

## حل مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و $k$ -منتظم با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

مسعود مشرقی  
دانشگاه حکیم سبزواری

سید مرتضی احمدی  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

اکرم پورمیر\*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

در این مقاله ابتدا نشان می دهیم که ماتریس مجاورت گراف کامل به ازای  $k \geq 1$  تصادفی دوگانه متقارن  $k$ -تعمیم یافته می باشد و سپس نشان می دهیم ماتریس مجاورت گراف  $1$ -منتظم تصادفی دوگانه متقارن است و سپس با مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که توسط طیف شان در  $\Delta_n^s$  مشخص می شوند، ماتریس مجاورت گراف های منتظم را به دست می آوریم و در انتها نتایج به دست آمده را بیان می کنیم.

واژه های کلیدی: مساله مقدار ویژه معکوس، ماتریس تصادفی دوگانه، گراف کامل، گراف  $k$ -منتظم، ماتریس مجاورت

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

### ۱ مقدمه

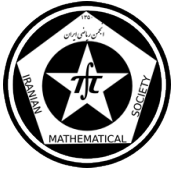
ماتریس مجاورت گراف ساده  $G$  را با  $A(G)$  نمایش می دهیم که ماتریس  $(0,1)$ -متقارن نامنفی است و مقادیر ویژه  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  که طیف  $G$  می باشد را  $\sigma(G)$  می نامیم و  $\sigma(G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  گراف  $G$  صحیح نامیده می شود اگر تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح باشند و اگر  $A(G)$  دوری باشد آنگاه دوری نامیده می شود. در مجموع گراف  $G$ ،  $k$ -منتظم نامیده می شود اگر درجه هر راس آن  $k$  باشد. گراف اکیدا منتظم  $G$  با پارامترهای  $(\nu, \kappa, \lambda, \mu)$ ،  $k$ -منتظم است که کامل نمی باشد و در دو شرط زیر صدق می کند:

۱. برای هر زوج از رئوس مجاور،  $\lambda$  رئوس مجاور در هر دو وجود داشته باشد.

۲. برای هر زوج از رئوس غیرمجاور،  $\mu$  رئوس مجاور در هر دو وجود داشته باشند.

گراف کامل روی  $n$  راس که هر راس به رئوس دیگر متصل است را با  $k_n$  نشان می دهیم. علاوه بر این در گراف کامل دو قسمتی  $k_{n_1, n_2}$ ، رئوس به دو زیر مجموعه  $v_1$  و  $v_2$  از هریک از عناصر  $n_1$  و  $n_2$  تقسیم می شود و دو راس مجاور هستند اگر و تنها اگر یکی در  $v_1$  باشد و دیگری در  $v_2$  باشد. دوگراف ایزومرفیک گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس مجاورت آنها به طور جایگشتی متشابه باشد. دوگراف هم طیف گفته می شود اگر طیف مشابه داشته باشند و گراف  $G$ ،  $DS$  گفته می شود اگر هر گراف  $H$  که هم طیف  $G$  است ایزومرفیک  $G$  باشد. در کل مساله مشخص کردن این که آیا گراف  $G$ ،  $DS$  هست یا نه، هنوز باز است. در این مقاله به بحث درباره اینکه گراف منتظم  $DS$  است یا نه، با توجه به رابطه آن با مسئله مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که  $DS$  در  $\Delta_n^s$  است، می پردازیم. اما ابتدا یادآوری می کنیم که اگر  $G$  گراف  $k$ -منتظم روی  $n$  راس باشد آنگاه شعاع طیفی  $A(G)$  مساوی  $K$  مقدار ویژه  $G$  مربوط به بردار ویژه واحد  $(e_n)$  برابر  $k$  است.

\* سخنران



## ۲ رابطه بین ماتریس مجاورت گراف و ماتریس تصادفی دوگانه

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $\Omega_n^s(k)$  مجموعه همه ماتریس های متقارن نامنفی از مرتبه  $n \times n$  باشد که مجموع هر سطر و ستون آن مساوی  $k$  باشد و  $\Lambda_n(k)$  نمایش زیر مجموعه  $\Omega_n^s(k)$  متشکل از همه ماتریس های  $(0,1)$ - که  $k$ ،  $1$  در هر سطر و ستون دارد و  $\Lambda_n^\circ(k)$  مجموعه عناصر  $\Lambda_n(k)$  می باشد که اثر صفر دارد.

**قضیه ۲.۲.** هر ماتریس مجاورت گراف کامل  $k_n$ ،  $(n \geq 2)$  تصادفی دوگانه  $n$ - تعمیم یافته می باشد.

**قضیه ۳.۲.** هر ماتریس مجاورت گراف  $1$ - منتظم تصادفی دوگانه است.

**قضیه ۴.۲.**  $A \in \lambda_n^\circ(k)$  اگر و تنها اگر  $A$  ماتریس مجاورت گراف های  $k$ - منتظم که  $n$  راس و  $k$  یال دارد، می باشد.

**اثبات.** ابتدا فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت گراف منتظم که  $n$  راس و  $k$  یال دارد، باشد. آنگاه واضح است که  $A$  ماتریس متقارن نامنفی از مرتبه  $n \times n$  می باشد. اگر مجموع هر سطر و ستون آن مساوی  $k$  است و دارای اثر صفر می باشد پس  $A \in \lambda_n^\circ(k)$ . برعکس فرض کنید  $A \in \lambda_n^\circ(k)$  آنگاه  $A$  ماتریس مجاورت گراف منتظم که  $n$  راس و  $n$  یال دارد، می باشد.  $\square$

**قضیه ۵.۲.**  $A \in \lambda_n^s(k)$  اگر و تنها اگر  $\frac{1}{k}A$  عنصر  $\Delta_n^s$  باشد.

**نتیجه ۶.۲.**  $A \in \lambda_n(k)$  در  $DS$ ،  $\Omega_n^s(k)$  است اگر و تنها اگر  $\frac{1}{k}A$  در  $DS$ ،  $\Delta_n^s$  است.

## ۳ حل مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس مجاورت با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

**قضیه ۱.۳.** گراف های  $1$ - منتظم  $DS$  هستند.

**اثبات.** فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت گراف  $1$ - منتظم باشد آنگاه چون  $A$  ماتریس جایگشتی تحویل ناپذیر است، به ازای ماتریس معکوس پذیر  $X$  داریم  $X^{-1}AX = B$  و  $B$  تصادفی دوگانه است و همچنین  $B$  تحویل ناپذیر می باشد و همه مقادیر ویژه آن قدر مطلق  $1$  دارند بنابراین  $A$  و  $B$  هم طیف می باشند و همچنین به طور جایگشتی مشابه هستند و لذا  $A$  و  $B$  ایزومرفیک بوده و بنابراین  $A$ ،  $DC$  می باشد.  $\square$

**مثال ۲.۳.** طیف  $\{1, -1\}$  گراف  $1$ - منتظم مرتبه  $2$  را مشخص می کند و همچنین  $\{1, 1, -1, -1\}$  گراف  $1$ - منتظم مرتبه  $4$  را مشخص می کند.

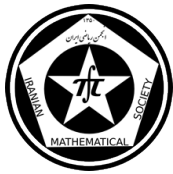
**قضیه ۳.۳.** هر گراف کامل  $k_n$ ،  $DS$  است.

**اثبات.** داریم  $\frac{1}{k}A(k_n) = c_n$  آنگاه چون

$$c_n = \frac{n}{n-1}J_n - \frac{1}{n-1}I_n$$

و برای هر ماتریس وارون پذیر  $X$  به طوری که  $X^{-1}C_nX$  تصادفی دوگانه متقارن باشد، ما به دست می آوریم

$$X^{-1}C_nX + \frac{1}{n-1}I_n = \frac{n}{n-1}X^{-1}J_nX$$



که سمت چپ ماتریس نامنفی است که مجموع سطر و ستون مساوی  $\frac{1}{n-1} + 1$  می باشد بنابراین

$$X^{-1} J_n X = \frac{n-1}{n} (X^{-1} C_n X + \frac{1}{n-1} I_n)$$

تصادفی دوگانه متقارن است و چون  $X^{-1} J_n X = J_n$  لذا  $A(k_n)$  DS است. □

مثال ۴.۳. طیف  $\{(n-1), -1, \dots, -1\}$  گراف کامل  $K_n$  را مشخص می کند.

قضیه ۵.۳. ناحیه غیرمشترک گرافهای کامل DS است.

اثبات. داریم  $\frac{1}{k} A(k_n) = c_n$  به استقرا اثبات می کنیم ابتدا نشان می دهیم  $c_n \oplus c_n$  در DS،  $\Delta_{2n}$  است. اگر  $z \in \Delta_{2n}$  متشابه  $c_n \oplus c_n$  باشد آن گاه به وضوح طیف  $z$  برابر  $(1, 1, \frac{-1}{n-1}, \dots, \frac{-1}{n-1})$  می باشد چون  $z$  تحویل ناپذیر است و مقدار ویژه ۱ دوبار تکرار می شود آن گاه  $z$  به طور جایگشتی متشابه مجموع مستقیم دو ماتریس تصادفی دوگانه  $B$  و  $C$  است اما اثرهای  $B$  و  $C$  صفر هستند به طوری که در صورت لزوم طیف  $B$  و  $C$  مشابه و مساوی  $(1, \frac{-1}{n-1}, \dots, \frac{-1}{n-1})$  می باشد با توجه به این که اگر  $B = X^{-1} J_n X$  تصادفی دوگانه باشد آن گاه وجود دارد  $Y \in \Delta_n$  به طوری که  $B = Y^{-1} J_n Y$  و از اینرو  $B = C = C_n$  و بنابراین این براساس استقرا روی  $n$  برای هر عدد صحیح مثبت  $n_1, \dots, n_k$  ماتریس  $c_{n_1} \oplus \dots \oplus c_{n_k}$  در  $\Delta_{n_1+\dots+n_k}$  DS است. □

## ۴ نتایج اصلی

۱.  $k_{n,n}$ ، DS هست.

اثبات. نتیجه قضیه (۲.۲)، (۱.۳):

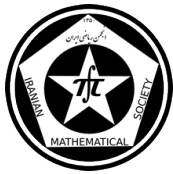
ابتدا ثابت می کنیم که  $I$  و  $J$  در  $\Delta_{2n}$ ، DS هستند اگر وجود داشته باشد  $Z \in \Delta_{2n}$  که متشابه  $J$  هست، آنگاه بوضوح طیف  $Z$  برابر  $(1, 0, \dots, 0, -1) \in R^{2n}$  آنگاه  $Z$  بطور جایگشتی متشابه ماتریس به شکل  $\begin{bmatrix} \circ & D \\ D^T & \circ \end{bmatrix}$   $D \in \Delta_n$  می باشد به طوری که  $DD^T \in \Delta_n^s$  و مقادیر ویژه آن  $(1, 0, \dots, 0)$  و بنابراین  $DD^T$  متشابه  $J_n$  است آنگاه،  $DD^T = J_n$  و چون

$$\text{rank}(D) = \text{rank}(DD^T) = \text{rank}(J_n) = 1$$

آنگاه  $D = J_n$  و بنابراین  $Z = J$  حالا فرض می کنیم که  $S \in \Delta_{2n}$  متشابه  $I$  است آنگاه  $S$  طیف  $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  را دارد و بنابراین  $S$  بطور جایگشتی متشابه  $c_2 \oplus \dots \oplus c_2$  ( $n$  مرتبه) می باشد و لذا  $I$  و  $S$  بطور جایگشتی متشابه هستند چون  $C = \frac{n}{n-1} J - \frac{1}{n-1} I$  آنگاه  $C$  در  $\Delta_{2n}$ ، DS می باشد □

۲. با استفاده از گراف های منظم هم طیف  $h$  ایزومرفیک نیستند می توان ماتریس تصادفی دو گانه که در  $\Delta_n^s$ ، DS نیستند را به دست آورد.

۳. اگر  $G$  گراف  $k$ -منظم باشد که DS می باشد آنگاه  $\frac{1}{k} A(G)$ ، DS می باشد.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران  
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴  
دانشگاه یزد



پوستر حل مساله مقدارویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و  $k$ -منتظم با استفاده از ماتریس ... ص: ۴-۴

## مراجع

- [1] RB. Bapat, *Graphs and matrices*, New York (N,Y), Springer, 2010.
- [2] AE. Brouwer, WH. Haemers, *Spectra of graphs*, New York (N,Y), Springer, 2011.
- [3] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic *An Introduction to the theory of graph spectra*, Cambridge:Cambridge University Press, 2010.
- [4] ER. Vandam, WH. Haemersl, *Which graphs are determined by their spectra*, Linear Algebra Appl, 373 (2003), pp. 241-272.
- [5] LG. Wang ,H. Sun *Infinitely many pairs of cospectral integral regular graphs*, Appl. Math, 26 (2011), pp. 280-286.

پست الکترونیکی: purmirakram@yahoo.com  
پست الکترونیکی: math.ahmadi67@yahoo.com  
پست الکترونیکی: Massoud.mashreghi@gmail.com