. $KL(g^* : f^*)$ نامنفی است و در صورت وجود گشتاور اول مساوی صفر خواهد بود اگر و فقط اگر $F(x) = G(x)$.

در این مقاله ابتدا اطلاع کولبک-لایبلر را بر اساس توزیع تعادلی بازنویسی می‌کنیم، سپس با محاسبه برآورد آن به بررسی کاربرد آن در آزمون نیکویی برازش پرداخته و در پایان این مبحث را به داده‌های سانسور شده تعمیم می‌دهیم.

۲ اطلاع کولبک-لایبلر توزیع تعادلی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با توابع توزیع F و G باشند. آنگاه $E(X) = \int_{0}^{\infty} \bar{F}(x)dx$ و $E(Y) = \int_{0}^{\infty} \bar{G}(y)dy$. سپس اطلاع کولبک-لایبلر تابع چگالی تعادلی $f^*(x) = \bar{F}(x)/E(X)$ و $g^*(y) = \bar{G}(y)/E(Y)$ را می‌توان به صورت

$$KL(g^* : f^*) = \int_{0}^{\infty} \frac{\bar{G}(x)}{E(Y)} \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} dx + \log E(X) - \log E(Y)$$

بیان کرد. $KL(g^* : f^*)$ پایای مکانی و مقیاسی است و به خوبی روی تابع توزیع تجربی تعریف می‌شود. $KL(g^* : f^*)$ نامنفی است و مساوی صفر است اگر و تنها اگر $f^*(x) = g^*(x)$ اما $F(x) = G(x)$ را همواره نتیجه نمی‌دهد ولی در حالت خاص برای دو متغیر تصادفی نامنفی که گشتاورهای اول آن‌ها متناهی و مساویند، $KL(g^* : f^*)$ نامنفی است و مساوی صفر است اگر و فقط اگر $F(x) = G(x)$، (پارک و همکاران (۲۰۱۴))

۳ برآورد اطلاع کولبک-لایبلر و کاربرد آن در آزمون نیکویی برازش

در این بخش آزمون نیکویی برازش را بر اساس $KL(g^* : f^*)$ و با فرض $F(x) = F_\theta(x)$ و $G(x) = F_n(x)$ انجام می‌دهیم به طوری که θ پارامتر مجهول و F_n تابع توزیع تجربی است. در این صورت برآورد تابع چگالی تعادلی بر اساس تابع توزیع تجربی برابر $f_n^*(x) = \bar{F}_n(x)/\bar{x}$ است. لذا برآورد آنتروپی بر اساس تابع توزیع تجربی به صورت

$$H(f_n^*) = -\frac{۱}{\bar{x}} \sum_{i=۰}^{n} \frac{n-i}{n} \log \frac{n-i}{n} (x_{i+۱:n} - x_{i:n}) + \log \bar{x},$$

است و برآورد $KL(g^* : f^*)$ بر اساس اطلاعات نمونه به صورت زیر است:

$$KL(f_n^* : f_{\hat{\theta}}^*) = \int_{۰}^{\infty} \frac{\bar{F}_n(x)}{\bar{x}} \log \frac{\bar{F}_n(x)}{\bar{F}_\theta(x)} dx + (\log E_\theta(X) - \log \bar{x}).$$

آماره $KL(f_n^* : f_{\hat{\theta}}^*)$ می‌تواند به عنوان آماره آزمون نیکویی برازش در نظر گرفته شود. به طوری که در آن f_n^* برآوردگر تابع چگالی f^* است، لذا بنا به قضیه اسلاتسکی داریم:

$$KL(f_n^* : f_{\hat{\theta}}^*) \longrightarrow KL(f^* : f_{\hat{\theta}}^*) \qquad as\ n \longrightarrow \infty.$$

همچنین تحت فرضیه صفر، $f^* = f_{\hat{\theta}}^*$، $KL(f_n^* : f_{\hat{\theta}}^*)$ یک برآوردگر سازگار است. از آن‌جایی که در این بخش، هدف کاربرد اطلاع کولبک-لایبلر در آزمون نیکویی برازش می‌باشد، لذا آزمون نمایی بودن، $H_۰ : \ f_\theta(x) = \exp(-x/\theta)/\theta$، را با کمک این معیار به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} KL(f_n^* : f_{\hat{\theta}}^*) &= \frac{۱}{\bar{x}} \int_{۰}^{\infty} \bar{F}_n(x) \log \bar{F}_n(x) dx + \frac{۱}{\bar{x}} \int_{۰}^{\infty} \frac{x\bar{F}_n(x)}{\bar{x}} dx \\ &= \frac{۱}{\bar{x}} \sum_{i=۰}^{n} \frac{n-i}{n} \log \frac{n-i}{n} (x_{i+۱:n} - x_{i:n}) + \frac{۱}{\bar{x}^۲} \sum_{i=۰}^{n} \frac{n-i}{n} \int_{x_{i:n}}^{x_{i+۱:n}} x dx. \end{aligned}$$

در این صورت آماره آزمون به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$T = \frac{۱}{\bar{x}} \sum_{i=۰}^{n} \frac{n-i}{n} \log \frac{n-i}{n} (x_{i+۱:n} - x_{i:n}) + \frac{۱}{۲n\bar{x}^۲} \sum_{i=۰}^{n} x_i^۲.$$

همچنین براتپور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲) آماره آزمون نیکویی برازش را برای آزمون فرضیه نمایی بودن بر اساس اطلاع کولبک-لایبلر باقیمانده تجمعی به صورت زیر پیشنهاد دادند:

$$T' = \frac{۱}{\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}{۲\sum_{i=۱}^{n} x_i}} \left(\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}{۲\sum_{i=۱}^{n} x_i} - CRE(F_n) \right)$$

در ادامه توان آزمون‌های T و T' را برای چند توزیع به عنوان فرضیه های جانشین به ازای $\alpha = ۰/۰۵$ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ۵۰۰۰۰ نمونه به حجم $n = ۱۰(۵)۲۰$ از توزیع نمایی با پارامتر $\theta = ۱$ تولید کرده و توان آزمون را محاسبه می‌کنیم، نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج جدول نشان می‌دهد توان آزمون T برای فرضیه‌های مقابل با تابع نرخ خطر به طور یکنواخت نزولی، در تمامی توزیع‌ها به طور معنی داری بیشتر از T' می‌باشد. اما اگر فرضیه مقابل دارای تابع نرخ خطر صعودی باشد به عکس T' بهتر از T عمل می‌کند و برای تابع نرخ خطر با فرضیه مقابل غیر یکنواخت نمی‌توان نتیجه قطعی گرفت.

۴ تعمیم بر اساس داده‌های سانسور شده

در این قسمت آماره آزمون T را بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دوم تعمیم می‌دهیم. به این منظور تابع چگالی تعادلی را برای متغیر سانسور شده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f_c^*(x) = \begin{cases} \frac{\bar{F}(x)}{\int_۰^c \bar{F}(x)dx} & if \quad x \leq c\,; \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

پس اطلاع کولبک-لایبلر توابع چگالی تعادلی $f_c^*(x)$ و $g_c^*(x)$ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$T_c(g_c^* : f_c^*) = KL_c(g_c^* : f_c^*) = \int_۰^c \frac{\bar{G}(x)}{\int_۰^c \bar{G}(x)} \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} dx + \log \int_۰^c \bar{F}(x)dx - \log \int_۰^c \bar{G}(x)dx.$$

$T_c(g_c^* : f_c^*)$ پایای مکانی و مقیاسی است و به خوبی روی تابع توزیع تجربی تعریف می‌شود. همچنین $T_c(g_c^* : f_c^*)$ نامنفی است و تحت شرط $\int_۰^c \bar{F}(x)dx = \int_۰^c \bar{G}(x)dx$ مساوی صفر است اگر و فقط اگر $F(x) = G(x)$، پارک و همکاران (۲۰۱۴).

می‌دانیم $f_{c,n}^*(x)$ و $f_{c,\theta}^*(x)$ به ترتیب به صورت $\bar{F}_n(x)/\int_۰^c \bar{F}_n(x)dx$ و $\bar{F}_\theta(x)/\int_۰^c \bar{F}_\theta(x)dx$ در نظر گرفته می‌شوند. سپس آماره آزمون نیکویی برازش با فرض $H_۰ : \ f_\theta(x) = exp(-x/\theta)/\theta$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_c(g_{c,n}^* : f_{c,\hat{\theta}}^*) = \frac{۱}{\int_۰^c \bar{F}_n(x)dx} \int_۰^c \bar{F}_n(x) \log \bar{F}_n(x)dx + \frac{۱}{\hat{\theta} \int_۰^c \bar{F}_n(x)dx} \int_۰^c x\bar{F}_n(x)dx,$$

که در آن $\hat{\theta}$ طوری انتخاب شده است که $\int_۰^c \bar{F}_{\hat{\theta}}(x)dx = \int_۰^c \bar{F}_n(x)dx$.

اگر $r - ۱$ مشاهده کمتر یا مساوی از C داشته باشیم به طوری که $x_{r-۱:n} \leq C \leq x_{r:n}$، آنگاه برآورد $T_c(g_c^* : f_c^*)$ بر اساس اطلاعات نمونه برابر

$$\begin{aligned} T_c(f_{c,n}^* : f_{c,\hat{\theta}}^*) &= \frac{۱}{\sum_{i=۰}^{r-۱} \frac{n-i}{n}(x_{i+۱:n} - x_{i:n})} \sum_{i=۰}^{r-۱} \frac{n-i}{n} \log \frac{n-i}{n}(x_{i+۱:n} - x_{i:n}) \\ &+ \frac{۱}{\hat{\theta} \sum_{i=۰}^{r-۱} \frac{n-i}{n}(x_{i+۱:n} - x_{i:n})} \sum_{i=۰}^{r-۱} \frac{n-i}{۲n}(x_{i+۱:n}^۲ - x_{i:n}^۲) \end{aligned}$$

می‌باشد.، که در آن $x_{i:n}$، iامین مقدار مشاهده مرتب شده از n مشاهده می‌باشد و $x_{r:n} = C$ است.

آماره‌های زیادی برای فرض نمایی بودن توزیع وجود دارد ولی تعداد کمی از آنها را می‌توان به داده‌های سانسور شده تعمیم داد، که از جمله آن‌ها آزمون شاپیرو-ویلک(W)، که توسط سامانتا و اسکوارز (۱۹۸۸) و آماره آزمون (T_p)توسط پارک (۲۰۰۵) معرفی شده است که در ادامه آنها را معرفی کرده و سپس توان آزمون این آماره‌ها را با آماره آزمون پیشنهادی T_c مقایسه می‌کنیم. این آماره‌ها

عبارتند از:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{r} y_i)^2}{r\sum_{i=2}^{r+1}\sum_{j=2}^{r+1}((min(i,j)-1)/(r-min(i,j)+2))y_{i-1}y_{j-1}},$$

به طوری که $y_i = (n-i+1)(x_{(i)} - x_{(i-1)})$. همچنین

$$T_p = \frac{r}{n}(\log\hat{\theta}_{mle}+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\log\left\{\frac{n}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\} + (1-\frac{r}{n})\log(1-\frac{r}{n}).$$

برای محاسبه توان آزمون با استفاده از شبیه سازی مونت-کارلو با ۵۰۰۰۰ تکرار برای نمونه‌هایی به حجم ۱۰ و ۲۰ توان آزمون‌های پیشنهادی را برای توزیع نمایی $E(1)$ سانسور شده نوع دو محاسبه کرده که نتایج در جداول ۲ و ۳ خلاصه شده‌اند.

ملاحظه می‌شود در صورتی که توزیع فرض مقابل دارای تابع نرخ خطر صعودی باشد T_c و T_p به طور معنی‌داری عملکرد بهتری از W دارند و اگر تعداد سانسور بیشتری رخ دهد، $(r/n \leq 0/4)$ ، T_c بهتر از T_p عمل می‌کند و به عکس اگر درصد کمتری از داده‌ها سانسور شوند، T_p بهتر از T_c عمل می‌کند. اما اگر فرض مقابل دارای تابع نرخ خطر نزولی باشد هیچ کدام از آماره‌های T_c، T_p و W توان قابل قبولی ارائه نمی‌دهند، لذا این آماره‌ها در این حالت پیشنهاد نمی‌شوند. اما در حالتی که تابع نرخ خطر فرض مقابل غیر یکنواخت باشد آماره‌های T_c و T_p از W عملکرد بهتری دارند.

۵ جدول

جدول ۱: توان آزمون نمایی بودن در سطح خطای ۵ درصد برای آماره های T و T' با فرضیه‌های مقابل مختلف

Hazard function	حجم نمونه	$n=10$		$n=15$		$n=20$	
	فرضیه جانشین	T	T'	T	T'	T	T'
monotone increasing	Gamma(۲)	۰/۱۲۷	۰/۲۷۲	۰/۱۶۷	۰/۳۳۵	۰/۲۲۸	۰/۳۹۴
	Weibull(۲)	۰/۴۲۳	۰/۶۵۲	۰/۵۹۶	۰/۸۲۵	۰/۷۶۳	۰/۹۱۲
	beta(۲،۱))	۰/۹۶۱	۰/۹۹۲	۰/۹۹۴	۰/۹۹۶	۰/۹۹۷	۰/۹۹۹
	Unif(۰،۱)	۰/۴۳۳	۰/۵۸۳	۰/۶۴۷	۰/۸۲۰	۰/۸۳۴	۰/۹۳۰
monotone decreasing	Gamma(۰.۵)	۰/۲۲۴	۰/۰۳۵	۰/۲۸۰	۰/۰۹۰	۰/۳۳۹	۰/۱۴۲
	Weibull(۰.۵)	۰/۵۲۶	۰/۱۶۹	۰/۶۶۹	۰/۳۷۳	۰/۷۸۳	۰/۵۵۵
	log normal (۱.۵)	۰/۳۸۴	۰/۱۳۵	۰/۵۲۰	۰/۳۰۴	۰/۶۲۵	۰/۴۵۰
non-monotone	beta(۰.۵،۰.۵)	۰/۳۴۸	۰/۴۲۰	۰/۵۸۶	۰/۶۱۲	۰/۷۵۸	۰/۸۰۲
	log normal (۱)	۰/۱۱۳	۰/۰۷۶	۰/۱۵۱	۰/۱۰۰	۰/۱۹۳	۰/۱۳۱

جدول ۲: توان آزمون نمایی بودن در سطح خطای ۵ درصد برای فرضیه‌های مقابل بر اساس سانسور نوع دو با $n = ۱۰$

Hazard function	point Censoring	$r = ۴$			$r = ۸$		
	Alternatives	T_c	T_p	W	T_c	T_p	W
monotone increasing	Gamma(۲)	۰/۱۵۶	۰/۱۶۲	۰/۰۸۸	۰/۲۲۹	۰/۲۶۷	۰/۱۳۷
	Weibull(۲)	۰/۲۳۷	۰/۲۳۰	۰/۱۲۱	۰/۴۹۵	۰/۵۱۹	۰/۲۷۳
	Beta(۲،۱)	۰/۳۰۹	۰/۳۰۶	۰/۱۶۷	۰/۸۴۲	۰/۸۱۹	۰/۶۳۹
	Unif(۰،۱)	۰/۰۷۷	۰/۰۷۴	۰/۰۸۶	۰/۲۵۴	۰/۱۹۸	۰/۲۹۶
monotone decreasing	Gamma(۰/۸)	۰/۰۳۲	۰/۰۳۰	۰/۰۳۸	۰/۰۲۹	۰/۰۲۶	۰/۰۳۱
	Weibull(۰/۸)	۰/۰۲۸	۰/۰۲۹	۰/۰۳۸	۰/۰۱۹	۰/۰۱۴	۰/۰۱۲
	log normal (۱/۵)	۰/۰۵۴	۰/۰۴۷	۰/۰۳۴	۰/۰۱۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱۱
non-monotone	Beta(۰/۵،۰/۵)	۰/۴۹۵	۰/۵۲۶	۰/۱۰۸	۰/۶۷۸	۰/۸۶۷	۰/۱۸۷
	log normal (۱)	۰/۱۲۸	۰/۱۲۷	۰/۰۶۱	۰/۰۹۴	۰/۱۴۶	۰/۰۴۱

جدول ۳: توان آزمون‌های نمایی بودن در سطح خطای ۵ درصد برای فرضیه‌های مقابل بر اساس سانسور نوع دو با $n = ۲۰$

Hazard function	point Censoring	$r = ۵$			$r = ۱۰$			$r = ۱۵$		
	Alternatives	T_c	T_p	W	T_c	T_p	W	T_c	T_p	W
monotone increasing	Gamma(۲)	۰/۲۱۵	۰/۱۹۸	۰/۱۰۶	۰/۳۳۲	۰/۳۵۷	۰/۱۸۷	۰/۴۰۰	۰/۴۳۵	۰/۲۵۴
	Weibull(۲)	۰/۲۹۹	۰/۲۸۸	۰/۱۴۶	۰/۵۷۹	۰/۵۸۶	۰/۳۰۷	۰/۷۸۱	۰/۸۱۳	۰/۵۳۰
	Beta(۲،۱)	۰/۳۴۴	۰/۳۳۲	۰/۱۷۶	۰/۸۱۲	۰/۷۳۷	۰/۴۸۷	۰/۹۴۷	۰/۹۷۱	۰/۸۸۵
	Unif(۰،۱)	۰/۰۷۲	۰/۰۶۵	۰/۰۷۱	۰/۱۳۲	۰/۱۱۸	۰/۱۴۶	۰/۳۶۳	۰/۲۸۳	۰/۳۸۶
monotone decreasing	Gamma(۰/۸)	۰/۰۲۹	۰/۰۲۶	۰/۰۳۵	۰/۰۲۲	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۱۹	۰/۰۲۰	۰/۰۲۴
	Weibull(۰/۸)	۰/۰۲۴	۰/۰۲۶	۰/۰۳۱	۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۹	۰/۰۱۲	۰/۰۲۱	۰/۰۱۳
	log normal (۱/۵)	۰/۰۷۱	۰/۰۶۵	۰/۰۴۴	۰/۰۳۵	۰/۰۴۸	۰/۰۲۴	۰/۰۰۷	۰/۰۶۱	۰/۰۰۶
non-monotone	Beta(۰/۵،۰/۵)	۰/۳۴۴	۰/۳۳۲	۰/۱۷۶	۰/۸۱۲	۰/۷۳۷	۰/۴۸۷	۰/۹۴۷	۰/۹۷۱	۰/۸۸۵
	log normal (۱)	۰/۱۹۳	۰/۲۱۳	۰/۱۳۷	۰/۱۸۱	۰/۲۵۹	۰/۱۴۴	۰/۰۹۶	۰/۱۹۸	۰/۱۱۲

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله اطلاع کولبک-لایبلر بر اساس تابع چگالی تعادلی معرفی گردید که این معیار ویژگی نامنفی بودن و خاصیت مشخصه سازی را با شرط وجود گشتاور اول دارا می‌باشد. سپس موضوع بحث را به داده‌های سانسور شده تعمیم دادیم. در ادامه، توان آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای اطلاع کولبک-لایبلر تعادلی برای داده‌های کامل و سانسور شده با سایر آزمون‌های معروف مقایسه و

نتایج در جداول ۱ تا ۳ آورده شده است.

مراجع

Abo-Eleneen Z.A. (2011), The entropy of progressively censored samples, *Entropy,*13, 437 - 449.

Andrews F.C. and Andrews A.H. (1962),The form of the equilibrium distribution function, Trans actions of the Kansas Academy of Science.65, 247–256.

Baratpour, S. and Habibi Rad, A. (2012), Testing goodness-of-fit for exponential distribution based on cumulative residual entropy,*Communications in Statistics-Theory and Methods*.41, 1387–1396.

Bowman A.W. (1992), Density based tests for goodness-of-fit. *Journal of Statistical Computation and Simulation,* 40, 1–13.

Ebrahimi N. and Habibullah M. (1992),exponentiality based on Kullback- Leibler information. *Journal of the Royal Statistical Society.*54, 739–748.

Kullback S. (1959), Information theory and statistics. *Wiley New York.*

Mosayeb A., Borzadaran, M.G.R. (2013). Kullback-Leibler information in view of an extended version extended of k-records . *Communications for Statistical.*20, 1-13.

Nakamura T. K. (2009),Relativistic equilibrium distribution by relative entropy maximization. (2009). *Europhysics letters.* 88, 40009.

Park S., Jung, CH., Jung S (2014). Kullback-Leibler information of the equilibrium distribution function and its application to goodness of fit test . *Communications for Statistical Applications and Methods.*DOI: http://dx.doi.org/10.5351/CSAM.2014.21.2.125 ISSN 2287-7843.

Park S. (1995). The entropy of consecutive order statistics . *IEEE Transactions on Information Theory.*41, 2003–2007.

Park S. (2005).Testing exponentiality based on Kullback-Leibler information with the type II cnesored data. *IEEE Transactions on Reliability.*54, 22–26.

Park S., Park D. (2003). Correcting moments for goodness of fit tests based on two entropy estimates. *Journal of Statistical Computation and Simulation.*73, 685–694.

Park S. (2005).Testing exponentiality based on Kullback-Leibler information with the type II cnesored data. *IEEE Transactions on Reliability.*54, 22–26.

Rao M., ChenY., Vemuri B. C. and Wang F. (2004).Cumulative residual entropy. *IEEE Transactions on Information Theory.*50, 1220–1228.

Samanta, M,. and Schwarz, C. J. (1988). The Shapiro-Wilk test for exponentiality based on censored data. *Journal of the American Statistical Association.*83, 528–531.