سیزدهمین کنفرانس آمار ایران
۴-۲ شهریور ۱۳۹۵

تحلیل بیز سلسله مراتبی مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی

منیر میرزائی[۱]، افشین فلاح[۲]
[۱] دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
[۲]گروه آمار دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

چکیده: در این مقاله، رویکرد بیز سلسله مراتبی تحلیل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی مورد توجه قرار گرفته است. در این نوع تحلیل رگرسیونی به جای میانگین، مجموعه‌ای از چندک‌ها برای تبیین توزیع متغیر پاسخ به‌کار گرفته می‌شوند. کارایی مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: چندک، رگرسیون چندکی، بیز، براوردگرهایی از نوع ماکسیمم درستنمایی
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۵, ۶۲G۰۸.

۱ مقدمه

بررسی تاثیر مجموعه‌ای از متغیرهای تبیینی بر یک یا چند متغیر پاسخ از جمله مسائل مهم در مدل‌سازی است که در قالب تحلیل رگرسیونی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش‌های معمول تحلیل رگرسیونی میانگین متغیر پاسخ یا تابعی از آن به‌صورت شرطی بر مجموعه‌ای از متغیرهای تبیینی مدل‌بندی می‌شود. چون میانگین یکی از معیارهای تمرکز است، به تنهایی نمی‌تواند توزیع متغیر پاسخ را در فرایند مدل‌سازی تبیین نماید. از طرفی، هنگامی‌که داده‌های دورافتاده‌ای وجود داشته باشد، در این صورت، به دلیل تاثیرپذیری میانگین از نقاط دورافتاده، یک مدل رگرسیون معمولی برای مدل‌سازی روابط بین متغیر پاسخ و متغیرهای تبیینی کفایت نمی‌کند و استفاده از روش کمترین توان‌های دوم خطا برای براورد پارامترهای مدل مناسب نیست. یک راه برای کاهش اثر این‌گونه داده‌ها استفاده از معیار قدرمطلق خطا است. برخلاف روش کمترین توان‌های دوم خطا، روش کمترین قدر مطلق خطا نسبت به داده‌های دور افتاده استوار است هابر (۲۰۰۹). به همین دلیل هاگ (۱۹۷۵) و کوانکر و همکاران (۱۹۷۸) تحلیل رگرسیون میانه را که در آن براورد پارامترهای مدل رگرسیونی با هدف مینیمم ساختن قدرمطلق خطا صورت می‌پذیرد، برای مدل‌سازی داده‌هایی که دارای نقاط دور افتاده هستند، پیشنهاد نمودند. رگرسیون چندکی را می‌توان تعمیمی از رگرسیون میانه دانست. در واقع، حالت خاص رگرسیون چندکی بر اساس مدل‌بندی چارک دوم متغیر پاسخ

[۲]نام ارائه دهنده مقاله :منیر میرزائی
A-10-461-2

حاصل می‌شود و به رگرسیون میانه شهرت دارد. نشان داده شده است که به‌دلیل شکل پیچیده تابع درستمایی مبتنی بر مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی، توزیع پسین فاقد فرم بسته بوده و شکل پیچیده‌ای دارد. از این‌رو، توزیع‌های پسین شرطی کامل پارامترها محاسبه و الگوریتم گیبز مناسب برای نمونه‌گیری از توزیع پسین توسعه داده شده است. همچنین کارایی مدل بیزی پیشنهادی در براورد پارامترهای مدل در مقایسه با مقادیر مدل‌های رقیب، بر اساس یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی، مورد ارزیابی قرار گرفته است.

در این مقاله برای تحلیل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی یک مدل بیزی پیشنهاد شده است. در بخش ۲ رویکرد فراوانی‌گرایانه مدل‌های رگرسیون چندکی، و چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی به طور اجمالی معرفی و نحوه براورد پارامترهای این مدل‌ها شرح داده می‌شود. در بخش ۳ تحلیل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی از دیدگاه بیزی مورد بحث قرار گرفته و نحوه تعیین توزیع پیشین، محاسبه توزیع پسین، نمونه‌گیری از توزیع پسین و غیره، شرح داده شده است. در بخش ۴ برای ارزیابی و مقایسه مدل‌های رگرسیون بیزی سلسله مراتبی و مدل‌های رقیب ، مطالعه‌ای شبیه‌سازی صورت پذیرفته است.

۲ تحلیل رگرسیون چندکی و چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی

هنگامی‌که در مجموعه داده‌ها یک یا چند داده پرت وجود داشته باشد، روش‌های رگرسیونی مبتنی بر مدل‌بندی میانگین پاسخ، کارایی لازم را نخواهند داشت. یک راه برای کاهش اثر این‌گونه داده‌ها استفاده از رگرسیون میانه است. فرض کنید y_i متغیر پاسخ و $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{x}_۱, ..., \boldsymbol{x}_p)$ بردار متغیرهای تبیینی متناظر با مشاهده iام را نشان می‌دهند. تابع زیان رگرسیون میانه را می‌توان به‌صورت

$$\rho_{۰/۵}(u_i) = ۰/۵ u_i I_{[۰,\infty)}(u_i) - (۱ - ۰/۵) u_i I_{(-\infty,۰)}(u_i), \qquad (۱.۲)$$

نوشت، تابع زیان مورد استفاده در رگرسیون میانه در رابطه‌ی (۱.۲) را می‌توان با جایگزینی ۰/۵ با $q \in (۰, ۱)$، به‌صورت

$$\rho_q(u_i) = q u_i I_{[۰,\infty)}(u_i) - (۱ - q) u_i I_{(-\infty,۰)}(u_i),$$

تعمیم داد. این تعمیم ساده در واقع همان ایده‌ی اصلی رگرسیون چندکی است. مدل رگرسیونی متناظر با چندک qام متغیر y_i که با $Q_q(y_i|\boldsymbol{x}_i)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت

$$Q_q(y|\boldsymbol{x}'_i) = \boldsymbol{x}'_i \boldsymbol{\beta}_q, \qquad i = ۱, ..., n,$$

است، که در آن براورد بردار ضرایب رگرسیونی $\boldsymbol{\beta}'_q = (\beta_۰, \beta_۱, ..., \beta_p)$، با استفاده از روش کمترین قدرمطلق خطا از طریق کمینه ساختن تابع زیان قدرمطلق خطای وزنی

$$\sum_{i=۱}^{n} | y_i - \boldsymbol{x}'_i \boldsymbol{\beta}_q | \{(۱ - q) I(y_i - \boldsymbol{x}'_i \boldsymbol{\beta}_q \le ۰) + q I(y_i - \boldsymbol{x}'_i \boldsymbol{\beta}_q > ۰)\},$$

به‌دست می‌اید. لازم به ذکر است که محاسبه جواب‌های این مسأله مینیمم‌سازی نیازمند کاربست روش‌های برنامه‌نویسی خطی است. چون الگوریتم‌های مورد استفاده برای برازش مدل‌های رگرسیون چندکی لزوماً همگرایی و جواب یکتا را تضمین نمی‌کنند، بریکلینگ و همکاران (۱۹۸۸) ایده‌ی رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی را مطرح ساختند. این نوع تحلیل رگرسیونی مبتنی بر براوردگرهایی از نوع ماکسیمم درستنمایی است و بر پایه یک تابع تاثیر تعریف می‌شود. اگر $\rho(\boldsymbol{\theta}, T_n)$ یک تابع زیان باشد، $\psi(\boldsymbol{\theta}; T_n) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \rho(\boldsymbol{\theta}; T_n)$ را

تابع تاثیر متناظر با آن گویند. در اینجا از ذکر جزئیات بیشتر درباره این نوع براوردگرها خودداری کرده و خواننده را به هابر (۲۰۰۹) ارجاع می‌دهیم. همان‌طورکه قبلاً ذکر شد رگرسیون چندکی تعمیمی از رگرسیون میانه است، رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی نیز تعمیمی از رگرسیون چندکی است که بر پایه یک تابع تاثیر تعریف می‌شود. در واقع در مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی با در نظر گرفتن تابع زیان هابر نوع ۲ با قرار دادن مقدار $c \to 0$ مدل رگرسیون چندکی، کوانکر و همکاران (۱۹۷۸) و $c \to \infty$ مدل رگرسیون انتظاره، کوانکر و همکاران (۱۹۷۸) به‌دست می‌اید. یک مدل رگرسیون چندکی شرطی از نوع ماکسیمم درستنمایی در حالت کلی به‌صورت

$$MQ_q = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}_\psi(q).$$

است. به‌ازای یک q مشخص و تابع تاثیر از پیش انتخاب شده‌ی ψ، براوردگر ضرایب رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی، از حل معادله‌ی

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_q(r_{iq\psi})\boldsymbol{x}_i = 0, \tag{۲.۲}$$

به‌دست می‌ایند، که در آن

$$\begin{aligned} r_{iq\psi} &= y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}_\psi(q), \\ \psi_q(iq\psi) &= 2\psi(s^{-1}r_{iq\psi})\{qI(r_{iq\psi} > 0) + (1-q)I(r_{iq\psi} \le 0)\}, \\ &= \begin{cases} 2q\psi(s^{-1}r_{iq\psi}) & r_{iq\psi} > 0 \\ 2(1-q)\psi(s^{-1}r_{iq\psi}) & r_{iq\psi} \le 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

و s یک براوردگر مناسب مقیاس، مانند براوردگر میانگین قدرمطلق خطا $s = \frac{1}{0/6745} median\{|u|\}$، است. گرچه هر تابع تاثیری را می‌توان در معادله‌ی (۲.۲) به‌کار بست، اما در این پژوهش به پیروی از بریکلینگ و همکاران (۱۹۸۸) تابع تاثیر هابر نوع ۲ که به‌صورت

$$\begin{aligned} \psi(u) &= uI(|u| \le c) + c\, sgn(u), \\ &= \begin{cases} u, & |u| \le c \\ sgn(u)c, & |u| > c, \end{cases} \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

تعریف می‌شود، استفاده شده است. در رابطه‌ی (۴.۲)، c کمیتی مثبت بوده و q ضریب چندکی نامیده می‌شود. از آنجا که براورد پارامترهای مدل در حالت فراوانی‌گرایانه فقط برای نمونه‌های بزرگ بهینه است و برای نمونه‌های کوچک با مشکلاتی مواجه است در این مقاله رهیافت بیز سلسله مراتبی مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۳ رویکرد بیز سلسله مراتبی

در این بخش تحلیل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی، از دیدگاه بیز سلسله مراتبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، مشاهدات $\boldsymbol{D} = \{(y_1, \boldsymbol{x}_1), ..., (y_n, \boldsymbol{x}_n)\}$ را که در آن $\boldsymbol{x}_i$ و y_i به‌ترتیب نشان دهنده مقادیر متغیرهای تبیینی و متغیر پاسخ حاصل از یک

نمونه تصادفی هستند، در نظر بگیرید. فرض کنید یک مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی با تابع زیان

$$\rho_q(u) = ۲\rho(\frac{u}{s})(qI(u > ۰) + (۱ - q)I(u \leq ۰)),$$

مدنظر باشد، که در آن

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{u^۲}{۲} & |u| \leq c \\ c|u| - \frac{c^۲}{۲} & |u| > c. \end{cases}$$

در این صورت، اگر برای متغیر پاسخ در مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی تابع چگالی کمترین اطلاع نامتقارن (ALI) به‌صورت

$$f(y) = \frac{۱}{B(q)s}\exp(-\rho_q(\frac{y - \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}}{s})), \quad (۱.۳)$$

در نظر گرفته شود، که در آن $s = \frac{۱}{\Phi^{-۱}(۳/۴)} median\{|u_q|\}$، $u = y - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}$ (بیانچی، ۲۰۱۳). می‌توان نشان داد که ثابت چگالی ساز، در رابطه(۱.۳) با محاسبه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\rho_q(u))du,$$

به‌صورت

$$\begin{aligned} B(q) &= \sqrt{\frac{\pi}{q}}[\Phi(c\sqrt{۲q}) - ۱/۲] + \sqrt{\frac{\pi}{۱-q}}[\Phi(c\sqrt{۲(۱-q)}) - ۱/۲] \\ &+ \frac{۱}{۲cq}\exp\{-c^۲q\} + \frac{۱}{۲c(۱-q)}\exp\{-c^۲(۱-q)\} \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

حاصل می‌شود، بیانچی (۲۰۱۳). بر این اساس، تابع درستنمایی متناظر با مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی به‌شکل

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{x}_۲, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\beta}, q) &= \Pi_{i=۱}^n f_{Y_i}(y_i|\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\beta}, q) \\ &= \Pi_{i=۱}^n\{\frac{۱}{sB(q)}\exp(-\rho_q(\frac{y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s}))\} \\ &= s^{-n}B(q)^{-n}(q)\exp(-\sum_{i=۱}^n \rho_q(\frac{y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s})), \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

است.

۱.۳ توزیع‌های پیشین

لازمه تحلیل بیزی مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی آن است که پارامترهای این مدل متغیرهایی تصادفی تلقی و برای آن‌ها توزیع‌های پیشین مناسب در نظر گرفته شود. با توجه به این‌که دامنه تغییرات پارامتر q و بردار پارامترهای $\boldsymbol{\beta}$ به‌ترتیب $(۰, ۱)$ و $\mathbb{R}^P$ است، در مقاله حاضر برای این پارامترها به‌ترتیب توزیع‌های پیشین بتا و نرمال چندمتغیره در نظر گرفته شده است. بسیاری از محققان، از جمله گلمن (۲۰۰۶)، استفاده از توزیع پیشین نرمال برای ضرایب مدل‌های رگرسیونی را در حالت کلی منطقی می‌دانند. بر این اساس، توزیع‌های پیشین پارامترهای مدل بیز سلسله مراتبی به‌صورت

$$\boldsymbol{\beta}|q, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Delta}, \eta, \xi \sim N_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Delta}), \quad \boldsymbol{\Delta} = diag(\delta_۱, ..., \delta_p),$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &\sim N_p(\boldsymbol{\mu}_\circ, \boldsymbol{\Sigma}_\circ),\\
۱/\delta_j &\sim Gamma(k_\circ, \ell_\circ), \quad k_\circ, \ell_\circ \in \mathbb{R},\\
q &\sim beta(\eta, \xi), \quad \eta > \circ, \xi > \circ,\\
\eta &\sim E(\lambda_\circ),\\
\xi &\sim E(\tau_\circ), \qquad (۴.۳)
\end{aligned}
$$

در نظر گرفته شده است، که در آن‌ها $\boldsymbol{\theta}$، $\boldsymbol{\Delta}$، $\boldsymbol{\mu}_\circ$، $\boldsymbol{\Sigma}_\circ$، $k_\circ$، $\ell_\circ$، $\lambda_\circ$ و $\tau_\circ$ ابر پارامترهای توزیع پیشین هستند و توسط تحلیل‌گر تعیین یا براورد می‌شوند. توزیع پیشین بتا خانواده‌ای به اندازه کافی غنی است و می‌توان انتظار داشت عضوی از این خانواده بتواند به‌خوبی تغییرپذیری و عدم قطعیت پارامتر q در بازه $(\circ, ۱)$ تبیین نماید. اکنون با در نظر گرفتن تابع درستنمایی (۳.۳) و توزیع‌های پیشین رابطه‌ی (۴.۳) توزیع پسین را می‌توان به‌صورت

$$
\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}, q, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Delta}, \eta, \xi|\boldsymbol{D}) &\propto s^{-n} B(q)^n(q)\exp(-\sum_{i=۱}^{n}\rho_q(\frac{y_i-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s})) \times \Phi_p(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Delta})\\
&\times \Phi_p(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\mu}_\circ,\boldsymbol{\Sigma}_\circ) \times dIG(\delta_j; k_\circ, l_\circ) \times dbeta(q;\eta,\xi) \times dexp(\tau_\circ) \times dexp(\lambda_\circ),\\
&\propto s^{-n} B(q)^n(q)\exp(-\sum_{i=۱}^{n}\rho_q(\frac{y_i-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s}))\\
&\times |\boldsymbol{\Delta}|^{-۱} exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\beta} - ۲\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta})\}\\
&\times q^{\eta-۱}(۱-q)^{\xi-۱} \times exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\beta}'|\Sigma|^{-۱} exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\boldsymbol{\theta} - ۲\boldsymbol{\theta}'\Sigma^{۱}\boldsymbol{\mu}_\circ)\}\\
&\times (\prod_{j=۱}^{p}\frac{۱}{\delta_j})^{k+۱} e^{-\ell_\circ \sum_{j=۱}^{p}\frac{۱}{\delta_j}} \times e^{-\lambda_\circ\eta} \times e^{-\tau_\circ\xi}, \qquad (۵.۳)
\end{aligned}
$$

نوشت، ملاحظه می‌شود که به‌دلیل شکل پیچیده تابع درستمایی مبتنی بر مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی، توزیع پسین فاقد فرم بسته بوده و شکل پیچیده‌ای دارد. از این رو، در ادامه از الگوریتم‌های مونت کارلویی زنجیر مارکف برای نمونه‌گیری از توزیع پسین و سپس استنباط‌های پسینی درباره پارامترها استفاده می‌شود.

۲.۳ توزیع‌های پسین شرطی کامل

در این بخش الگوریتم گیبز مناسب برای نمونه‌گیری از توزیع پسین (۵.۳) توسعه داده می‌شود. لازمه استفاده از الگوریتم گیبز، شناخت توزیع‌های پسین شرطی کامل پارامترها است. این توزیع‌ها با اندکی محاسبات به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$
\pi(\boldsymbol{\beta}|others) \propto \exp(-\sum_{i=۱}^{n}\rho_q(\frac{y_i-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s})) \times exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\beta} - ۲\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta})\}, \qquad (۶.۳)
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\theta}|others) &\propto \exp\{-\frac{۱}{۲}(-۲\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta})\} \times \exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\boldsymbol{\theta} - ۲\boldsymbol{\theta}'\Sigma^{۱}\boldsymbol{\mu}_\circ)\}\\
&\propto [\{\frac{-۱}{۲}(-۲\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Delta}|^{-۱}\boldsymbol{\theta})\} + \{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\boldsymbol{\theta} - ۲\boldsymbol{\theta}'\Sigma^{۱}\boldsymbol{\mu}_\circ)\}] \qquad (۷.۳)\\
&= \exp\{-\frac{۱}{۲}[\boldsymbol{\theta}'(\Sigma_\circ + \boldsymbol{\Delta}^{-۱})\boldsymbol{\theta} - ۲(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Delta}^{-۱} + \mu_\circ\Sigma_\circ^{-۱})\boldsymbol{\theta}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\pi(q|others) \propto B(q)^n(q)\exp(-\sum_{i=۱}^{n}\rho_q(\frac{y_i-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{s})) \times q^{\eta_\circ-۱}(۱-q)^{\xi_\circ-۱}, \qquad (۸.۳)
$$

$$
\pi(\delta_j|others) \propto exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\Sigma}|^{-۱} exp\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\boldsymbol{\theta} - ۲\boldsymbol{\theta}'\Sigma^{۱}\boldsymbol{\mu}_\circ)\}
$$

$$\begin{aligned}
&\times \quad (\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\delta_j})^{k+1}e^{-\ell_0\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\delta_j}}\\
&\propto \quad (\frac{1}{\delta_k})^{k+1+\frac{1}{2}}\times\exp\{-\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{\beta}_j^2\boldsymbol{\delta}_j^{-1}-2\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{\theta}_j\boldsymbol{\delta}_j^{-1})\}\times\exp\{-\ell_0\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{\delta}_j^{-1}\}\\
&\propto \quad (\frac{1}{\delta_k})^{k+1+\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_k^2-2\boldsymbol{\beta}_k\boldsymbol{\theta}_k+\boldsymbol{\theta}_k^2)\frac{1}{\boldsymbol{\delta}_k}\}\times\exp\{-\ell_0\frac{1}{\boldsymbol{\delta}_k}\}\\
&= \quad (\frac{1}{\delta_k})^{k+1+\frac{1}{2}}\exp\{(\frac{-(\boldsymbol{\beta}_k-\boldsymbol{\theta}_k)^2}{2}+\ell_0)\frac{1}{\boldsymbol{\delta}_k}\}, \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(\eta|others) &\propto q^{\eta-1}e^{-\lambda_0\eta}\\
&\propto e^{\log q^{\eta-1}}e^{-\lambda_0\eta}\\
&= e^{-\eta(\lambda_0-\log(q))}, \qquad (10.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(\xi|others) &\propto (1-q)^{\xi-1}e^{-\tau_0\xi}\\
&\propto e^{\log(1-q)^{\xi-1}}e^{-\tau_0\xi}\\
&= e^{-\xi(\tau_0-\log(1-q))}. \qquad (11.3)
\end{aligned}$$

بر این اساس توزیع‌های پسین شرطی کامل عبارتند:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}|others &\sim N((\boldsymbol{\Sigma}_0+\boldsymbol{\Delta}^{-1})^{-1})(\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\mu}_0'\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}),(\boldsymbol{\Sigma}_0+\boldsymbol{\Delta}^{-1})^{-1})\\
\boldsymbol{\delta}_j|others &\sim IGamma(k_0+\frac{1}{2},\frac{(\boldsymbol{\beta}_k-\boldsymbol{\theta}_k)^2}{2}+\ell_0)\\
\eta|others &\sim E(\lambda_0-\log q) \qquad \lambda_0>\log q\\
\xi|others &\sim E(\tau_0-\log(1-q)) \qquad \tau_0>\log(1-q) \qquad (12.3)
\end{aligned}$$

اکنون با در دست داشتن توزیع‌های پسین شرطی کامل می‌توان از توزیع پسین توام پارامترها به کمک الگوریتم گیبز نمونه‌گیری نمود. از آن‌جا که توزیع پسین شرطی کامل پارامترهای β و q صورت بسته و شناخته شده‌ای ندارد، بنابراین از الگوریتم متروپولیس-هستینگز برای نمونه‌گیری از این توزیع‌های پسین شرطی کامل استفاده می‌شود. بر این اساس، برای نمونه‌گیری از توزیع پسین (۵.۳) به تلفیقی از الگوریتم‌های گیبز و متروپولیس-هاستینگز نیاز است.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش مدل بیزی پیشنهادی در چارچوب یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته و کارایی آن با مدل‌های رقیب مقایسه می‌شود. برای این منظور یک مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی به‌شکل

$$MQ=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}=\beta_{0\psi}+\beta_{1\psi}(q)x_1+\beta_{2\psi}(q)x_2, \qquad (1.4)$$

در نظر گرفته شده است، مقادیر متغیرهای تبیینی از توزیع نرمال شبیه‌سازی شده‌اند. سپس با فرض $\beta_0=1$، $\beta_1=2$ و $\beta_2=3$ ، بردار مشاهدات پاسخ از توزیع ALI شبیه‌سازی شده‌اند. به‌منظور لحاظ نمودن عدم قطعیت حاکم بر فرایند تولید نمونه‌های تصادفی، فرایند تولید نمونه‌های تصادفی و براورد پارامترها ۵۰۰ بار تکرار و بر اساس آن‌ها مقادیر ریشه توان‌های دوم خطای براوردگرهای حاصل

جدول ۱: مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطا ($RMSE$) براوردگرهای حاصل از رهیافت بیز سلسله مراتبی مدل رگرسیون چندکی و چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی و انتظاره برای اندازه نمونه ۱۰، به‌ازای چندک $q = ۰/۵$ و.

چندک(q)	اندازه نمونه(n)	پارامتر	مدل: چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی	چندکی	انتظاره
		β_0	۰/۴۶۳۲	۰/۴۷۷۹	۳/۱۱۱۲
۰/۵	۱۰	β_1	۰/۳۷۷۰	۰/۴۱۵۷	۴/۰۴۳۵
		β_2	۰/۴۰۱۶	۰/۴۰۶۳	۵/۵۳۱۹

از مدل‌های رقیب به‌ازای $q = ۰/۵$ و اندازه‌های نمونه $n = ۱۰$ محاسبه و در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که رویکرد بیزی تحلیل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی در مقایسه با مدل‌های رقیب از کارایی مطلوب‌تری برخوردار است. نتایج برای اندازه نمونه‌های بزرگ‌تر نیز مشابه بوده است که به دلیل کمبود فضا ارائه نشده‌اند.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

روش‌های مرسوم تحلیل رگرسیون که میانگین متغیر پاسخ را مدل‌بندی می‌کنند، در بسیاری از کاربردها دارای کارایی لازم نیستند. مدل رگرسیون چندکی از نوع ماکسیمم درستنمایی تعمیمی از رگرسیون چندکی است که بر پایه یک تابع تاثیر تعریف می‌شود و در آن به‌جای میانگین پاسخ، چندک‌های متغیر پاسخ به‌صورت شرطی در سطوح مختلف متغیرهای تبیینی مبنای مدل‌سازی قرار می‌گیرند. رویکرد فراوانی‌گرایانه این نوع مدل‌سازی با برخی مشکلات محاسباتی مواجه است. اما رویکرد بیزی آن کاملا سرراست بوده و دست کم برای اندازه نمونه‌های کوچک نسبت به سایر مدل‌های رقیب به‌طور قابل توجیهی کاراتر است.

مراجع

Breckling, J and Chambers, R. (1985), *M-Quantiles*, 75, 761-771.

Bianchi, A and Salvati, R. (2013), *Asymetric Properties and Variance Estimation of the M-quantile Regression Coefficient Estimators*, Communications in Statistics-Theory and Methods.

Hogg, R. V. (1975), *Estimates of Precentile Regression Lines Using Salary Data*, Journal of the American Statistical Association, 515-533.

Huber, P. J. (2009) Robust Statistics, *Wiley, NewYork*.

Gelman, A. (2006)*Prior Distribution for Variance Parameters in Hierachical Models*, Bayesian Analysis.

Koenker, R., and Bassett, G. (1978) *Regression Quantiles*, Econometrica, 33-50.