

روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار

محمد رضا ضرابی
دانشگاه دامغان

علی اکبر نیا
دانشگاه پیام نور

مریم طاعتی*
دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله الگوریتمی مبتنی بر مفهوم زیرگرادیان برای حل مسایل بهینه سازی ناهموار مورد بررسی قرار گرفته است. این الگوریتم برای کمینه سازی موضعی توابع لیپ شیتز ارایه شده است. در این الگوریتم جهت کاهشی با حل دستگاه نامعادلات خطی محاسبه شده و همگرایی الگوریتم برای توابع شبه مشتق پذیر نیمه هموار نیز بررسی شده است. نتایج عددی با هر دو تابع هدف منظم و نامنظم ارایه گردیده و برای سرعت همگرایی بهتر زیرگرادیان تصویری در الگوریتم جهت کاهشی با روش مستقیم با استفاده از قضایای مربوطه جایگزین شده است. الگوریتم پیشنهاد شده با دو نمونه متفاوت آزمون شده و با به کارگیری نتایج عددی مقایسه شده است، نتایج حاصل برتری الگوریتم پیشنهاد شده را نسبت به روش زیرگرادیان تقریبی نشان می دهد.

واژه های کلیدی: روش زیرگرادیان تقریبی، زیرمشتق رابینوف-دمیانوف، گرادیان گسسته.

۱ مقدمه

برای حل مسایل بهینه سازی ناهموار از تعمیم تعریف های جدید مشتق استفاده شده است. مفهوم زیرگرادیان که با تعریف مجموعه ای از بردارها معرفی می شود، برای توابع محدب اولین بار به عنوان تعمیمی برای مشتق اول طرح و بررسی شد. ضعف عمده در زیرمشتق، بزرگ بودن مجموعه تعریف شده در آن است و آن هم ناشی از نوع تعریف مشتق سوئی است. برای رفع این مشکل تعریف های جدیدی از مشتق سوئی ارایه و بر اساس آنها تعمیم های جدیدی از مشتق مطرح شده است که از شبه مشتق میانوف-رابینوف^۱ و زیرمشتق میشل-پنو^۲ می توان به عنوان مهم ترین این تعمیم ها نام برد. اما زیرمشتق، تعمیمی از مشتق است که به راحتی قابل پیاده سازی عددی می شود، تعریف های معرفی شده برای تعمیم های مشتق تنها برای توابع لیپ شیتز موضعی ارایه شده اند.

در دهه های اخیر تلاش برای تعمیم تعریف مشتق به توابع نیم پیوسته پایینی^۳ با استفاده از تعریف گراف تابع ادامه یافته است. اکثر الگوریتم هایی که برای مسایل بهینه سازی ناهموار کارایی دارند از الگوریتم های مرتبه اول استفاده می کنند که این الگوریتم ها نیز مشتق اول توابع را به کار می گیرند و بدین منظور ابتدا توابع به صورت تقریبی هموارسازی می شود. برای نمونه می توان از الگوریتم شور^۴ که برای حل مسایل بهینه سازی محدب به کار می رود و الگوریتم های گرادیان گسسته^۵ و زیرگرادیان تقریبی^۶ که برای حل مسایل بهینه سازی نیمه هموار^۷ به کار می روند، نام برد.

* سخنران

^۱Demyanov-Rubinov

^۲Michel-Penot

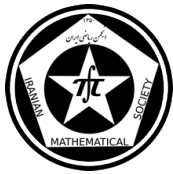
^۳Lower semicontinuous

^۴Shor algorithm

^۵Discrete gradient

^۶Approximate subgradient algorithm

^۷Semismooth



تعریف ۱.۱. تابع منظم f را شبه مشتق رابینوف دمیانونف روی \mathbb{R}^n گویند اگر نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد و برای تمامی $x, g \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f'(x, g) = f^\circ(x, g)$ که $f'(x, g)$ مشتق جهتی f در نقطه x نسبت به جهت g است که به صورت زیر تعریف می شود

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-1} [f(x + \alpha g) - f(x)],$$

مشتق جهتی $f'(x, g)$ نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ پیوسته بالایی است.

تعریف ۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ را در نظر بگیرید، تابع f روی \mathbb{R}^n نیم پیوسته پایینی (l.s.c) است، اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$f(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

تعریف ۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نیمه هموار در $x \in \mathbb{R}^n$ نامیده می شود اگر به طور موضعی پیوسته لیپشیتز باشد و برای هر $g \in \mathbb{R}^n$ حد زیر وجود داشته باشد،

$$\lim_{v \in \partial f(x + \alpha g'), g \rightarrow g', \alpha \rightarrow +0} \langle v, g \rangle.$$

قضیه ۴.۱. اگر سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1. \quad (1)$$

قابل حل نبود آنگاه

$$\min_{v \in \bar{D}_k(x)} \|v\| < \delta. \quad (2)$$

ملاحظه ۵.۱. قضیه فوق نتیجه می دهد که اگر در گام دوم الگوریتم کاهش، سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1$$

قابل حل نبود آنگاه نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ را می توان به صورت جواب تقریبی در نظر گرفت.

گزاره ۶.۱. اگر

$$\min_{v \in \bar{D}_k(x)} \|v\| < \delta$$

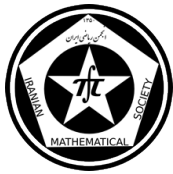
صدق کند آنگاه سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1$$

قابل حل نیست.

لم ۷.۱. اگر f یک تابع به طور موضعی لیپ شیتز روی \mathbb{R}^n باشد آنگاه در الگوریتم جهت کاهش شرط توقف بعد از تعداد متناهی از گام ها صدق خواهد کرد.

نتیجه ۸.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، بنابر قضیه کانتروویچ تقریباً همه جا مشتق پذیر است، در نتیجه اندازه نقاط غیرمشتق پذیر آن برابر صفر است.



ص: ۳-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



دانشگاه یزد

روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار

پوستر

۲ نتایج اصلی

گرادیان گسسته نمونه‌ای از تفاضلات متناهی برای تخمین زیرگرادیان‌ها است. از طرفی گرادیان گسسته نسبت به یک جهت تعریف می‌شود و این موجب می‌گردد که یک الگوریتم کارا برای محاسبه جهت شدنی برای یک تابع به دست آورد. البته می‌توان با استفاده از زیرگرادیان‌ها تخمینی برای ابر مشتقات یافت که فقط از دیدگاه نظری قابل اهمیت‌اند. برای محاسبه جهت شدنی برای یک نقطه داده شده فقط به محاسبه تعدادی از زیرگرادیان‌ها در آن نقطه نیاز است و نشان داده می‌شود که این محاسبات متناهی‌اند.

برای مطالعه بهینه‌سازی توابع لیپ‌شیتز نیاز به پیوستگی نگاشت زیرمشتقات و شبه مشتقات است. با استفاده از روش گرادیان گسسته یک تقریب پیوسته برای ابرمشتقات و شبه مشتقات ارائه شده است.

سپس با استفاده از تقریب‌های پیوسته برای زیرمشتقات و ابرمشتقات، روش‌های عددی برای حل مسایل مختلف کمینه سازی ناهموار به کار برده شده است، این روش‌ها به دسته‌ای از روش‌های بهینه‌سازی مرتبط هستند که بدون استفاده از مشتق به محاسبه نقطه بهینه تابع می‌پردازند.

Ω_f را مجموعه نقاط مشتق‌پذیر تابع f در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{con}}(f(\Omega_f \cap S_\delta(x)))$$

بر اساس معادله فوق به ازای نقاط x_1, x_2, \dots, x_k در یک همسایگی x مجموعه نقاط زیر می‌تواند یک تقریب خوب برای $\partial f(x)$ باشد

$$C_k = \overline{\text{con}}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \dots, k\}.$$

این تقریب اساس کار الگوریتم گرادیان گسسته است. مجموعه نقاط $M = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ به ازای یک $x_0 \in \mathbb{R}^n$ کراندار باشد و تابع f بر روی یک مجموعه باز چگال D در دامنه خود مشتق‌پذیر باشد. حال اگر n بعد مساله باشد آنگاه $2n$ نقطه در همسایگی x تولید می‌شود. چون f بر روی یک مجموعه باز و چگال به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است پس با احتمال یک در این نقاط تولید شده مشتق‌پذیر است. در نتیجه مجموعه زیر با احتمال یک، تقریبی مناسب برای است

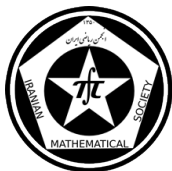
$$C_k = \overline{\text{con}}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \dots, 2n\}.$$

جدول ۱: نتایج به دست آمده از روش گرادیان گسسته

n	x^*	f^*
۲	(-۰/۰۰۰۰۷۷۳, ۰/۰۰۰۰۴۲۶)	۰/۰۰۰۰۱
۳	(۰/۰۰۰۰۲, ۰/۰, ۰/۰ ۱۸۵)	-۰/۰۰۰۰۱
۲	(-۰/۰۰۰۰۱۳۰۸, -۰/۰۰۰۰۱۳۰۸)	۰/۰۰۰۰۵۵۸

سپاس‌گزاری

سپاس و تشکر فراوان از استاد بزرگوام جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی که در این سال‌ها با راهنمایی‌های بی‌دریغ‌شان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار



دانشگاه یزد

پوستر

از استاد گرامی ام جناب آقای دکتر محمد رضا ضرابی و جناب آقای دکتر علی اکبرنیا صمیمانه سپاس گذارم که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری دادند.

References

- [1] A. Bagirov, G. Nazari, *An approximate subgradient algorithm for unconstrained nonsmooth, nonconvex optimization*, (2008), pp. 187-206.
- [2] A. M. Bagirov, *Minimization methods for one class of nonsmooth functions and calculation of semiequilibrium prices*, In A. Eberhard et al. (eds.) *progress in optimization: contribution from Australasia*, Kluwer Academic publishers, (1999), pp. 147-175.
- [3] F. Plastria, *Lower subdifferentiable functions and their minimization by cutting planes*, J. Optim. Theory Appl. (1985), 46, pp. 37-53.
- [4] L. Luksan, J. Vlcek, *Test Problem for Nonsmooth Unconstrained and Linearly Constrained Optimization*, Technical Report, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, No. 78, 2000.
- [5] M. Avriel, *Nonlinear programming, analysis and methods*. Dover, New York, 2003.

پست الکترونیکی: MaryamTaati1@gmail.com
 پست الکترونیکی: AliAkbarnia52@yahoo.com
 پست الکترونیکی: MZarrabi@du.ac.ir