چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳–۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد

حل مساله مقدارویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و k-منتظم با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

اکرم پورمیر[*]
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

سید مرتضی احمدی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

مسعود مشرقی
دانشگاه حکیم سبزواری

دراین مقاله ابتدا نشان می دهیم که ماتریس مجاورت گراف کامل به ازای $k \geq ۱$ تصادفی دوگانه متقارن k-تعمیم یافته می باشد وسپس نشان می دهیم ماتریس مجاورت گراف1-منتظم تصادفی دوگانه متقارن است وسپس با مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که توسط طیف شان در Δ_n^sمشخص می شوند، ماتریس مجاورت گراف های منتظم را به دست می آوریم و در انتها نتایج به دست آمده را بیان می کنیم.

واژه‌های کلیدی: مساله مقدار ویژه معکوس،ماتریس تصادفی دوگانه، گراف کامل، گراف k- منتظم، ماتریس مجاورت
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

ماتریس مجاورت گراف ساده G را با A(G) نمایش می دهیم که ماتریس (0,1)- متقارن نامنفی است و مقادیر ویژه $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ که طیف G می باشد را $\sigma(G)$ می نامیم و $\sigma(G) = \{\lambda_۱, ..., \lambda_n\}$ گراف G صحیح نامیده می شود اگرتمام مقادیر ویژه آن اعدادصحیح باشند و اگر $A(G)$ دوری باشد آنگاه دوری نامیده می شود. درمجموع گراف G ، k- منتظم نامیده می شود اگر درجه هرراس آن k باشد. گراف اکیدا منتظم G با پارامتر های $(\nu, \kappa, \lambda, \mu)$ ، k-منتظم است که کامل نمی باشد و در دوشرط زیرصدق می کنند:

۱. برای هر زوج ازرئوس مجاور، λ رئوس مجاور در هر دو وجود داشته باشد.

۲. برای هر زوج از رئوس غیرمجاور، μرئوس مجاور درهردو وجود داشته باشند.

گراف کامل روی n راس که هرراس به رئوس دیگرمتصل است را با k_n نشان می دهیم. علاوه بر این درگراف کامل دو قسمتی $k_{n_۱,n_۲}$ ، رئوس به دو زیر مجموعه $v_۱$ و $v_۲$ از هریک از عناصر $n_۱$ و $n_۲$ تقسیم می شود ودو راس مجاور هستنداگر و تنها اگریکی در $v_۱$ باشد و دیگری در $v_۲$ باشد. دوگراف ایزومرفیک گفته می شود اگر و تنها اگرماتریس مجاورت آنها به طورجایگشتی متشابه باشد.دوگراف هم طیف گفته می شود اگر طیف مشابه داشته باشند وگراف G ، DS گفته می شود اگر هر گراف H که هم طیف G است ایزومرفیک G باشد. در کل مساله مشخص کردن این که آیا گراف G ، DS هست یا نه، هنوز بازاست. در این مقاله به بحث درباره اینکه گراف منتظم DS است یا نه ،باتوجه به رابطه آن با مسئله مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که DS در Δ_n^s است، می پردازیم. اما ابتدا یادآوری می کنیم که اگر G گراف k- منتظم روی n راس باشد آنگاه شعاع طیفی A(G) مساوی K ومقدار ویژه G مربوط به بردار ویژه واحد (e_n) برابر k است.

[*]سخنران

۲ رابطه بین ماتریس مجاورت گراف و ماتریس تصادفی دوگانه

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\Omega_n^s(k)$ مجموعه همه ماتریس های متقارن نامنفی از مرتبه $n \times n$ باشد که مجموع هرسطر و ستون آن مساوی k باشد و $\Lambda_n(k)$ نمایش زیر مجموعه $\Omega_n^s(k)$ متشکل از همه ماتریس های (0.1)- که k ، ۱ در هر سطر و ستون دارد و $\Lambda_n^\circ(k)$ مجموعه عناصر $\Lambda_n(k)$ می باشد که اثر صفر دارد.

قضیه ۲.۲. *هرماتریس مجاورت گراف کامل k_n ، $(n \geq ۲)$ تصادفی دوگانه n- تعمیم یافته می باشد.*

قضیه ۳.۲. *هر ماتریس مجاورت گراف 1- منتظم تصادفی دوگانه است.*

قضیه ۴.۲. *$A \in \lambda_n^\circ(k)$ اگرو تنها اگر A ماتریس مجاورت گراف هایk- منتظم‌که n راس و k یال دارد، می باشد.*

اثبات. ابتدا فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف منتظم که n راس و k یال دارد، باشد.آنگاه واضح است که A ماتریس متقارن نامنفی از مرتبه $n \times n$می باشد.اگرمجموع هر سطر و ستون ان مساوی k است و دارای اثر صفر می باشد پس $A \in \lambda_n^\circ(k)$. برعکس فرض کنید $A \in \lambda_n^\circ(k)$ آنگاه A ماتریس مجاورت گراف منتظم که n راس و n یال دارد ،می باشد. □

قضیه ۵.۲. *$A \in \lambda_n^s(k)$ اگرو تنها اگر $\frac{۱}{k}A$ عنصر Δ_n^s باشد.*

نتیجه ۶.۲. *$A \in \lambda_n(k)$، DS در $\Omega_n^s(k)$ است اگر و تنها اگر $\frac{۱}{k}A$ ، DS در Δ_n^s است.*

۳ حل مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس مجاورت با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

قضیه ۱.۳. *گراف های 1- منتظم DS هستند.*

اثبات. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف 1- منتظم باشدآنگاه چون A ماتریس جایگشتی تحویل ناپذیر است، به ازای ماتریس معکوس پذیر Xداریم $X^{-۱}AX = B$ و Bتصادفی دوگانه است و همچنین B تحویل ناپذیر می باشد و همه مقادیر ویژه آن قدرمطلق ۱ دارند بنابراین A و B هم طیف می باشند و همچنین به طور جایگشتی متشابه هستند و لذا A و B ایزومرفیک بوده و بنابراین A ، DC می باشد. □

مثال ۲.۳. طیف $\{۱, -۱\}$ گراف 1-منتظم مرتبه ۲ را مشخص می کند و همچنین $\{۱, ۱, -۱, -۱\}$ گراف 1- منتظم مرتبه ۴ را مشخص می کند .

قضیه ۳.۳. *هرگراف کامل k_n ، DS است.*

اثبات. داریم $\frac{۱}{k}A(k_n) = c_n$ آنگاه چون

$$c_n = \frac{n}{n-۱}J_n - \frac{۱}{n-۱}I_n$$

و برای هر ماتریس وارون پذیر X به طوری که $X^{-۱}C_nX$ تصادفی دوگانه متقان باشد، ما به دست می آوریم

$$X^{-۱}C_nX + \frac{۱}{n-۱}I_n = \frac{n}{n-۱}X^{-۱}J_nX$$

که سمت چپ ماتریس نامنفی است که مجموع سطر و ستون مساوی $\frac{1}{n-1}+1$ می باشد بنابراین

$$X^{-1}J_nX=\frac{n-1}{n}(X^{-1}C_nX+\frac{1}{n-1}I_n)$$

تصادفی دوگانه متقارن است و چون $X^{-1}J_nX=J_n$ لذا $A(k_n)$ ، DS است. □

مثال ۴.۳. طیف $\{(n-1),-1,...,-1\}$ گراف کامل K_n را مشخص می کند.

قضیه ۵.۳. *ناحیه غیرمشترک گرافهای کامل DS است.*

اثبات. داریم $\frac{1}{k}A(k_n)=c_n$ به استقرا اثبات می کنیم ابتدا نشان می دهیم $c_n\oplus c_n$ ، DSدر Δ_{2n} است. اگر $z\in\Delta_{2n}$ متشابه $c_n\oplus c_n$ باشد آن گاه به وضوح طیف z برابر $(1,1,\frac{-1}{n-1},...,\frac{-1}{n-1})$می باشدچون z تحویل ناپذیر است و مقدار ویژه ۱ دوبار تکرار می شود آن گاه z به طور جایگشتی متشابه مجموع مستقیم دو ماتریس تصادفی دوگانه B و C است اما اثرهای Bو C صفر هستند به طوری که در صورت لزوم طیف B و C مشابه و مساوی $(1,\frac{-1}{n-1},...,\frac{-1}{n-1})$ می باشد باتوجه به این که اگر $B=X^{-1}J_nX$ تصادفی دوگانه باشدآنگاه وجود دارد $Y\in\Delta_n$ به طوری که $B=Y^{-1}J_nY$ و از اینرو $B=C=C_n$ و بنابراین این براساس استقرا روی n برای هر عدد صحیح مثبت $n_1,...,n_k$ ماتریس $c_{n_1}\oplus...\oplus c_{n_k}$ در $\Delta_{n_1+...+n_k}$ ، DS است. □

۴ نتایج اصلی

۱. $k_{n,n}$ ، DS هست.

اثبات. نتیجه قضیه (۲.۲) ، (۱.۳) :

ابتدا ثابت می کنیم که I و J در Δ_{2n} ، DSهستند اگر وجود داشته باشد $Z\in\Delta_{2n}$ که متشابه J هست ، آنگاه بوضوح طیف Z برابر $(1,0,...,0,-1)\in R^{2n}$ آنگاه Z بطور جایگشتی متشابه ماتریس به شکل $\begin{bmatrix}0 & D\\ D^T & 0\end{bmatrix}$ که $D\in\Delta_n$ می باشد به طوری که $DD^T\in\Delta_n^s$ و مقادیر ویژه آن $(1,0,...,0)$ وبنابراین DD^T متشابه J_n است آنگاه، $DD^T=J_n$ و چون

$$rank(D)=rank(DD^T)=rank(J_n)=1$$

آنگاه $D=J_n$ و بنابراین $Z=J$ حالا فرض می کنیم که $S\in\Delta_{2n}$ متشابه I است آنگاه S طیف $(1,...,1,-1,...,-1)$ را دارد و بنابراین S بطور جایگشتی متشابه $c_2\oplus...\oplus c_2$ (n مرتبه) می باشد ولذا I و S بطور جایگشتی متشابه هستند چون $C=\frac{n}{n-1}J-\frac{1}{n-1}I$ آنگاه C در Δ_{2n} ، DS می باشد □

۲. با استفاده از گراف های منظم هم طیف ه ایزومرفیک نیستند می توان ماتریس تصادفی دو گانه که در Δ_n^s، DS نیستند را به دست آورد.

۳. اگر G گراف k- منظم باشد که DS می باشد آنگاه $\frac{1}{k}A(G)$ ، DS می باشد.

مراجع

[1] RB. Bapat, *Graphs and matrices*, New York (N,Y), Springer, 2010.

[2] AE. Brouwer, WH. Haemers, *Spectra of graphs*, New York (N,Y), Springer, 2011.

[3] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic *An Introduction to the theory of graph spectra*, Cambridge:Cambridge University Press, 2010.

[4] ER. Vandam, WH. Haemersl, *Which graphs are determined by their spectra*, Linear Algebra Appl, 373 (2003), pp. 241–272.

[5] LG. Wang ,H. Sun *Infinitely many pairs of cospectral integral regular graphs*, Appl. Math, 26 (2011), pp. 280–286.

پست الکترونیکی: purmirakram@yahoo.com
پست الکترونیکی: math.ahmadi67@yahoo.com
پست الکترونیکی: Massoud.mashreghi@gmail.com