چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳–۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد

روش جداسازی عملگرها و کاربرد آن در حل یک مسئله سهموی غیرخطی

علی ذاکری
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

زهرا نوروزی*
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

در این مقاله روش جداسازی عملگر [۱] مبتنی بر یافتن ریشه یک معادله به روش نیوتن به منظور حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی ارائه می‌شود.جواب‌های تقریبی حاصل از بکارگیری این روش و مقایسه آن با جواب واقعی نشان دهنده دقت و همگرایی مناسب این روش است.

واژه‌های کلیدی: روش جداسازی عملگر، معادلات دیفرانسیل غیرخطی،روش نیوتن،روش تفاضلات متناهی،مسئله‌ی نفوذ

۱ مقدمه

در مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای برخی کلاس‌های شناخته شده از معادلات نظیر معادله گرما، موج، انتقال، انتشار و ... وجود دارد که تا کنون روش‌های متفاوت عددی یا تحلیلی بسیاری برای حل آن ها ارائه شده است. در بسیاری از پدیده‌های طبیعی نظیر معادله‌ی انتقال –انتشار ، چندین عبارت دیفرانسیلی در یک معادله در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند که روش‌های عددی موجود برای حل آنها به جهت عدم برقراری شرایط پایداری، همگرایی یا سازگاری روش مورد استفاده، کارآمد نمی‌باشد.

ایده‌ی اساسی روش جداسازی عملگر بر پایه جداسازی مسئله به مسائل ساده‌تر که به آن‌ها زیر مسئله گفته می‌شود استوار است. در سال ۱۹۵۰ اولین بار این روش موسوم به روش جداسازی لی–تروتر [۲] مطرح شد و در سال ۱۹۵۷ در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای توسط گادونف[۳] و باگرینفسکی [۴] به کارگرفته شد. همچنین از روش مزبور با انتخاب روش تفاضلات متناهی برای هر زیر مسئله خطی در سال ۱۹۶۰ استفاده شد. از این روش برای حل مسائل غیرخطی از سال ۲۰۰۵ تا کنون استفاده شده است [۴، ۲] .

در روش جداسازی عملگر به جای حل مسئله‌ی اولیه زیر مسئله‌های ساده‌تر با استفاده از روش‌های عددی مشهور حل می‌شوند. لذا قابلیت ترکیب روش‌های عددی خاص برای بدست آوردن جواب مسئله‌ی اصلی فراهم می‌گردد . به طور مثال برای معادله انتقال–انتشار هر یک از معادلات در حوزه‌ی پایداریشان حل شده و جواب اصلی با تکنیک‌های روش جداسازی از متصل کردن جواب زیر مسئله‌ها بدست خواهد آمد. استفاده از این روش می‌تواند حافظه‌ی مورد نیاز محاسبات را کاهش دهد و در بعضی مسائل الگوریتمی ایجاد کند که به طور نامشروط پایدار است. همچنین در برخی مسائل چند بعدی روش جداسازی عملگر تنها روش حل ممکن است.

*سخنران

[۱] operator splitting method
[۲] Lie-Trotter
[۳] Gadonov
[۴] Bagrinovskii

در این مقاله ابتدا به بیان یک مسئله غیرخطی سهموی در فضای یک بعدی پرداخته و پس از معرفی روش‌های جداسازی عملگر روش تکراری نیوتن در جداسازی عملگرها را بیان کرده سپس به الگوریتم حل آن با استفاده از روش ارائه شده می‌پردازیم. در آخر با بیان مثالی از معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای غیر خطی تقریب جواب حاصل از این روش و خطای آن محاسبه می‌گردد.

۲ بیان مسئله

فرض کنید $D(u)=a(t)u^{۲}+b(t)$ که در آن $a,b>۰$ توابع تعریف شده بر دامنه $t\geq ۰$ باشند. در این صورت مسئله غیر خطی سهموی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &u_t-(D(u)u_x)_x=f(x,t), \qquad ۰<x<۱, \qquad t\geq ۰\\ &u(x,۰)=p(x), \qquad u(۰,t)=q_۱(x), \qquad u(۱,t)=q_۲(x) \end{aligned} \tag{۱}$$

قضیه ۱.۲. *چنان‌که شرایط مرزی همگن باشند، مسئله‌ی فوق جواب یکتا دارد.*

اثبات. ر.ک[۷] . □

۳ روش‌های جداسازی عملگرها

به طور کلی روش‌های جداسازی عملگرها را می‌توان به دو دسته‌ی روش‌های دنباله‌ای و روش‌های تکراری تقسیم کرد. روش‌های دنباله‌ای تنها برای عملگرهای دیفرانسیلی خطی کاربرد دارند، در صورتی که روش‌های تکراری که در سال‌های اخیر مطرح شده‌اند علاوه بر کاربرد آن‌ها در جداسازی عملگرهای دیفرانسیلی خطی به جداسازی عملگرهای دیفرانسیلی غیرخطی نیز می‌پردازند. به منظور مطالعه بیشتر الگوریتم‌های روش جداسازی به [۳، ۲] رجوع کنید.

در ادامه به بیان چگونگی پیاده‌سازی روش‌های تکراری جداسازی عملگرها برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌پردازیم:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=A(U(t))U(t)+B(U(t))U(t). \qquad t\in[t_۰,T], \qquad U(t_۰)=U_۰ \tag{۲}$$

که در آن $A(U),B(U):X\longrightarrow X$ عملگرهای دیفرانسیلی تعریف شده بر فضای باناخ X می‌باشند .
برای مطالعه بیشتر در حالتی که A و B عملگرهای دیفرانسیلی خطی می‌باشند به [۵، ۴]رجوع کنید. همچنین همگرایی این روش با استفاده از قضیه همگرایی لکس در [۶، ۱] آمده است.
در روش‌های تکراری برخلاف روش‌های دنباله‌ای دو عملگر در هر زیر مسئله نقش دارند و طبق الگوریتم زیر در هر زیر بازه $[t^n,t^{n+۱}]$ که حاصل از افراز بازه‌ی زمانی کل با طول گام یکسان است، روش جداسازی عملگر اعمال می‌شود:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i(t)}{\partial t}=A(u_i(t))u_i(t)+B(u_{i-۱}(t))u_{i-۱}(t) \qquad u_i(t^n)=u_{sp}^n\\ &\frac{\partial u_{i+۱}(t)}{\partial t}=A(u_i(t))u_i(t)+B(u_{i+۱}(t))u_{i+۱}(t) \qquad u_{i+۱}(t^n)=u_{sp}^n \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $i=۱,۳,\cdots,۲m+۱$ ، نقطه شروع تکرار $u_۰(t)=۰$ ، یک حدس اولیه دلخواه (که معمولا $u_۰(t)=۰$ اختیار می‌گردد) می‌باشد . همچنین در این مقاله u_{sp} تقریب جواب واقعی u حاصل از روش جداسازی است که $u_{sp}^۰=U(t_۰)$ و در $t=t^n$، u_{sp}^n مقداری معلوم و در لحظه $t=t^{n+۱}$ داریم: $u_{sp}^{n+۱}=u_{۲m+۲}(t^{n+۱})$.

۴ روش تکراری جداسازی عملگر مبتنی بر روش نیوتن

برای حل هر یک از زیر مسئله‌ها روش‌هایی از جمله روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای نظیر روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و ... به کار گرفته می‌شود. در این بخش از روش نیوتن برای حل زیر مسئله‌ها استفاده شده است.

روش نیوتن: اگر $F(c)=0$ که در آن F یک تابع است را مد نظر قرار دهیم برای یافتن تقریبی از ریشه تابع ، تکرار

$$c^{k+1}=c^k-D(F(c^k))^{-1}F(c^k)$$

که در آن $D(F(c))$ ماتریس ژاکوبی تابع F است را تا رسیدن به دقت دلخواه ε یعنی تا زمان برقراری شرط $\mid c^{k+1}-c^k\mid\leq\varepsilon$ ادامه می‌دهیم. اینک برای حل زیر مسئله‌های روش تکراری با استفاده از روش نیوتن دو تابع زیر تعریف می‌شوند:

$$F_1(u_i)=\frac{\partial u_i}{\partial t}-A(u_i)u_i-B(u_{i-1})u_{i-1}=0,\quad u_i(t^n)=u_{sp}^n \tag{۴}$$

$$F_2(u_{i+1})=\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}-A(u_i)u_i-B(u_{i+1})u_{i+1}=0,\quad u_{i+1}(t^n)=u_{sp}^n \tag{۵}$$

حال با بکارگیری روش نیوتن به ترتیب برای (۴) و (۵) الگوریتم‌های زیر بدست می‌آیند:

$$u_i^{k+1}=u_i^k-D(F_1(u_i^k))^{-1}(\frac{\partial u_i^k}{\partial t}-A(u_i^k)u_i^k-B(u_{i-1}^k)u_{i-1}^k), \tag{۶}$$
$$D(F_1(u_i^k))=-(A(u_i^k)+\frac{\partial A(u_i^k)}{\partial u_i^k}u_i^k),\qquad u_i^k(t^n)=u_{sp}^n$$

$$u_{i+1}^{k+1}=u_{i+1}^k-D(F_2(u_{i+1}^k))^{-1}(\frac{\partial u_{i+1}^k}{\partial t}-A(u_i^k)u_i^k-B(u_{i+1}^k)u_{i+1}^k), \tag{۷}$$
$$D(F_2(u_{i+1}^k))=-(B(u_{i+1}^k)+\frac{\partial B(u_{i+1}^k)}{\partial u_{i+1}^k}u_{i+1}^k),\qquad u_{i+1}^k(t^n)=u_{sp}^n$$

و در نتیجه $u_{sp}^{n+1}=u_{2m+2}(t^{n+1})$ ،جواب تقریبی حاصل از روش جداسازی در زمان $t=t^{n+1}$ می‌باشد.
اکنون مسئله (۱) را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم:

$$A(u)u=((a(t)u^2+b(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2})u,\qquad B(u)u=(2a(t)u(\frac{\partial}{\partial x})^2)u.$$

در این صورت بکارگیری روش نیوتن (۳) برای مسئله مورد نظر توابع زیر را نتیجه می‌دهد:

$$F_1(u_i)=\frac{\partial u_i}{\partial t}-((a(t)u_i^2+b(t))\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2})-(2a(t)u_{i-1}(\frac{\partial u_{i-1}}{\partial x})^2),\quad u_i(t^n)=u_{sp}^n$$
$$F_2(u_{i+1})=\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}-((a(t)u_i^2+b(t))\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2})-(2a(t)u_{i+1}(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x})^2),\quad u_{i+1}(t^n)=u_{sp}^n \tag{۸}$$

سپس روش تفاضلات متناهی جهت تقریب u_t و u_x و u_{xx} بکارگرفته می‌شود چنانکه $x^l=lh$ و $t^j=jk$ که در آن h طول گام مکانی و k طول گام زمانی می‌باشد. در آخر با اعمال روش (۸) در هر تکرار تقریبی از $u(x^l,t^{j+1})$ محاسبه خواهد شد.

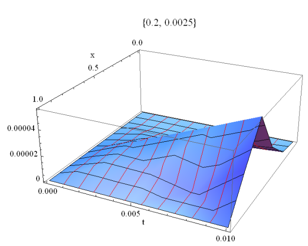
۵ نتایج عددی

مثال ۱.۵. مسئله‌ی نفوذ غیر خطی که به فرم کلی (۱) می‌باشد و شرایط اولیه و مرزی آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

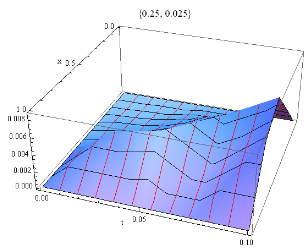
$$u_t-(((t^۲+۱)u^۲+(۳t))u_x)_x=۱+e^tx^۲-۸e^{۲t}(۱+t^۲)x^۲(t+e^tx^۲)-۲e^t(۳t+(۱+t^۲)(t+e^tx^۲)^۲).$$

$$\circ<x<۱,\quad t\geq\circ,\qquad u(x,\circ)=x^۲,\quad u(\circ,t)=t,\quad u(۱,t)=e^t+t.$$

حل. با جایگذاری توابع $F_۱$ ، $F_۲$ تعریف شده در (۸) در الگوریتم‌های (۵) و (۶) تابع خطا در نقاط (x^l,t^j) در نمودارهای ذیل ارائه شده است.



$h=\circ/۲, k=\circ/\circ\circ۲۵$ (ب)



$h=\circ/۲۵, k=\circ/\circ۲۵$ (آ)

شکل ۱: تابع خطای روش تکراری جداسازی عملگرها برای $m=۴$

مراجع

[1] J. Geiser, *Iterative Splitting Methods for Differential Equations*, CRC Press, 2011.

[2] J. Geiser, *Coupled System:Theory, Model, and Applications in Engineering*, CRC Press, 2014.

[3] H. Holden, K. Krlsen, K. Lie, N. Risebro, *Splitting Methods For Partial Differential Equations with Rough Solutions*, EMS, 2010.

[4] J. Geiser, *Modified Jacobian Newton Iterative Method:Theory and Applications*, Mathematical Problems in Engineering, doi:10.1155/2009/307298.

[5] J. Geiser, *Nonlinear iterative operator splitting methods and applications for nonlinear differential equations*, PAMM. Proc. Appl. Math. Mech. 7, 1041205–1041206 (2007).

[6] J. Geiser,*Iterative Splitting Methods for Differential Equations: Prooftechniques and Applications*, International Mathematical Forum,Vol. 6, no. 56, pp. 2737-2770, 2011.

[7] R. Di Nardo, *Nonlinear elliptic and parabolic equations with measure data*, Ph.D Thesis, Dipartimento di Matematica R. Caccioppoli, Universita degli Studi di Napoli Federico II, 2007-2008.

پست الکترونیکی: azakeri@kntu.ac.ir
پست الکترونیکی: z.noroozi@mail.kntu.ac.ir