سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

مباحث تشخیصی تأثیر موردی در یک مدل بیزی برای ذخیره سازی ادعاهای چندمتغیره در بیمه غیر عمر

منیر گودرزی[۲] [۱]، محمد ذکایی[۲]

[۲]دانشگاه شهید بهشتی-دانشکده علوم ریاضی- گروه آمار

چکیده: شی و همکاران (۲۰۱۲) یک مدل بیزی لگ نرمال برای ذخیره‌سازی ادعاهای چند متغیره که به‌طور همزمان اثرات سال وقوع، سال توسعه و سال تقویمی برای چندین مثلث تأخیر را مدل‌بندی می‌کند را معرفی کردند. در این روش علاوه بر در نظر گرفتن وابستگی‌های دوبه‌دو ادعاها، وابستگی درون و بین مثلث‌های چندگانه که از اثرات سال تقویمی ناشی می‌شود نیز با استفاده از اثرات تصادفی در مدل وارد می‌گردند. ما در این مقاله برای کاهش تعداد پارامترها، به‌جای مدل ANOVA سه پارامتری برای میانگین در مدل شی و همکاران (۲۰۱۲)، مدل ANCOVA که در آن فرض می‌کنیم در داده‌ها اثرات سال وقوع و تقویمی خطی وجود داشته باشد را در نظر می‌گیریم. براساس واگرایی کولبک - لیبر، در دو مدل یک مطالعه آنالیز حساسیت برای شناسایی نمونه‌های مؤثر بر توزیع پسین توأم انجام شده است. در ادامه برای مقایسه عملکرد مدل‌ها یک مثال واقعی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ذخیره‌سازی ادعاها، ادعاهای چندمتغیره، استنباط بیزی، حذف موردی و واگرایی کولبک-لیبر.

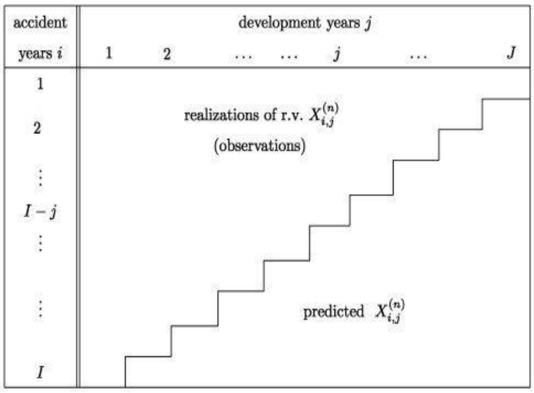
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05.

۱ مقدمه

هر شرکت بیمه برای جبران خسارت ادعای آینده بیمه‌شدگانش که قبلاً واقع شده است ناگزیر است پشتوانه‌ای در نظر گیرد. این میزان معمولاً به‌عنوان تدارکی برای ادعاهای معوق یا ذخیره‌سازی ادعاها نامیده می‌شود. ذخایر مورد بررسی ادعاهایی هستند که واقع شده‌اند اما هنوز گزارش نشده‌اند که به‌عنوان ادعاهای IBNR نیز بیان می‌شوند. محاسبه ذخایر دارای اهمیت زیادی است زیرا کم‌برآوردی آن سبب می‌شود که شرکت بیمه نتواند تعهدات خود را انجام دهد و بیش‌برآوردی آن نیز سبب می‌شود که به‌صورت غیر لازم سرمایه اضافی نگه داشته شود. لذا پیش‌گویی ادعاهای معوق و ذخیره مناسب برای پرداخت چنین ادعاهایی نقش مهمی در تجارت شرکت‌های بیمه‌ای دارد. بنابراین پیش‌گویی مطالبات با روش‌های مناسب و برآورد خطای پیش‌گویی هدف ذخیره‌سازی است. معمولاً هر بیمه‌گری در بیش از یک خط تجارت فعالیت دارد. پیش‌روی در روش ذخیره‌سازی تصادفی که در آن وابستگی‌های میان خطوط چندگانه تجارت در فرآیند محاسبه ذخایر وارد می‌شوند، یک توسعه جدید در ادبیات ذخیره زیان است.

[۱]منیر گودرزی: goudarzi.monir@gmail.com

بردار تصادفی $\mathbf{X}_{ij} = (X_{ij}^{(1)}, ..., X_{ij}^{(L)})' \in R^L$ را که در آن $X_{ij}^{(n)}$ نشان‌دهنده‌ی میزان ادعای غیر تجمعی پرداخت شده بوسیله‌ی یک شرکت بیمه برای سال وقوع $i \in 1, ..., I$ و سال توسعه‌ی $j \in 1, ..., J$ در $n \in 1, ..., L$امین خط تجارت است را در نظر بگیرید. میزان ادعاهای مشاهده شده روی یک دوره با I سال وقوع، همانگونه که در شکل ۱ دیده می‌شود، معمولاً با یک مثلث تأخیر نشان داده می‌شوند. مدل‌های آماری مختلف برای پیش‌گویی میزان ادعاهای مشاهده نشده در مثلث پایینی توسعه یافته‌اند.



شکل ۱: مثلث تأخیر برای میزان ادعاهای چندمتغیره.

به‌دلیل حجم نمونه کم در مثلث‌های تأخیر، تمرکز بر روش‌های توزیع‌های پارامتری مورد توجه قرار گرفته است. توزیع لگ نرمال یکی از توزیع‌هایی است که به‌طور گسترده برای ادعاهای غیرتجمعی در ادبیات ذخیره‌سازی بکار گرفته شده است. کرمر (۱۹۸۲) اولین بار مدل لگ نرمال با ساختار ضربی برای ذخیره‌سازی ادعاها را بکار برد. دی آلبا (۲۰۰۲) و انتزیوفراس و دلاپورتس (۲۰۰۲) یک مدل لگ نرمال بیزی برای پیش‌گویی ادعاهای معوق بکار گرفتند. دی آلبا (۲۰۰۶) یک مدل لگ نرمال سه پارامتری را برای وارد کردن مقادیر منفی در مثلث تأخیر در نظر گرفت. شی و همکاران (۲۰۱۲) با تمرکز روی اثرات سال تقویمی مشترک، یک مدل لگ نرمال بیزی در پیش‌گویی ادعاهای معوق برای خطوط وابسته تجارت را پیشنهاد کردند. ما در این مقاله با فرض این‌که در داده‌ها اثرات سال وقوع و تقویمی خطی وجود داشته باشد، مدل شی و همکاران (۲۰۱۲) را با تابع میانگینی با تعداد پارامترهای بسیار کمتر در نظر می‌گیریم .

بعد از برازش مدل، مطالعات حساسیت برای کشف مشاهدات مؤثر، یعنی مشاهداتی که حذف آن‌ها منجر به تغییرات اساسی در برآوردهای پارامترها یا تابعی از پارامترها در یک تحلیل آماری می‌شود، مورد علاقه بسیاری از محققان است. یک روش شناخته شده برای شناسایی نمونه‌های مؤثر روش حذف موردی معرفی شده توسط کوک (۱۹۸۶) است. این روش با موفقیت برای مدل‌های آماری مختلفی بکار گرفته شده است. در چارچوب بیزی، چو و همکاران (۲۰۰۹) تشخیص‌های تأثیر حذف موردی برای مدل‌های بقا را از طریق روش بیزی توسعه دادند. کانچو و همکاران (۲۰۱۰) تشخیص‌های حذف موردی بیزی برای مدل‌های رگرسیونی لگاریتم بیرنبام ساندرز با توزیع t استیودنت را مورد تحقیق قرار دادند. روش تشخیص بیزی برای مدل‌بندی ادعای چند متغیره برای ذخیره‌سازی بیمه غیر عمر تاکنون در ادبیات موضوع مورد توجه قرار نگرفته است. بنابراین یکی دیگر از اهدف این مقاله، مطالعه‌ی اندازه‌های تشخیص براساس واگرایی کولبک - لیبر (K–L) پیشنهاد شده توسط چو و همکاران (۲۰۰۹) در مدل‌بندی ادعای چند متغیره برای ذخیره‌سازی بیمه غیر عمر است. معیارهای بیزی به‌آسانی با بسته‌های نرم‌افزاری استاندارد بیزی مانند OpenBUGS محاسبه می‌شوند.

ادامه مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲، چارچوب مدل‌بندی توصیف می‌شود. بخش ۳ استنباط بیزی برای مدل‌ها نشان داده شده است. تشخیص‌های تأثیر نمونه بیزی براساس واگرایی کولبک-لیبر در بخش ۴ بررسی شده است. در بخش ۵، مدل‌های پیشنهاد شده از طریق یک مثال واقعی و اندازه‌های تشخیص و استنباط بیزی مقایسه شده‌اند. در پایان بعضی نتیجه‌گیری‌ها در این مقاله بیان شده است.

۲ مدل لگ نرمال بیزی ذخیره سازی ادعاهای چندمتغیره

مشابه شی و همکاران (۲۰۱۲) ، ما فرض می‌کنیم که میزان ادعاهای غیر تجمعی پرداخت شده $\mathbf{X}_{ij}$ ، که با تقسیم بر مقدار حق بیمه $\mathbf{w}_i$ نرمال شده‌اند، با یک مدل لگ نرمال چندمتغیره بیزی با اثرات ثابت برای پارامترهای سال وقوع α_i و پارامترهای سال توسعه β_j و با اثرات تصادفی برای پارامترهای سال تقویمی $\gamma_{t=i+j}$ مدل‌بندی می‌شوند. متغیر تصادفی $Y_{ij}^{(n)}=\log(X_{ij}^{(n)}/\mathbf{w}_i^{(n)})$ تعریف می‌کنیم، بنابراین بردار تصادفی $\mathbf{Y}_{ij}$ دارای تابع چگالی به شکل زیر است:

$$f(\mathbf{y}_{ij},\mu_{ij},\Sigma)=(۲\pi)^{\frac{-L}{۲}}|\Sigma|^{\frac{-۱}{۲}}\exp\left\{-\frac{۱}{۲}(\mathbf{y}_{ij}-\mu_{ij})'\Sigma^{-۱}(\mathbf{y}_{ij}-\mu_{ij})\right\} \qquad (۱.۲)$$

که در آن μ_{ij}، $\mathbf{y}_{ij}$ و Σ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_{ij}=\begin{bmatrix}\mu_{ij}^{(۱)}\\ \vdots\\ \mu_{ij}^{(L)}\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}_{ij}=\begin{bmatrix}y_{ij}^{(۱)}\\ \vdots\\ y_{ij}^{(L)}\end{bmatrix},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma^{(۱,۱)} & \dots & \sigma^{(۱,L)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma^{(L,۱)} & \dots & \sigma^{(L,L)}\end{bmatrix}$$

که ماتریس کوواریانس Σ بیانگر وابستگی دوبه‌دو بین سلولی از یک مثلث و سلول متناظر از مثلث دیگر است. فرض می‌کنیم برای nامین مثلث $n=۱,...,L$، بردار میانگین ساختارهای زیر را داشته باشد:

۱. برای $t=۲,...,I+J$ ، مدل ANOVA سه پارامتری شی و همکاران (۲۰۱۲):

$$\mu_{ij}^{(n)}=\mu^{(n)}+\alpha_i^{(n)}+\beta_j^{(n)}+\gamma_{t=i+j}$$

که در شرط‌های $\alpha_۱^{(n)}=\beta_۱^{(n)}=\gamma_۱=۰$ صدق می‌کند. با در نظر گرفتن مدل قدم زدن تصادفی برای پارامترها می‌توان حالت پویایی پارامترها را نیز در مدل وارد نمود.

۲. مدل ANCOVA: با فرض اینکه در داده‌های همه‌ی خطوط تجارت اثرات سال وقوع و سال تقویمی خطی وجود داشته باشد، یعنی $\alpha_i^{(n)}=(i-۱)\alpha^{(n)}$ و $\gamma_{t=i+j}=(i+j-۲)\gamma$ ، مدل ANOVA می‌تواند به مدل ANCOVA با تابع میانگین زیر تغییر یابد:

$$\mu_{ij}^{(n)}=\mu^{(n)}+(i-۱)\alpha^{(n)}+\beta_j^{(n)}+(i+j-۲)\gamma$$

که در شرط $\beta_۱^{(n)}=۰$ صدق می‌کند.

۳ استنباط بیزی

برای کامل کردن توصیف بیزی مدل، نیازمند به توصیف توزیع‌های پیشین برای همه پارامترهای ناشناخته هستیم. با در نظرگرفتن اثرات سال تقویمی به‌عنوان اثرات تصادفی، برای مدل‌های توصیف شده در بخش قبل پیشین‌های زیر را به‌کار می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= \left(\alpha_i^{(1)},...,\alpha_i^{(L)}\right)' \sim N(\mathbf{0},\Sigma_{\alpha_i})\\
\beta_i &= \left(\beta_i^{(1)},...,\beta_i^{(L)}\right)' \sim N(\mathbf{0},\Sigma_{\beta_i})\\
\gamma,\gamma_t &\sim N(0,\sigma_\gamma^2)\\
\tau_\gamma &= \tfrac{1}{\sigma_\gamma^2} \sim Gamma(\kappa,\nu)\\
\alpha &= \left(\alpha^{(1)},...,\alpha^{(L)}\right)' \sim N(\mathbf{0},\sigma_\alpha^2\mathbf{I})\\
\tau_{\mathbf{\Sigma}} &= \mathbf{\Sigma}^{-1} \sim Wishart(\mathbf{Q},L)
\end{aligned}
$$

که در آن $\Sigma_{\alpha_i} = diag(\sigma^2_{\alpha_i^{(1)}},...,\sigma^2_{\alpha_i^{(L)}})$ و $\mathbf{\Sigma}_{\beta_j} = diag(\sigma^2_{\beta_j^{(1)}},...,\sigma^2_{\beta_j^{(L)}})$ و $\mathbf{Q}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است. بنابراین با فرض استقلال بین توزیع پیشین پارامترها، توزیع پسین تؤام برای مدل ANOVA از طریق قضیه بیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$
\pi(\theta|\mathbf{y}^R) \propto (\prod_{i=0}^{I}\prod_{j=0}^{I+1-i} f(\mathbf{y}_{ij}\,|\mu_{ij},\mathbf{\Sigma})(\prod_{i=1}^{I}\pi(\alpha_i)\prod_{j=1}^{J}\pi(\beta_j)\prod_{t=2}^{I+J}\pi(\gamma_t))(\pi(\sigma_\gamma)\pi(\mathbf{\Sigma}))
$$

و برای مدل ANCOVA نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\pi(\theta|\mathbf{y}^R) \propto (\prod_{i=0}^{I}\prod_{j=0}^{I+1-i} f(\mathbf{y}_{ij}\,|\mu_{ij},\mathbf{\Sigma})(\pi(\alpha)\prod_{j=1}^{J}\pi(\beta_j)\pi(\gamma))(\pi(\sigma_\gamma)\pi(\mathbf{\Sigma}))
$$

براساس معادلات بالا، برای به‌دست آوردن برآورد بیز پارامترهای دو مدل، نیازمند به‌دست آوردن توزیع‌های پسین شرطی حاشیه‌ای هستیم، از آن‌جا که روش‌های MCMC مانند نمونه‌گیر گیبز و الگوریتم متروپولیس-هستینگ می‌توانند با نمونه‌گیری مکرر از توزیع شرطی کامل برای تولید نمونه از توزیع توأم به‌کار گرفته شوند، می‌توانیم این استنباط‌ها را به‌آسانی با استفاده از روش‌های MCMC در بسته‌ی نرم‌افزاری OpenBUGS محاسبه کنیم.

۴ مباحث تشخیصی تأثیر موردی بیزی

فرض کنید $L(\theta\,|\mathbf{y})$ و $L(\theta\,|\mathbf{y}_{(-\mathbf{ij})})$ به‌ترتیب نشان دهنده ی تابع درستنمایی براساس داده های کامل و تابع درستنمایی براساس داده‌ها بدون ijامین نمونه باشند. توزیع‌های پسین برای داده‌های کامل و داده ها بدون ijامین نمونه می‌تواند به ترتیب به‌صورت $\pi(\theta\,|\mathbf{y}) \propto L(\theta\,|\mathbf{y})\pi(\theta)$ و $\pi(\theta\,|\mathbf{y}_{(-\mathbf{ij})}) \propto L(\theta\,|\mathbf{y}_{(-\mathbf{ij})})\pi(\theta)$ تعریف شوند، که در آن $\pi(\theta)$ توزیع پیشین θ است. فرض کنید $K(P,P_{(ij)})$ نشان دهنده ی فاصله کولبک-لیبر بین P و $P_{(ij)}$ باشد، که در آن P نشان دهنده‌ی $\pi(\theta\,|\mathbf{y})$ و $P_{(ij)}$ نشان دهنده‌ی $\pi(\theta\,|\mathbf{y}_{(-\mathbf{ij})})$ است، پس

$$
\begin{aligned}
K(P,P_{(ij)}) &= \int \pi(\theta\,|\mathbf{y})\log\left\{\frac{\pi(\theta|\mathbf{y})}{\pi(\theta|\mathbf{y}_{(-ij)})}\right\}d\theta\\
&= -\log\left[E_{\theta|\mathbf{y}}\left[\{f(\mathbf{y}_{ij}\,|\theta)\}^{-1}\right]\right]^{-1} + E_{\theta|\mathbf{y}}\left[\log\{f(\mathbf{y}_{ij}\,|\theta)\}\right],
\end{aligned}
$$

بنابراین $K(P,P_{(ij)})$ تأثیر حذف ijامین نمونه از داده‌های کامل روی توزیع پسین توأم θ را اندازه‌گیری می‌کند. همان‌گونه که چو و همکاران (۲۰۰۹) اشاره کردند، $K(P,P_{(ij)})$ می‌تواند با حل p در معادله

$$K(P,P_{(ij)}) = K[B(p),B(۰/۵)] = -\log{}^{[۴p(۱-p)]}/_{۲}$$

که $B(p)$نشان‌دهنده‌ی توزیع برنولی با احتمال موفقیت p است، انجام شود. این بیان می‌کند که توصیف نتایج با استفاده از $\pi(\theta\,|\mathbf{y})$ به‌جای $\pi(\theta\,|\mathbf{y}_{(-\mathbf{ij})})$ با توصیف یک پیشامد مشاهده نشده با احتمال p، زمانی‌که احتمال درست ۰/۵ است، سازگار است. بعد از برخی محاسبات جبری می‌توان نشان داد $p=\frac{۱}{۲}\left\{۱+\sqrt{۱-\exp[-۲K(P,P_{(ij)})]}\right\}$. این معادله نشان می‌دهد که $۰/۵\leq p\leq ۱$. یعنی اگر $p\gg ۰/۵$ پس ijامین نمونه مؤثر در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از نمونه‌های زنجیره مارکف مونت کارلو از توزیع پسین $\pi(\theta\,|\mathbf{y})$ ، برآورد مونت کارلوی $K(P,P_{(ij)})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{K}(P,P_{(ij)}) = -\log\left(\left\{\frac{۱}{M}\sum_{m=۱}^{M}\frac{۱}{f(\mathbf{y}_{ij}\,|\theta^{(m)})}\right\}^{-۱}\right)+\frac{۱}{M}\sum_{m=۱}^{M}[f(\mathbf{y}_{ij}|\theta^{(m)})]$$

۵ مثال کاربردی

برای نشان دادن دو مدل توصیف شده در بخش ۲، یک پرتفوی بیمه از خطوط تجارت اتومبیل شخصی و اتومبیل تجاری از یک بیمه‌گر عمده اموال و حوادث در ایالات متحده را در نظر می‌گیریم. این پرتفوی در شی و همکاران (۲۰۱۲) در نظر گرفته شده است. اگرچه مثلث‌های زیان‌های پرداخت شده برای سال‌های وقوع ۱۹۸۸–۱۹۹۷ و برای ۱۰ سال توسعه وجود دارد، ما تنها داده‌های مربوط به اولین ۹ سال تقویمی را برای برازش مدل به‌کار می‌بریم. باقی داده‌ها به‌عنوان داده‌های جدا نگه داشته شده، برای آزمون کردن دقت پیش‌بینی یک سال بعد مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای انجام مدل‌ها با استفاده از روش شبیه‌سازی بیزی، ما با به‌کار بردن بسته نرم‌افزاری OpenBUGS، نمونه‌گیر گیبز را برای ۱۰۰۰۰۰۰ تکرار اجرا کردیم. پس از حذف اولین ۵۰۰۰۰ تکرار بعنوان دوره داغیدن، برای کاهش همبستگی مقادیر شبیه‌سازی شده به‌صورت سیستماتیک هر ۵۰۰امین تکرار در زنجیره به‌کار گرفته شد. در نهایت ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده خواهیم داشت. برای ارزیابی همگرایی زنجیره مارکف، چندین نمودار تشخیصی برای پارامترها مورد بررسی قرار گرفت که این نمودارها برای بعضی از پارامترهای انتخاب شده در شکل ۲ نشان داده شده است.

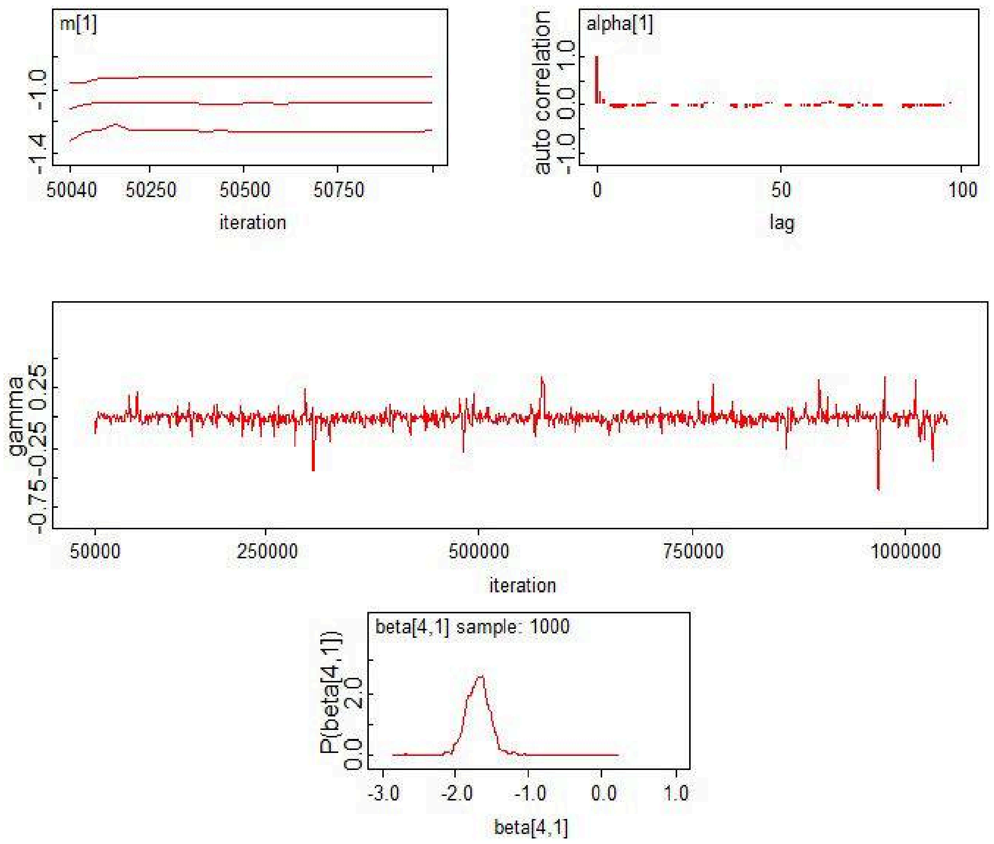
برای مقایسه دو مدل، ما معیار اطلاع بیزی BIC و معیار اطلاع انحرفی DIC را به‌کار می‌بریم. معیار BIC به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BIC = -۲l(\tilde{\theta})+k\ln(n)$$

که در آن k تعداد پارامترهای مدل و n اندازه حجم نمونه، $\tilde{\theta}$ بردار پارامترهای مدل به‌ازای میانگین پسین است و $l(\tilde{\theta})$ تابع لگاریتم درستنمایی به‌ازای $\tilde{\theta}$ است. معیار DIC که تعمیمی از BIC برای مدل‌بندی سلسله مراتبی است و به‌طور گسترده در استنباط‌های بیزی براساس تکنیک‌های MCMC استفاده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DIC = -۲l(\tilde{\theta})+p_D$$

که در آن p_D تعداد پارامترهای مؤثر مدل است. در میان مدل‌های تحت مقایسه، مدل با مقدار DIC و BIC کوچکتر ترجیح داده می‌شود. مقادیر DIC و BIC برای مدل‌ها در جدول ۳ نمایش داده شده است. با توجه به این‌که مدل ANCOVA، مقادیر DIC و



شکل ۲: نمودارهای تشخیصی برای ارزیابی همگرایی شبیه سازی‌های زنجیره مونت کارلو برای بعضی از پارامترها.

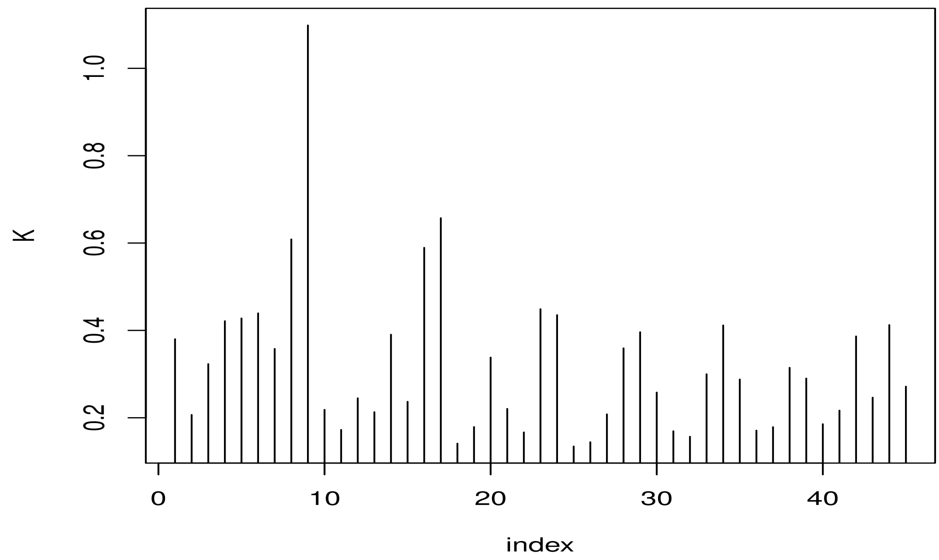
BIC کوچکتری نسبت به مدل ANOVA دارد، بنابراین برای داده‌های تحت مطالعه مدل بهتری برای برازش دادن است. توجه به مقدار میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی یک سال بعد در هر دو مدل نیز عملکرد مدل ANCOVA را تأیید می‌نماید.

جدول ۱: معیارهای مقایسه مدل‌ها.

مدل	BIC	DIC	MSEP
ANOVA	۷۰/۸۲	۵/۵۹	۰/۶۵۲
ANCOVA	-۳/۴۷	-۲۸/۶۳	۰/۴۹۳

مقدار ذخیره کل که در واقع هدف نهایی در مسئله ذخیره‌سازی است براساس مدل ANOVA برابر ۷۴۲۶۰۷۴/۸۲ و براساس مدل ANCOVA مقدار ۶۴۰۰۷۹۱/۶۶ به‌دست آمد.

برای کشف نقاط مؤثر در داده‌ها، اندازه واگرایی کولبک-لیبر که در بخش ۴ معرفی شد را براساس نمونه‌های توزیع پسین پارامترهای مدل ANCOVA محاسبه نمودیم. شکل ۳ نمودار اندازه واگرایی کولبک-لیبر را برای همه نمونه‌های دو متغیره نشان می‌دهد. همان‌گونه که نمودار نشان می‌دهد در همه سال‌های وقوع تأثیر نمونه‌ها در آخرین سال‌های توسعه بیشتر بوده است.



شکل ۳: . نمودار $K(P, P_{(ij)})$ برای داده‌های خطوط تجارت اتومبیل شخصی و اتومبیل تجاری براساس مدل ANCOVA

نتیجه‌گیری

مباحث تشخیصی تأثیر برای پارامترها، یک گام مهم در تحلیل مدل‌های آماری است. در این کار با استفاده از استنباط بیزی، دو نوع مدل برای ادعاهای چندمتغیره برای ذخیره سازی بیمه غیر عمر را مورد بررسی قرار دادیم. به‌علاوه به‌منظور ارزیابی حساسیت برآوردهای بیزی، براساس واگرایی کولبک–لیبر تشخیص‌های تأثیر موردی بیزی را در نظر گرفتیم. یک مثال واقعی برای ارزیابی مدل‌های مختلف مطرح شده به‌کار گرفته شد. نتایج نشان داد که مدل ANCOVA عملکرد بهتری نسبت به مدل ANOVA دارد.

مراجع

Cancho V.G. , Ortega E.M. and Paula G.A. (2010), On estimation and influence diagnostics for log-Birnbaum-Saunders Student-t regression models: Full Bayesian analysis, *J. Statist. Plann. Inference* 140, 2486–2496.

Cho H., Ibrahim J.G., Sinha D. and Zhu H. (2009), Bayesian case influence diagnostics for survival models, *Biometrics* 65, 116–124.

Cook R. (1986), Assessment of local influence, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Methodol* 48 , 133–169.

De Alba, E. (2002), Bayesian Estimation of Outstanding Claim Reserves, *North American Actuarial Journal* 6(4), 1–20.

De Alba, E. (2006), Claims reserving when there are negative values in the run-off triangle: bayesian analysis using the three-parameter log-normal distribution, *North American Actuarial Journal* 10(3), 45–59.

Kremer, E. (1982), IBNR Claims and the Two Way Model of ANOVA, *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 47–55.

Ntzoufras, I. and Dellaportas P. (2002), Bayesian modeling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty, *North American Actuarial Journal* 6(1), 113–136.

Shi, P., Basu, S. and Meyers, G. (2012), A Bayesian log-normal model for multivariate loss reserving, *North American Actuarial Journal* 16(1), 29–51.