سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

# برآورد بیز نقطه‌ای فازی براساس تابع پیش‌بینی فازی

ملیحه عابدینی[۱] و محسن عارفی

**چکیده:** در این مقاله، ابتدا دیدگاه فیتل (۲۰۰۸) در مبحث استنباط بیزی در محیط فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این دیدگاه به محاسبه تابع پسین براساس تابع پیشین فازی و داده‌های فازی پرداخته است. در ادامه، یک دیدگاه جدید برای برآورد بیز نقطه‌ای فازی براساس تابع پیش‌بینی فازی بیان شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** برآورد نقطه‌ای فازی، تابع درستنمایی فازی، توزیع پسین فازی، توزیع پیش‌بینی فازی.

**کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** 62F15، 03E72، 62F10.

## ۱ مقدمه

استنباط بیزی برای مدل‌های آماری پارامتری بر پایه دو اصل زیر استوار است:

۱- متغیر $X$ با مدل آماری $f(x|\theta)$ و پارامتر $\theta$ با توزیع پیشین $\pi(\theta)$ ماهیتی تصادفی دارند.

۲- داده‌های مرتبط با متغیر تصادفی $X$ دقیق گزارش می‌شوند.

اصول فوق، اصول مهمی در نگرش بیز کلاسیک می‌باشند. اما، در برخی موارد، رفتار متغیرها، پارامترهای مورد نظر و یا داده‌های موجود به‌گونه‌ای است که اصول فوق برقرار نیستند و باید از روش‌های دیگری برای مدل‌سازی و تحلیل مدل‌ها استفاده نمود.

در این راستا، در این مقاله، نگرش فیتل (۲۰۰۸) برای استنباط بیزی تحت داده‌های فازی و پارامتر پیشین فازی معرفی و بررسی می‌شود. در این نگرش، ابتدا بر پایه تعریف اصل گسترش روی داده‌های فازی، تابع درستنمایی فازی محاسبه و آن‌گاه، براساس $\alpha$-برش توزیع پیشین فازی، $\alpha$-برش‌های توزیع پسین فازی معرفی می‌گردند. در ادامه، بر اساس $\alpha$-برش‌های تابع پسین، $\alpha$-برش‌های برآورد بیز فازی محاسبه می‌گردند.

استنباط بیزی در محیط فازی توسط برخی نویسندگان بررسی شده است. در این‌جا، به‌طور مختصر، به تعدادی از این تحقیقات اشاره می‌کنیم. برآورد بیزی برای حالتی‌که داده‌های موجود فازی باشند، توسط گیل و همکاران (۱۹۸۵) تعمیم یافته است. شناتر (۱۹۹۳) به بررسی استنباط بیزی در حالت‌های مختلفی که داده‌ها دقیق یا فازی و پارامتر مورد نظر نیز دقیق یا فازی باشند، پرداخته است. یک دیدگاه متفاوت در بحث استنباط بیز امکانی توسط لاپوینت و بوبی (۲۰۰۰) تحت تابع پسین امکانی مورد بررسی قرار گرفته است.

[۱] ملیحه عابدینی: ghasedak۱@yahoo.comm

تعمیمی از روش لاپوینت و بوبی زمانی که داده‌ها فازی باشند توسط عارفی و طاهری (۲۰۱۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. یک دیدگاه بیزی براساس تابع چگالی احتمالی و توزیع پیشین امکانی تحت داده‌های فازی توسط عارفی و طاهری (۱۳۸۷) مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. همچنین طاهری و بهبودیان (۲۰۰۶) آزمون فرضیه‌های فازی تحت نگرش بیزی را در دو حالتی که داده‌ها دقیق یا فازی باشند، تعمیم داده‌اند.

این مقاله شامل ۵ بخش است. در بخش ۲، مفاهیم ضروری مورد استفاده در مقاله مرور می‌گردند. سپس در بخش ۳، به محاسبه توزیع پسین براساس دیدگاه فیتل (۲۰۰۸) پرداخته شده است. در بخش ۴، براساس تابع پسین محاسبه شده، به محاسبه برآوردگر بیز فازی پرداخته می‌شود. در بخش ۵، روش بدست آورده شده برای برآوردگر بیز، بوسیله یک مثال عددی بررسی و تشریح گردیده است.

## ۲ مفاهیم اولیه

### ۱.۲ معرفی اعداد نادقیق

در این بخش، برخی مفاهیم ضروری در مورد اعداد نادقیق و قضیه بیز مورد بررسی قرار گرفته است ( برای بررسی بیشتر به طاهری (۱۳۷۵)، طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷) و برگر (۱۹۸۵) مراجعه شود.)

**تعریف ۱.۲.** *فرض کنید $X$ یک مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی $N$، یک تابع به‌صورت $N : X \to [0, 1]$ است، که برای هر $0 < \alpha \leq 1$، $\alpha$- برش (سطح تراز) $N$ آن به‌صورت $N_\alpha = \{x : N(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود.*

**تعریف ۲.۲.** *مجموعه فازی $N$ از $R$ (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی گوییم، اگر*

۱. *$N$ نرمال و تک نمایی باشد، یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$،*

۲. *$\alpha$-برش‌های $N$، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، به‌صورت بازه‌های بسته و کراندار باشند.*

**تعریف ۳.۲.** *مجموعه فازی $A$ را یک عدد فازی مثلثی گویند، اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر باشد:*

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{a} & m - a \leq x < m, \\ 1 + \frac{m-x}{b} & m \leq x < m + b, \end{cases}$$

*که در آن $m$ مقدار میانه، $a$ و $b$ به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $A$ می‌باشند. یک عدد مثلثی را به‌صورت $A = (m, a, b)_T$ نشان می‌دهند.*

**تعریف ۴.۲.** *بردار فازی $n$ بعدی، یک زیر مجموعه فازی از فضای اقلیدسی $n$-بعدی $R^n$ می‌باشد که تابع عضویت آن یعنی $\mu(., \ldots, .)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:*

*۱.به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $\alpha$-برش*

$$C(\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \mu_{\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\},$$

*یک اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های فشرده $R^n$ باشد.*

*۲. $C(\boldsymbol{x}^*)_1 \neq \emptyset$.*

*تابع $\mu(., \ldots, .)$ که در شرایط ۱ و۲ صدق می‌کند تابع بردار مشخصه نامیده می‌شود.*

### ۲.۲ احتمال پسین

کمیت تصادفی $X$ را از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta),\ \ \theta\in\Theta$ در نظر بگیرید. در استنباط بیزی پارامتر $\theta$ نیز کمیتی تصادفی بوده، که دارای تابع چگالی احتمال پیشین به‌صورت $\pi(\theta)$ می‌باشد. به‌شرط مشاهده نمونه $\boldsymbol{x}=(x_۱,...x_n)$، تابع چگالی احتمال پسین با استفاده از قضیه بیز به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(\theta|x_۱,...,x_n)=\frac{\pi(\theta)\prod_{i=۱}^{n}f(x_i|\theta)}{\int_\Theta\pi(\theta)\pi_{i=۱}^{n}f(x_i|\theta)d\theta},\qquad\forall\theta\in\Theta.$$

### ۳.۲ پیش‌بینی توزیع

فرض کنید $X\sim f(.|\theta),\theta\in\Theta$ یک مدل تصادفی پیوسته باشد. در استنباط بیزی استاندارد، چگالی پیش‌بینی $f(.|x_۱,...,x_n)$، تحت تابع چگالی $f(x|\theta)$ و تابع چگالی پسین $\pi(.|x_۱,...,x_n)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x|x_۱,...,x_n)=\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta|x_۱,...,x_n)d\theta.$$

## ۳ تابع پیش‌بینی فازی براساس تابع پیشین فازی و تحت داده‌های فازی

فرض کنید یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی $f(x|\theta)$ انتخاب و مشاهدات به‌صورت داده‌های فازی در دسترس باشند. باید تابع درستنمایی را تحت داده‌های فازی $x_۱^*,...,x_n^*$ تعمیم دهیم. اساس این کار، ترکیب نمونه فازی $\boldsymbol{x}^*$ با تابع بردار مشخصه آن یعنی $\mu_{\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{x})$ می‌باشد. تابع درستنمایی تعمیم یافته $L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)$ یک تابع فازی مقدار می‌باشد که به هر $\theta\in\Theta$، عدد فازی $L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)$ را نسبت می‌دهد که تابع مشخصه آن به‌وسیله اصل گسترش بدست می‌آید. تابع مشخصه $\psi_{L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)}(.)$ از $L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi_{L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)}(y)=\sup_{L(\theta|\boldsymbol{x})=y}\mu(\boldsymbol{x}),\qquad\forall y\in R,$$

که $\alpha$-برش‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$C[\psi_{L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)}(.)]_\alpha=[\underline{L}_\alpha(\theta|\boldsymbol{x}^*);\overline{L}_\alpha(\theta|\boldsymbol{x}^*)].$$

اکنون فرض کنید تابع چگالی پیشین فازی $\pi^*(\theta)$ با $\alpha$ -برش‌های

$$\pi^*(\theta)_\alpha=[\underline{\pi}_\alpha(\theta),\overline{\pi}_\alpha(\theta)]$$

در دسترس باشد. آنگاه، $\alpha$-برش‌های تابع پسین فازی بر اساس تابع چگالی پیشین فازی و تحت داده‌های فازی به‌صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha=[\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha,\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha],$$

که در آن داریم:

$$\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha=\frac{\underline{\pi}(\theta)_\alpha\underline{L}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_{\boldsymbol{\alpha}}}{m(\boldsymbol{x}^*)}\ ,\ \ \forall\alpha\in(۰,۱],$$

$$\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \frac{\overline{\pi}(\theta)_\alpha \overline{L}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha}{m(\boldsymbol{x}^*)}\ ,\ \ \forall\alpha \in (0, 1],$$

که در آن

$$m(\boldsymbol{x}^*) = \int_\Theta \frac{1}{2}[\overline{\pi}_\alpha(\theta)\overline{L}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha + \underline{\pi}(\theta)_\alpha \underline{L}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha]d\theta.$$

حال اگر تابع چگالی پسین فازی مقدار $\pi(\theta|\boldsymbol{x}^*)$ را داشته باشیم، آن‌گاه تابع چگالی پیش‌بینی یک تابع چگالی احتمال فازی مقدار به‌صورت $f(.|\boldsymbol{x}^*)$ است که مقادیر آن به‌وسیله تعمیم انتگرال توابع فازی، به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = [\underline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha, \overline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha].$$

که در آن

$$\underline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \int_\Theta f(x|\theta)\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha d\theta,$$

$$\overline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \int_\Theta f(x|\theta)\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha d\theta.$$

## ۴ برآورد بیز فازی

در این بخش، می‌خواهیم براساس تابع پیش‌بینی فازی معرفی شده در بخش قبل، برآورد بیز فازی را محاسبه نماییم. این نگرش براساس $\alpha$-برش‌های تابع پیش‌بینی، $\alpha$-برش‌های برآورد بیزی را ارائه می‌نماید.

**تعریف ۱.۴.** *فرض کنید تابع چگالی پسین فازی $\pi(\theta|\boldsymbol{x}^*)$ و تابع چگالی پیش‌بینی $f(x|\boldsymbol{x}^*)$ موجود باشد، در این‌صورت $\alpha$-برش برآورد بیز فازی را براساس مشاهده $x_{n+1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\begin{aligned}\underline{E}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}\underline{f}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*)_\alpha dx_{n+1}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}\int_\Theta f(x_{n+1}|\theta)\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha d\theta dx_{n+1}\\ &= \int_\Theta\int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}f(x_{n+1}|\theta)\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha dx_{n+1}d\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{E}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}\overline{f}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*)_\alpha dx_{n+1}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}\int_\Theta f(x_{n+1}|\theta)\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha d\theta dx_{n+1}\\ &= \int_\Theta\int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+1}f(x_{n+1}|\theta)\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha dx_{n+1}d\theta.\end{aligned}$$

## ۵ مثال عددی

فرض کنید یک نمونه تصادفی ۴۰ تایی از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ استخراج و مشاهدات به‌صورت داده‌های فازی مثلثی جدول ۱ در دسترس باشند. تابع درستنمایی به‌صورت زیر است:

$$L(\theta|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=۱}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=۱}^{n} x_i} = \theta^n e^{-\theta t}$$

که $t = \sum_{i=۱}^{n} x_i$. براساس داده‌های فازی موجود در جدول ۱، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} X_i^* = (\sum_{i=۱}^{n} m_i, \sum_{i=۱}^{n} a_i, \sum_{i=۱}^{n} b_i)_T = (۲۹۷۷, ۳۵٫۶, ۷۷٫۴)_T,$$

که تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t-۲۹۴۱٫۴}{۳۵٫۶} & ۲۹۴۱٫۴ < t \leq ۲۹۷۷, \\ \frac{۳۰۵۴٫۴-t}{۷۷٫۴} & ۲۹۷۷ < t \leq ۳۰۵۴٫۴. \end{cases}$$

بنابراین، تابع عضویت تابع درستنمایی برای مشاهدات فازی به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \psi_{L^*(\theta|\boldsymbol{x}^*)}(y) &= \sup_{y=\theta^n e^{-\theta t}} \mu(t) \\ &= \sup_{t=-\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n}} \mu(t) \\ &= \mu(-\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n}) \\ &= \begin{cases} \frac{-\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n}-۲۹۴۱٫۴}{۳۵٫۶} & ۲۹۴۱٫۴ < -\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n} \leq ۲۹۷۷, \\ \frac{۳۰۵۴٫۴+\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n}}{۷۷٫۴} & ۲۹۷۷ < -\frac{۱}{\theta}\ln\frac{y}{\theta^n} \leq ۳۰۵۴٫۴. \end{cases} \end{aligned}$$

لذا $\alpha$ -برش‌های تابع درستنمایی به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\psi_\alpha = [\theta^{۴۰} e^{-\theta(۲۹۷۷+۷۷٫۴(۱-\alpha))}, \theta^{۴۰} e^{-\theta(۲۹۷۷-۳۵٫۶(۱-\alpha))}].$$

اکنون فرض کنید $\theta$ دارای تابع پیشین نمایی با تابع چگالی احتمال $f(\theta|\lambda) = \lambda e^{-\lambda\theta}$ با پارامتر نادقیق باشد. ابهام موجود در پارامتر را به‌وسیله یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\lambda^* = (۲, ۱٫۳, ۱٫۸)_T$ نشان می‌دهیم. براساس $\alpha$- برش‌های $\lambda^*$، $\alpha$- برش‌های توزیع پیشین به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\pi^*(\theta)_\alpha = [\underline{\pi}(\theta)_\alpha, \overline{\pi}(\theta)_\alpha],$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \underline{\pi}(\theta)_\alpha &= \lambda_{\min} e^{-\lambda_{\min}\theta} \\ &= \begin{cases} (۱٫۳\alpha + ۰٫۷)e^{-\theta(۱٫۳\alpha+۰٫۷)} & \theta \leq d_۲, \\ (۳٫۸ - ۱٫۸\alpha)e^{-\theta(۳٫۸-۱٫۸\alpha)} & \theta > d_۲, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\pi}(\theta)_\alpha &= \lambda_{\max} e^{-\lambda_{\max}\theta} \\ &= \begin{cases} (۳٫۸ - ۱٫۸\alpha)e^{-\theta(۳٫۸-۱٫۸\alpha)} & \theta \leq d_۱, \\ \frac{۱}{\theta}e^{-\frac{۱}{\theta}(\theta)} & d_۱ < \theta \leq d_۳, \\ (۱٫۳\alpha + ۰٫۷)e^{-\theta(۱٫۳\alpha+۰٫۷)} & d_۳ < \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین $\alpha$-برش‌های تابع چگالی پسین به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\underline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \begin{cases} \frac{(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A} & \theta \leq d_2, \\ \frac{(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A} & \theta > d_2, \end{cases}$$

$$\overline{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \begin{cases} \frac{(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & \theta \leq d_1, \\ \frac{\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(\theta)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & d_1 < \theta \leq d_3, \\ \frac{(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & d_3 < \theta. \end{cases}$$

و $\alpha$-برش‌های تابع پیش‌بینی فازی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\underline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \begin{cases} \frac{\int_\Theta \theta e^{-\theta x}(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A} & \theta \leq d_2, \\ \frac{\int_\Theta \theta e^{-\theta x}(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A} & d_2 > \theta, \end{cases}$$

$$\overline{f}(x|\boldsymbol{x}^*)_\alpha = \begin{cases} \frac{\int_\Theta \theta e^{-\theta x}(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & \theta \leq d_1, \\ \frac{\int_\Theta \theta e^{-\theta x}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(\theta)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & d_1 < \theta \leq d_3, \\ \frac{\int_\Theta \theta e^{-\theta x}(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A} & \theta > d_3. \end{cases}$$

بنابراین برآورد بیز فازی براساس مشاهده $x_{n+1}$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \underline{E}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*) &= \int_0^{d_2} \frac{1}{\theta}\frac{(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A}d\theta \\ &= \int_{d_2}^{\infty} \frac{1}{\theta}\frac{(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}}{A}d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{E}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}^*) &= \int_0^{d_1} \frac{1}{\theta}\frac{(3.8-1.8\alpha)e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A}d\theta \\ &= \int_{d_1}^{d_3} \frac{1}{\theta}\frac{\frac{1}{\theta}e^{-1}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A}d\theta \\ &= \int_{d_3}^{\infty} \frac{1}{\theta}\frac{(1.3\alpha+0.7)e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)}\theta^{40}e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))}}{A}d\theta, \end{aligned}$$

که در آن‌ها داریم:

$$d_1 = \frac{1}{3.8-1.8\alpha},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{3.8-1.8\alpha}{0.7+1.3\alpha}\right)}{3.1-3.1\alpha},$$

$$d_3 = \frac{1}{0.7+1.3\alpha},$$

$$
\begin{aligned}
2A = &\int_{0}^{d_1} (3.8 - 1.8\alpha) e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)} \theta^{40} e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))} d\theta \\
&+ \int_{d_1}^{d_3} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(\theta)} \theta^{40} e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))} d\theta \\
&+ \int_{d_3}^{\infty} (1.3\alpha + 0.7) e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)} \theta^{40} e^{-\theta(2977-35.6(1-\alpha))} d\theta \\
&+ \int_{0}^{d_2} (1.3\alpha + 0.7) e^{-\theta(1.3\alpha+0.7)} \theta^{40} e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))} d\theta \\
&+ \int_{d_2}^{\infty} (3.8 - 1.8\alpha) e^{-\theta(3.8-1.8\alpha)} \theta^{40} e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))} d\theta.
\end{aligned}
$$

$\alpha$-برش‌های برآورد بیز فازی براساس تابع پیش‌بینی فازی را می‌توانیم به‌ازای برخی مقادیر در جدول ۲ مشاهده کنیم.

جدول ۱: نمونه تصادفی فازی

| شماره | $X_i^* = (m_i, a_i, b_i)_T$ | شماره | $X_i^* = (m_i, a_i, b_i)_T$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | (۱۳۰, ۱٫۶, ۱٫۷)$_T$ | ۲۱ | (۱۴۰, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ |
| ۲ | (۱۶۵, ۲٫۰, ۲٫۱)$_T$ | ۲۲ | (۱۵۴, ۱٫۸, ۲٫۰)$_T$ |
| ۳ | (۱۷۰, ۲٫۰, ۲٫۲)$_T$ | ۲۳ | (۱۵۰, ۱٫۸, ۲٫۰)$_T$ |
| ۴ | (۱۳۲, ۱٫۶, ۱٫۷)$_T$ | ۲۴ | (۱۴۹, ۱٫۸, ۱٫۹)$_T$ |
| ۵ | (۱۶۴, ۲٫۰, ۲٫۱)$_T$ | ۲۵ | (۱۳۲, ۱٫۶, ۱٫۷)$_T$ |
| ۶ | (۱۳۵, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ | ۲۶ | (۱۳۵, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ |
| ۷ | (۱۳۶, ۲٫۰, ۲٫۱)$_T$ | ۲۷ | (۱۳۳, ۱٫۶, ۱٫۷)$_T$ |
| ۸ | (۱۳۲, ۱٫۶, ۱٫۷)$_T$ | ۲۸ | (۱۳۵, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ |
| ۹ | (۱۳۸, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ | ۲۹ | (۱۷۰, ۲٫۰, ۲٫۲)$_T$ |
| ۱۰ | (۱۵۹, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ | ۳۰ | (۱۷۰, ۲٫۰, ۲٫۲)$_T$ |
| ۱۱ | (۱۳۸, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ | ۳۱ | (۱۶۵, ۲٫۰, ۲٫۱)$_T$ |
| ۱۲ | (۱۵۸, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ | ۳۲ | (۱۳۶, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ |
| ۱۳ | (۱۳۵, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ | ۳۳ | (۱۶۶, ۲٫۰, ۲٫۲)$_T$ |
| ۱۴ | (۱۵۸, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ | ۳۴ | (۱۶۰, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ |
| ۱۵ | (۱۳۷, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ | ۳۵ | (۱۳۵, ۱٫۶, ۱٫۸)$_T$ |
| ۱۶ | (۱۵۶, ۱٫۹, ۲٫۰)$_T$ | ۳۶ | (۱۶۱, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ |
| ۱۷ | (۱۳۹, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ | ۳۷ | (۱۳۸, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ |
| ۱۸ | (۱۵۵, ۱٫۹, ۲٫۰)$_T$ | ۳۸ | (۱۳۸, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ |
| ۱۹ | (۱۴۲, ۱٫۷, ۱٫۸)$_T$ | ۳۹ | (۱۵۱, ۱٫۸, ۲٫۰)$_T$ |
| ۲۰ | (۱۵۳, ۱٫۸, ۲٫۰)$_T$ | ۴۰ | (۱۵۹, ۱٫۹, ۲٫۱)$_T$ |

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک نگرش جدید برای برآورد فازی در استنباط بیزی بررسی گردید. در برخی موارد مشاهدات مربوط به متغیر تحت بررسی نادقیق هستند. برای مدل‌سازی چنین سیستم‌هایی، ابتدا تابع درستنمایی تحت داده‌های فازی مورد تعمیم قرار گرفت و براساس آن و بر پایه یک توزیع پیشین نادقیق، $\alpha$-برش‌های توزیع پسین براساس داده‌های فازی تعریف شد. در ادامه، برآورد بیزی تحت تابع پیش‌بینی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت.

جدول ۲: برآورد بیز فازی براساس تابع پیش‌بینی

| $\alpha$ | $\underline{E}(x_{n+1}\|\boldsymbol{x}^*)$ | $\overline{E}(x_{n+1}\|\boldsymbol{x}^*)$ |
|---|---|---|
| ۰/۱ | ۸/۵۲۷ | ۱۳۹/۷۲ |
| ۰/۲ | ۱۱/۷۴۹ | ۱۳۶/۱۸۸ |
| ۰/۳ | ۱۵/۸۲۹ | ۱۳۲/۳۳۹ |
| ۰/۴ | ۲۰/۹۰۹ | ۱۲۷/۴۸۲ |
| ۰/۵ | ۲۷/۱۱ | ۱۲۱/۴۸۷ |
| ۰/۶ | ۳۴/۵۱۳ | ۱۱۴/۲۶۹ |
| ۰/۷ | ۴۳/۱۱۵ | ۱۰۵/۸۰۱ |
| ۰/۸ | ۵۲/۸۱۴ | ۹۶/۱۸۵ |
| ۰/۹ | ۶۳/۳۸۳ | ۸۵/۶۳۱ |
| ۱ | ۷۴/۴۷۵ | ۷۴/۴۷۵ |

## مراجع


طاهری، س. م. (۱۳۷۵). *آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی*، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.

طاهری، س. م. و ماشین‌چی، م. (۱۳۸۷). مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، *انتشارات دانشگاه باهنر کرمان*.

عارفی، م. و طاهری، س. م. برآورد بیزی براساس توزیع پسین امکانی با داده‌های فازی، *مجله اندیشه آماری*، ۱، ۸۵–۷۷.

Arefi M. and Taheri S.M. (2014), Possibilistic Bayesian inference based on fuzzy data, *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, (to appear).

Berger J.O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis,* Springer, New York.

Gil M. , Corral N. and Gil P. (1985), The fuzzy decusion problem:An approach to the point estimation problem with fuzzy information, *European Journal of Operational Research.* 22, 26 - 34.

Lapointe S. and Bobee B. (2000), Revision of Possibility distributions:A Bayesian inference pattern, *Fuzzy Sets and Systems.* 116, 119-140.

Schnatter S. (1993), On fuzzy Bayesian inference, *Fuzzy Sets and Systems.* 60, 41-58.

Taheri S.M. and Behboodian J. (2006), On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.* 19, 139-154.

Viertl R. (2008), Foundations of fuzzy Bayesian inference, *Journal of Uncertain Systems.* 2, 187-191.