چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳–۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد

روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار

مریم طاعتی* — دانشگاه دامغان
علی اکبرنیا — دانشگاه پیام نور
محمدرضا ضرابی — دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله الگوریتمی مبتنی بر مفهوم زیرگرادیان برای حل مسایل بهینه سازی ناهموار مورد بررسی قرار گرفته است. این الگوریتم برای کمینه‌سازی موضعی توابع لیپ شیتز ارایه شده است. در این الگوریتم جهت کاهشی با حل دستگاه نامعادلات خطی محاسبه شده و همگرایی الگوریتم برای توابع شبه مشتق‌پذیر نیمه‌هموار نیز بررسی شده است. نتایج عددی با هر دو تابع هدف منظم و نامنظم ارایه گردیده و برای سرعت همگرایی بهتر زیرگرادیان تصویری در الگوریتم جهت کاهشی با روش مستقیم با استفاده از قضایای مربوطه جایگزین شده است. الگوریتم پیشنهاد شده با دو نمونه متفاوت آزمون شده و با به کارگیری نتایج عددی مقایسه شده است، نتایج حاصل برتری الگوریتم پیشنهاد شده را نسبت به روش زیرگرادیان تقریبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش زیرگرادیان تقریبی، زیرمشتق رابینوف دمیانوف، گرادیان گسسته.

۱ مقدمه

برای حل مسایل بهینه‌سازی ناهموار از تعمیم تعریف‌های جدید مشتق استفاده شده است. مفهوم زیرگرادیان که با تعریف مجموعه‌ای از بردارها معرفی می‌شود، برای توابع محدب اولین بار به عنوان تعمیمی برای مشتق اول طرح و بررسی شد. ضعف عمده در زیرمشتق، بزرگ بودن مجموعه تعریف شده در آن است و آن هم ناشی از نوع تعریف مشتق سویی است. برای رفع این مشکل تعریف‌های جدیدی از مشتق سویی ارایه و بر اساس آنها تعمیم‌های جدیدی از مشتق مطرح شده است که از شبه مشتق دمیانوف–رابینوف [۱] و زیرمشتق میشل–پنو [۲] می‌توان به عنوان مهم‌ترین این تعمیم‌ها نام برد. اما زیرمشتق، تعمیمی از مشتق است که به راحتی قابل پیاده سازی عددی می‌شود، تعریف‌های معرفی شده برای تعمیم‌های مشتق تنها برای توابع لیپ شیتز موضعی ارایه شده‌اند.

در دهه‌های اخیر تلاش برای تعمیم تعریف مشتق به توابع نیم پیوسته پایینی [۳] با استفاده از تعریف گراف تابع ادامه یافته است. اکثر الگوریتم‌هایی که برای مسایل بهینه‌سازی ناهموار کارایی دارند از الگوریتم‌های مرتبه اول استفاده می‌کنند که این الگوریتم‌ها نیز مشتق اول توابع را به کار می‌گیرند و بدین منظور ابتدا توابع به صورت تقریبی هموارسازی می‌شود. برای نمونه می‌توان از الگوریتم شور [۴] که برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب به کار می‌رود و الگوریتم‌های گرادیان گسسته [۵] و زیرگرادیان تقریبی [۶] که برای حل مسایل بهینه‌سازی نیمه هموار [۷] به کار می‌روند، نام برد.

*سخنران

[۱] Demyanov-Rubinov
[۲] Michel-Penot
[۳] Lower semicontinuous
[۴] Shor algorithm
[۵] Discrete gradient
[۶] Approximate subgradient algorithm
[۷] Semismooth

تعریف ۱.۱. تابع منظم f را شبه مشتق رابینوف دمیانوف روی $\mathbb{R}^n$ گویند اگر نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد و برای تمامی $x, g \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f'(x,g) = f^{\circ}(x,g)$ که $f'(x,g)$ مشتق جهتی f در نقطه x نسبت به جهت g است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'(x,g) = \lim_{\alpha \to +\circ} \alpha^{-1}[f(x+\alpha g) - f(x)],$$

مشتق جهتی $f'(x,g)$ نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ پیوسته بالایی است.

تعریف ۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ را در نظر بگیرید،
تابع f روی $\mathbb{R}^n$ نیم‌پیوسته پایینی $(l.s.c)$ است، اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$f(x) = \lim_{y \to x} inf\ f(y).$$

تعریف ۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع نیمه هموار در $x \in \mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود اگر به طور موضعی پیوسته لیپ‌شیتز باشد و برای هر $g \in \mathbb{R}^n$ حد زیر وجود داشته باشد،

$$\lim_{v \in \partial f(x+\alpha g')\ ,\ g \to g'\ ,\ \alpha \to +\circ} \langle v, g \rangle.$$

قضیه ۴.۱. *اگر سیستم*

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq \circ\ ,\ i = ۱, \dots, k\ \ , g \in S_۱. \tag{۱}$$

قابل حل نبود آنگاه

$$\min_{v \in \tilde{D}_k(x)} \|v\| < \delta. \tag{۲}$$

ملاحظه ۵.۱. قضیه فوق نتیجه می‌دهد که اگر در گام دوم الگوریتم کاهشی، سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq \circ\ ,\ i = ۱, \dots, k\ \ , g \in S_۱$$

قابل حل نبود آنگاه نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت جواب تقریبی در نظر گرفت.

گزاره ۶.۱. *اگر*

$$\min_{v \in \tilde{D}_k(x)} \|v\| < \delta$$

صدق کند آنگاه سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq \circ\ ,\ i = ۱, \dots, k\ \ , g \in S_۱$$

قابل حل نیست.

لم ۷.۱. *اگر f یک تابع به طور موضعی لیپ شیتز روی $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه در الگوریتم جهت کاهشی شرط توقف بعد از تعداد متناهی از گام‌ها صدق خواهد کرد.*

نتیجه ۸.۱. *تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، بنابر قضیه کانترویچ تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است، در نتیجه اندازه نقاط غیرمشتق‌پذیر آن برابر صفر است.*

۲ نتایج اصلی

گرادیان گسسته نمونه‌ای از تفاضلات متناهی برای تخمین زیرگرادیان‌ها است. از طرفی گرادیان گسسته نسبت به یک جهت تعریف می‌شود و این موجب می‌گردد که یک الگوریتم کارا برای محاسبه جهت شدنی برای یک تابع به دست آورد. البته می‌توان با استفاده از زیرگرادیان‌ها تخمینی برای ابر مشتقات یافت که فقط از دیدگاه نظری قابل اهمیت‌اند. برای محاسبه جهت شدنی برای یک نقطه داده شده فقط به محاسبه تعدادی از زیرگرادیان‌ها در آن نقطه نیاز است و نشان داده می‌شود که این محاسبات متناهی‌اند.

برای مطالعه بهینه‌سازی توابع لیپ‌شیتز نیاز به پیوستگی نگاشت زیرمشتقات و شبه مشتقات است. با استفاده از روش گرادیان گسسته یک تقریب پیوسته برای ابرمشتقات و شبه مشتقات ارایه شده است.

سپس با استفاده از تقریب‌های پیوسته برای زیرمشتقات و ابرمشتقات، روش‌های عددی برای حل مسایل مختلف کمینه سازی ناهموار به کار برده شده است، این روش‌ها به دسته‌ای از روش‌های بهینه‌سازی مرتبط هستند که بدون استفاده از مشتق به محاسبه نقطه بهینه تابع می‌پردازند.

Ω_f را مجموعه نقاط مشتق‌پذیر تابع f در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{con}(f(\Omega_f \cap S_\delta(x)))$$

براساس معادله فوق به ازای نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_k$ در یک همسایگی x مجموعه نقاط زیر می‌تواند یک تقریب خوب برای $\partial f(x)$ باشد

$$C_k = \overline{con}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

این تقریب اساس کار الگوریتم گرادیان گسسته است. مجموعه نقاط $M = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ به ازای یک $x_0 \in \mathbb{R}^n$ کراندار باشد و تابع f بر روی یک مجموعه باز چگال D در دامنه خود مشتق‌پذیر باشد. حال اگر n بعد مساله باشد آنگاه $2n$ نقطه در همسایگی x تولید می‌شود. چون f بر روی یک مجموعه باز و چگال به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است پس با احتمال یک در این نقاط تولید شده مشتق‌پذیر است. در نتیجه مجموعه زیر با احتمال یک، تقریبی مناسب برای است

$$C_k = \overline{con}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

جدول ۱: نتایج به دست آمده از روش گرادیان گسسته

n	x^*	f^*
۲	$(-0.0000773, 0.000426)$	0.00001
۳	$(0.0002, 0.0, 0.0180)$	-0.0001
۲	$(-0.0001308, -0.001308)$	0.0000558

سپاس‌گزاری

سپاس و تشکر فراوان از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی که در این سال‌ها با راهنمایی‌های بی‌دریغ‌شان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.

از استاد گرامی‌ام جناب آقای دکتر محمد رضا ضرابی و جناب آقای دکتر علی اکبرنیا صمیمانه سپاس گذارم که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری دادند.

References

[1] A. Bagirovl, G Nazari, *An approximate subgradient algorithm for unconstrained nonsmooth, nonconvex optimization*, (2008), pp. 187–206.

[2] A. M. Bagirov, *Minimization methods for one class of nonsmooth functions and calculation of semiequilibrium prices*, In A. Eberhard et al. (eds.) progress in optimization: contribution from Australasia, Kluwer Academic publishers, (1999), pp. 147-175.

[3] F. Plastria, *Lower subdifferentiable functions and their minimization by cutting planes*, J. Optim. Theory Appl. (1985), 46, pp. 37-53.

[4] L. Luksan, J. Vlcek, *Test Problem for Nonsmooth Unconstrained and Linearly Constrained Optimization*, Technical Report, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, No. 78, 2000.

[5] M. Avriel, *Nonlinear programming*, analysis and methods. Dover, New York, 2003.

پست الکترونیکی: MaryamTaati1@gmail.com
پست الکترونیکی: AliAkbarnia52@yahoo.com
پست الکترونیکی: MZarrabi@du.ac.ir