سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

طرح کنترل ترکیبی با استفاده از میانگین متحرک موزون نمایی

حانیه مباشری پور[1]، [1] دکتر ایوب شیخی
[1] دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش آمار

چکیده: نمودارهای کنترل از مهم‌ترین ابزارهای کنترل کیفیت آماری هستند که هدف از به کارگیری آن‌ها رسیدن به سطح مطلوب اطمینان، سهولت در قضاوت و توسعه مطالعات کیفی است. این نمودارها ابزاری قوی برای پایش فرآیندها می‌باشند. با این حال نمودار کنترل که توسط شوهارت ارائه گردید و به نمودار کنترل شوهارت معروف است دارای یک عیب اساسی است که تنها آخرین اطلاعات بدست آمده از فرآیند را مورد توجه قرار می‌دهد. همین مسئله این نمودار را نسبت به کشف تغییرات کوچک‌تر از 2σ ناتوان نموده است. بنابراین این نمودار نسبت به کشف تغییرات کوچک از حساسیت کمتری برخوردار است. هدف این مقاله استفاده از یک طرح کنترل ترکیبی با به کارگیری همزمان دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی می‌باشد که قادر به کشف همزمان تغییرات کوچک و بزرگ است. .

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چند هدفه، بیضی تحت کنترل، رویکرد زنجیره‌های مارکُف، متوسط طول اجرا، میانگین متحرک موزون نمایی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62M10 ،49N05 ،13P25.

۱ مقدمه و معرفی مدل

در مبحث کنترل کیفیت اگر ω نمونه آماری باشد که بسیاری از مشخصه‌های کیفیت مورد علاقه را اندازگیری می کند و μ_ω میانگین مورد نظر و σ_ω انحراف معیار فرض کنیم آنگاه خط مرکزی حدود کنترل بالایی و حدود کنترل پایینی به صورت زیر خواهد شدرضازاده (۲۰۱۴).

$$UCL = \mu_\omega + L\sigma_\omega.$$

$$CL = \mu_\omega.$$

$$LCL = \mu_\omega - L\sigma_\omega.$$

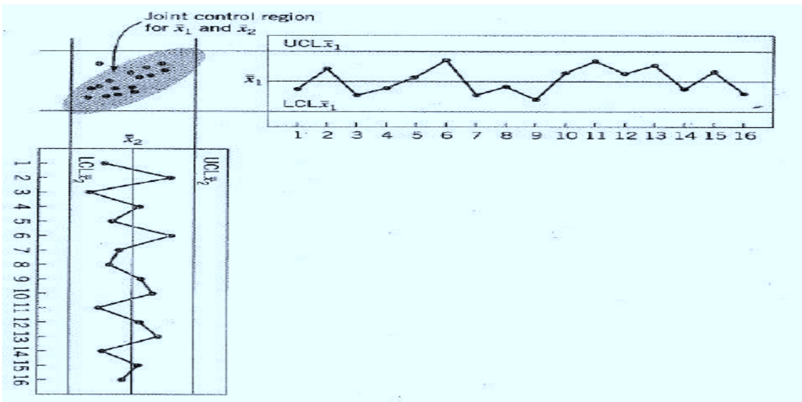
(دراینجا L فاصله حدود کنترل از خط مرکزی است.) اگر فرض شود که این مشخصه کیفیت از توزیع نرمال پیروی کند می‌توانیم Lرا $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ جایی که α احتمال خطای نوع اول است و $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ مقدار نرمال استاندارد $\frac{\alpha}{2}$ است در نظر بگیریم این بدین معنی است که اگر فرآیند

[1] حانیه مباشری پور : Hanieh.m6894@yahoo.com

درکنترل باشد ما انتظار داریم که $(1-\alpha)100$ درصد این فواصل اطمینان از مقادیر ω در فاصله LCL و UCL قرار بگیرد. با درنظر گرفتن احتمال خطای نوع اول در نمودار $\bar{x}$ می‌تواند (با درنظر گرفتن این خطا) برای بقیه نمودارهای کنترل به کاربرده شود حتی اگر توزیع ما نرمال نباشد.
اگر $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ میانگین نمونه‌ای از دو مشخصه کیفیت از یک نمونه‌ای به حجم n باشند آنگاه آماره زیر دارای توزیع χ_0^2 با ۲ درجه آزادی خواهد شد.

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{12}} \left[\sigma_2^2(\bar{x}_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(\bar{x}_2-\mu_2)^2 - 2\sigma_{12}(\bar{x}_1-\mu)(\bar{x}_2-\mu)\right]. \qquad (1.1)$$

معادله (۱.۱) می‌تواند به عنوان مبنای یک نمودار کنترل برای میانگین μ_1 و μ_2 به کار برده شود. اگر میانگین‌ها در همان مقادیر μ_1 و μ_2 باقی بمانند آنگاه مقدار χ_0^2 باید کمتر از χ_{α}^2 باشد ولی اگر یکی از میانگین‌ها مقدارش تغییر کند آنگاه مقدار χ_0^2 بیشتر از χ_{α}^2 می‌شود. در حالتی که دو متغیر تصادفی x_1 و x_2 مستقل هستند σ_{12} برابر صفر می‌شود. پس وقتی که فرآیند دومتغیره تحت کنترل باشد ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که دو متغیر بسیار همبسته هستند. اگر σ_{12} برابر صفر باشد آنگاه معادله (۱.۱) یک بیضی در مرکز (μ_1 و μ_2) معرفی می‌کند که محورهای اصلیش با محورهای $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ موازی هستند. بیضی تحت کنترل معایبی هم دارد مورد اول این است که دنباله زمانی از نقاط رسم شده از دست رفته است اما می‌توان با استفاده از شماره گذاری نقاط رسم شده یا با استفاده از نمادهای رسم شده خاص برای نشان دادن اکثر مشاهدات اخیر بر آن غلبه کرد ، دومین مورد این است که ایجاد کردن بیضی با بیش از دو مشخصه کیفیت سخت است و سومین عیب این است که محدودیت برای به کار بردن روشی که در آن متغیر ها از توزیع نرمال دومتغیره پیروی می‌کنند وجود دارد. سادگی و گرافیکی بودن خروجی مهم‌ترین عیب این روش است. به دلیل معایبی که این روش دارد ما از روش میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره $(MEWMA)$ به عنوان روش جایگزین استفاده می‌کنیم. نمودار بیضی تحت کنترل برای متغیر تصادفی وابسته در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: بیضی تحت کنترل برای دو متغیر تصادفی وابسته.

۱.۱ نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی

آماره میانگین متحرک موزون نمایی در سال ۱۹۵۹ به وسیله رابرتس به صورت زیر تعریف شده است؟:

$$Z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda) Z_{t-1}.$$

دراین رابطه λ دارای مقدار ثابتی بین $0 \leq \lambda \leq 1$ است. مقدار اولیه برای Z_t که در زمان نمونه اول از آن استفاده می شود برابر است با $Z_0 = \mu_0$. از رابطه فوق مشخص است که چرا میانگین متحرک موزون نمایی را به این عنوان نام‌گذاری می‌کنند که این مسئله به خاطر کاهش وزن ها در قالب یک سری هندسی است. اگر $\lambda \longrightarrow 1$، آنگاه آماره میانگین متحرک موزون نمایی تمام وزن را به مشاهدات آخر اختصاص می دهد. در این حالت نمودار کنترل میانگین موزون نمایی همانند یک نمودار کنترل شوهارت عمل می‌کند. درصورتی‌که $\lambda \longrightarrow 0$، آنگاه مشاهدات اخیر وزن کمی دریافت می کنند، در حالیکه وزن مشاهدات قبلی تنها با گذشت عمر آنها کاهش می‌یابد در این حالت نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی نظیر یک نمودار کنترل جمع تجمعی عمل می‌کند. از آماره $EWMA$ در جداول کنترل و پیش بینی سری‌های زمانی استفاده می‌شود.

۲.۱ متوسط طول اجرا

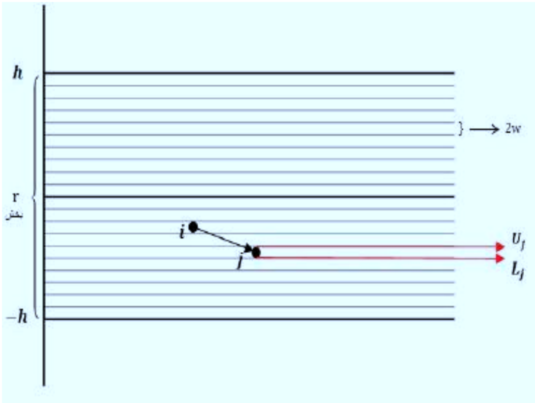
به منظور طراحی یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، نیازمند به داشتن اطلاعات مربوط به توزیع طول اجرای[۱] مربوط به آن هستیم. رابینسون و هو[۲] در سال ۱۹۷۸ یک روش عددی[۳] برای تقریب زدن متوسط طول اجرا متعلق به یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی ارائه نمودند.رابینسون و هو (۱۹۷۸) کرودر[۴] در سال ۱۹۸۷ مقادیر متوسط طول اجرا را برای نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی یک‌طرفه و دوطرفه، با استفاده از یک روش عددی مبتنی بر معادلات انتگرالی مرتبه دوم فردهولم بدست آورد و نتایج را در قالب جداولی برای مقادیر مختلف L و λ ارائه نمودکرودر (۱۹۸۷).

لوکاس و ساکوچی[۵] در سال ۱۹۹۰ مقادیر متوسط طول اجرا را برای نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، با استفاده از رویکرد زنجیره های مارکُف[۶] و با فرض نرمال بودن توزیع آن بدست آوردندلوکاس و ساکوچی (۱۹۹۰) و نتایجی مشابه رابرتس و کرودر بدست آوردند. روش استفاده از زنجیره‌های مارکُف که لوکاس و ساکوچی از آن استفاده کردند مشابه روش بروک و ایوانز بود که در سال ۱۹۷۲ برای بدست آوردن مقادیر متوسط طول اجرای نمودار کنترل تجمعی بکار بردندبروک و ایوانز (۱۹۷۲)، این روش ساده‌تر و کامل‌تر از روشهای قبلی می‌باشد. آنها برای این منظور به صورت زیر عمل کردند:

۳.۱ رویکرد زنجیره های مارکف

$$Z_{1t} = \lambda_1 \bar{x}_t + (1 - \lambda_1) Z_{1(t-1)}.$$

[۱] Run Length Distribution
[۲] Robinson and Ho
[۳] Numerical Procedure
[۴] Crowder
[۵] Lucas and Saccucci
[۶] Markov-Chain Approach



شکل ۲: نمایی از نحوه محاسبه ARL نمودارهای کنترل با استفاده از رویکرد زنجیره‌های مارکُف.

در این روش همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است ناحیه بین حدود کنترل بالا و پایین به r قسمت فرضی تقسیم می‌شود $(r = ۲m + ۱)$ که عرض هر قسمت $۲w$ فرض می‌شود.

$$\frac{h - (-h)}{۲r} = \frac{h}{r} = w.$$

آماره Z_t (در زمان t) در موقعیت موقت j است اگر:

$$c_j - w < Z_t < c_j + w \qquad , j = -m, -m + ۱, \cdots, +m.$$

که در آن c_j مرکز نقطه‌ای از بازه فرضی jام است و خط بالا و پائین آن عبارتست از:

$$L_j = c_j - w.$$

$$U_j = c_j + w.$$

$$c_j = -h + (۲j - ۱)w.$$

بردار احتمال اولیه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Pi = {P^T}_{int} = (P_{-m}, \cdots, P_{-۱}, P_۰, P_۱, \cdots, P_m | ۰) = (P^T | ۰).$$

که در آن P_j بیانگر احتمال آن است که z در وضعیت j باشد.

$$a = \text{حالت خارج از کنترل}$$

لازم به ذکر است که P_a برابر با صفر است زیرا آماره کنترل در آغاز تحت کنترل فرض شده است.

$$P = \begin{pmatrix} Q & (۱ - Q)^J \\ ۰^T & J \end{pmatrix}.$$

که در آن Q زیر ماتریس شامل احتمالات رفتن از یک وضعیت به وضعیت دیگر (در حالت تحت کنترل) است، I ماتریس یکه است و J یک بردار ستونی با درایه‌های ۱ است. P_{ij} بیانگر احتمال این است که آماره کنترل از وضعیت i بلافاصله به وضعیت j برود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\{L_j \leq Z_t \leq U_j\} = P\{L_j \leq \lambda \bar{x}_t + (1-\lambda) Z_{t-1} \leq U_j\} \\ &= p\left\{ \frac{c_j - w - (1-\lambda)c_i}{\lambda} \leq \bar{x}_t \leq \frac{c_j + w - (1-\lambda)c_i}{\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

$$\bar{x}_t \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

$$P_{ij} = \Phi\left(\frac{c_j + w - (1-\lambda)c_i}{\lambda}\right) = -\Phi\left(\frac{c_j - w - (1-\lambda)c_i}{\lambda}\right).$$

$$Q_{r\times r} = [P_{ij}].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi J = 1 \\ \Pi(1 - Q') = 0 \end{array} \right\}.$$

احتمال قرارگرفتن $\bar{x}_t$ در یکی از حدود Π برابر است با:

$$ARL = \Pi\left((1-Q)^{-1} J\right).$$

۲ نتایج

۱.۲ مدلسازی طرح $EWMA - EWMA$

برای به کارگیری همزمان دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی نیاز به تعیین پارامترهای طرح داریم و به منظور اینکه طرح عملکرد بهتری داشته باشد نیاز به بدست آوردن پارامترهای بهینه طرح داریم، بنابراین طرح به یک مدل بهینه‌سازی تبدیل می‌گردد. برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود یکی از نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با یک واکنش اولیه سریع درنظرگرفته شود، همچنین پیشنهاد می‌شود برای کشف همزمان تغییرات کوچک، بزرگ و متوسط از ۳ تا k نمودار میانگین متحرک موزون نمایی به علت وجود ضریب هموارسازی λ ، انعطاف پذیری بالایی برای کشف تغییرات کوچک و بزرگ دارد، بنابراین برای کشف بازه‌ای از تغییرات می‌توان با تعیین صحیح λ و ضریب حدود انحراف معیار نمودار (L) به نتایج خوبی رسید.

توابع هدف: توابع هدف این طرح شامل توابع هدفی است که متوسط طول اجرای طرح ترکیبی را در حالت خارج از کنترل به ازای تغییرات مختلف در میانگین فرآیند حداقل کند، که در نتیجه باعث حداقل شدن خطای نوع دوم طرح می‌شود و طرح به یک مدل بهینه سازی چند هدفه تبدیل می‌گردد و شامل ۵ محدودیت می‌شود.

۲.۲ مدل ریاضی

$$Min\ Z_m = ARL_{\delta_m, overal} \qquad , m = 1, \cdots, k.$$

به طوری‌که،

$$ARL_{o_{overal}} = ARL_{t\ arg\ et}.$$

$$ARL_{o_۱} \geq ARL_{min}.$$

$$ARL_{o_۲} \geq ARL_{min}.$$

$$\circ \leq \lambda_۱ \leq ۱.$$

$$\circ \leq \lambda_۲ \leq ۱.$$

$$ARL_{\delta_m, overal}, ARL_{o_{overal}}, ARL_{o_۱}, ARL_{o_۲} \geq \circ.$$

ARL: متوسط طول اجرا.

ARL_O: متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل است.

$ARL_{\delta_m, overal}$: متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت خارج از کنترل به ازای تغییر δ_m در میانگین فرآیند.

$ARL_{o_{overal}}$: متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل.

$ARL_{o_۱}$: متوسط طول اجرای نمودار اول در حالت تحت کنترل.

$ARL_{o_۲}$: متوسط طول اجرای نمودار دول در حالت تحت کنترل.

$ARL_{t\ arg\ et}$: متوسط طول اجرای مورد نظر برای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل.

ARL_{min}: حداقل متوسط طول اجرای مورد نظر در حالت تحت کنترل برای هر نمودار.

K: تعداد شیفت مورد نظر.

δ: فاصله شیفت‌های مورد نظر.

δ_m:مجموعه شیفت‌های مورد نظر که اعضای آن ضرایب δ هستند.

$\lambda_۱$: ضریب هموارسازی نمودار کنترل اول (متغیر تصمیم اول).

$\lambda_۲$: ضریب هموارسازی نمودار کنترل دوم (متغیر تصمیم دوم).

$L_۱$: ضریب حدود انحراف معیار نمودار کنترل اول (متغیر تصمیم سوم).

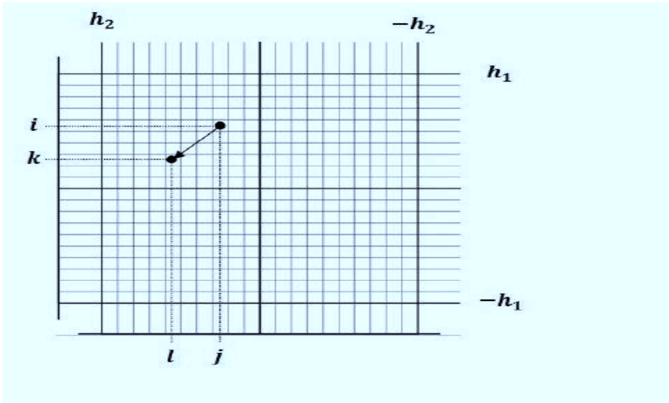
$L_۲$: ضریب حدود انحراف معیار نمودار کنترل دوم (متغیر تصمیم چهارم).

۳.۲ تعمیم رویکرد زنجیره‌های مارکُف

$$Z_{۱t} = \lambda_۱ \bar{x}_t + (۱ - \lambda_۱) Z_{۱(t-۱)}.$$

$$Z_{۲t} = \lambda_۲ \bar{x}_t + (۱ - \lambda_۲) Z_{۲(t-۱)}.$$

برای محاسبه متوسط طول اجرای طرح ترکیبی نیاز به تعمیم رویکرد زنجیره‌های مارکُف از حالت تک بُعدی به حالت دو بُعدی داریم، در این روش همان‌طور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود فرض بر این است که دو نمودار کنترل روی هم قرار گیرند. بنابراین $P_{(ij),(kl)}$



شکل ۳: نمایی از نحوه محاسبه ARL نمودار کنترل ترکیبی با استفاده از رویکرد زنجیره‌های مارکُف دو بُعدی.

احتمال این است که آماره کنترل از وضعیت i در نمودار اول و j در نمودار دوم بلافاصله به وضعیت k در نمودار اول و l در نمودار دوم برود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{(ij),(kl)} = P\{(L_k \le Z_{1t} \le U_k) \cap (L_l \le Z_{2t} \le U_l) = \left\{ \begin{array}{c} (L_k \le \lambda_1 \bar{x}_t + (1-\lambda_1)c_i \le U_k) \cap \\ (L_k \le \lambda_2 \bar{x}_t + (1-\lambda_2)c_i \le U_k) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{L_k-(1-\lambda_1)c_i}{\lambda_1} \le \frac{U_k-(1-\lambda_1)c_i}{\lambda_1}\right) \cap \\ \left(\frac{L_l-(1-\lambda_2)c_j}{\lambda_2} \le \frac{U_l-(1-\lambda_1)c_j}{\lambda_2}\right) \end{array} \right\}.$$

اگر:

$$\frac{L_k-(1-\lambda_1)c_i}{\lambda_1} = A_1.$$

$$\frac{U_k-(1-\lambda_1)c_i}{\lambda_1} = A_2.$$

$$\frac{L_l-(1-\lambda_2)c_j}{\lambda_2} = A_3.$$

$$\frac{U_l-(1-\lambda_2)c_j}{\lambda_2} = A_4.$$

آنگاه:

$$P_{(ij),(kl)} = P\{(A_1 \le \bar{x}_t \le A_2) \cap (A_3 \le \bar{x}_t \le A_4) = P \left\{ \begin{array}{c} (minA_4, max(A_1, A_3)) \le \bar{x}_t \\ \le (maxA_3, min(A_2, A_4)) \end{array} \right\}.$$

$$\bar{x}_t \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

$$Q_{r^2 \times r^2} = [P_{(ij),(kl)}].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi J = 1 \\ \Pi(1-Q') = 0 \end{array} \right\}.$$

$$ARL = \Pi_{ij}(۱ - Q)^{-۱}J.$$

Π_{ij} : احتمال قرارگرفتن $\bar{x}_t$ در وضعیت i از نمودار اول و j از نمودار دوم است، به عبارت دیگر احتمال قرارگرفتن $\bar{x}_t$ در هر یک از مربع‌های فرضی در شکل (۳) است.

در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل $\bar{x}_t$ به ترتیب دارای توزیع نرمال به ترتیب با میانگین‌های صفر و δ_m است. در اینصورت مؤلفه‌های $P_{(ij),(kl)}$ از ماتریس Q به ترتیب بیانگر ARL تحت کنترل و خارج از کنترل است.

بحث و نتیجه‌گیری

با استفاده همزمان از دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی می‌توان باعث کشف سریع تغییرات کوچک و بزرگ در میانگین فرآیند شد، و همچنین به علت اینکه پارامترهای این طرح از طریق بهینه‌سازی بدست آمده‌اند، متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل و در نتیجه خطای نوع دوم طرح حداقل می‌شود و موجب می‌شود که این طرح از طرح‌های ترکیبی مشابه، که متوسط طول اجرای یکسانی در حالت تحت کنترل دارند، بهتر عمل کند.

مراجع

Brook, D., and Evans, D. A. (1972). *"An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length."* Vol 59, 539-549.

Crowder, S. V. (1987). *"A simple method for studying run-length distribution of exponentially weighted moving average charts."* Technometrics, Vol 29, 401-407.

Lucas, J. M., and Saccucci, M. S. (1990). *"Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements."* Technometrics, Vol 32, 1-29.

Rezazadeh Niavarani, Mohammad. *"Multi-variate-attribute quality control (MVAQC) (2014) (Minerva Access is the Institutional Repository of The University of Melbourne).*

Robinson, P. B., and Ho, T. Y. (1978). *"Run Length of Geometric Moving Average charts by Numerical Methods."*echnometrics, Vol 20, 85-93.