مقایسه دو روش تحلیل بیزی داده‌های فضایی گسسته

منور محمدکریمی – فاطمه حسینی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان

چکیده: مطالعه داده‌های فضایی گسسته از طریق مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی امکان‌پذیر می‌شود. در این مقاله ابتدا روش بیز معمولی و الگوریتم‌های مونت کارلویی برای این مدل‌ها بیان می‌شود. سپس به دلیل زمان‌بر بودن محاسبات الگوریتم‌های مونت کارلویی در این مدل‌ها، رهیافت بیز تقریبی برای برآورد پارامترها و پیشگویی‌هاارائه می‌گردد. در نهایت داده‌های تعداد روزهای دارای بارندگی استان سمنان در سال ۱۳۹۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مجموعه داده، تعداد روزهای دارای بارندگی استان سمنان به عنوان متغیر پاسخ گسسته در نظر گرفته می شود. به دلیل وجود همبستگی از نوع فضایی، این داده‌ها با مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی مدل‌بندی می‌شوند. برای برآورد پارامترها و پیشگویی متغیرهای پنهان نرمال هر دو روش بیز معمولی و تقریبی به کار گرفته می‌شود و دو روش مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی ، روش‌های بیز معمولی ، روش‌های بیز تقریبی ، نمونه‌گیری مونت‌کارلویی

۱ مقدمه

اولین بار بریسلو و کلینتون (۱۹۹۳) از مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی [۱] (SGLMM) استفاده کردند و پس از ایشان دیگل و همکاران (۱۹۹۸) به طور مفصل به این مدل‌ها پرداخته‌اند. این مدل‌ها تعمیمی از مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته هستند. در صورتی که همبستگی در مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته از نوع فضایی باشد، مدل را مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی گویند. یک مسئله مهم در مدل‌های SGLM، پیشگویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده است، که مستلزم برآورد پارامترهای مدل و متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ می‌باشد. چون در مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته، تابع درستنمایی برخلاف مدل‌های خطی به دلیل ناگاوسی بودن متغیر پاسخ و وجود متغیرهای پنهان فرم بسته‌ای ندارد، برآورد پارامترها به راحتی امکان‌پذیر نیست. کریستنسن و همکارانش مقالات زیادی بر پایه رهیافت بیزی و روش‌های مونت‌کارلویی در راستای حل مشکل برآورد پارامترها و پیشگویی‌ها ارائه داده‌اند، از جمله این مقالات می‌توان به دیگل و همکاران (۱۹۹۸)، کریستنسن و همکاران (۲۰۰۰)، کریستنسن و وگیترسون (۲۰۰۲) و کریستنسن و همکاران (۲۰۰۶) اشاره نمود. در همه‌ی روش‌های معرفی شده نیاز به نمونه‌های مونت کارلویی و اجرای الگوریتم‌های تکرارشونده است که دارای محاسبات زمان‌بر هستند. در راستای حل این مشکل ایدسویک و همکاران (۲۰۰۹)، روش بیز تقریبی را معرفی کردند و نشان دادند که محاسبات این روش بسیار سریع‌تر از روش بیز معمولی است. در این مقاله ابتدا در بخش اول مدل SGLM معرفی می‌شود. در بخش دوم برآورد پارامترهای مدل و متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ و سپس پیشگویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده پاسخ با روش بیز معمولی و در بخش سوم به روش بیز تقریبی بیان می‌شود. در بخش چهارم به مطالعه مدل و مقایسه روش‌های بیان شده در یک مجموعه

[۱] Spatial Generalized Linear Mixed Models

داده واقعی پرداخته می‌شود. داده‌های مورد بررسی مربوط به تعداد روزهای دارای بارندگی استان سمنان در سال ۱۳۹۱ می‌باشد که به دلیل وجود همبستگی فضایی و گسسته بودن متغیرهای پاسخ مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی برای مدل‌بندی داده‌ها پیشنهاد می‌شود و با دو روش ارائه شده به تحلیل این مجموعه داده پرداخته می‌شود و در نهایت این دو روش مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۲ مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی

فرض کنید $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)'$ بردار متغیرهای پنهان فضایی در n موقعیت $\{s_1, \cdots, s_n\}$ با چگالی $\pi(\boldsymbol{x}|\beta) = N_n(H\beta, \Sigma_\theta)$ از یک میدان تصادفی گاوسی باشد، که در آن $\beta = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\theta})'$ پارامترهای مدل، H ماتریس $n \times (p+1)$ متغیرهای تبیینی، $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_p)'$ بردار پارامترهای رگرسیونی و $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترهای همبستگی فضایی مدل هستند. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)'$ بردار متغیرهای پاسخ گسسته از یک میدان تصادفی فضایی ناگاوسی در موقعیت‌های $\{s_1, \cdots, s_k\}$ باشد. با فرض استقلال شرطی این متغیرها روی متغیرهای پنهان، $\pi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}^{obs})$ متعلق به خانواده نمایی با تابع چگالی $\pi(y_i|x_i) = \exp\{y_i x_i - b(x_i) + c(y_i)\}$ است، که در آن $b(\cdot)$ و $c(\cdot)$ توابع معلوم‌اند. هدف پیشگویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده پاسخ، $\{s_{k+1}, \cdots, s_n\}$ و برآورد متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ، $\{s_1, \cdots, s_k\}$ است. برای این منظور، بردار متغیرهای پنهان را به دو بردار $(\boldsymbol{x}^{obs'}, \boldsymbol{x}^{pred'})'$ تجزیه می‌شود، که $\boldsymbol{x}^{obs} = A\boldsymbol{x}$، متغیرهای پنهان متعلق به k موقعیت دارای مشاهده پاسخ است، که در آن $A = [I_{k\times k}|\mathbf{0}_{k\times n-k}]$ و $\boldsymbol{x}^{pred}$ بردار متغیرهای پنهان در $n-k$ موقعیت انتخاب شده برای پیشگویی است. در نهایت با توجه به خانواده توزیع متغیر پاسخ و تعریف یک تابع پیوند مشخص مثل g، مدل به‌صورت $\boldsymbol{E}(y_i|x_i) = g^{-1}(x_i)$ تعریف می‌شود و $\pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}|\beta) = \pi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}^{obs})\pi(\boldsymbol{x}|\beta)$ است، که در آن $\pi(\boldsymbol{x}|\beta)$ چگالی توزیع نرمال است.

۳ پیشگویی بیزی متغیرهای پنهان

در این قسمت تحلیل بیزی مدل‌های SGLM روی یک ناحیه پیوسته فضایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مدل پارامتری به صورت $C_\theta(s_i, s_j) = \sigma^2 \exp(-||s_i - s_j||/\varphi)$ برای کوواریانس فضایی در نظر بگیرید، که در آن $||\cdot||$ نرم اقلیدسی، σ و φ به ترتیب پارامترهای مقیاس و همبستگی فضایی هستند. برای سره بودن توزیع پسین، برای پارامترهای مدل، پیشین‌های سره در نظر گرفته می‌شود. پیشین‌های متداول برای β، $N(\boldsymbol{a}, B)$ و برای σ و φ، به ترتیب $IG(\alpha, \tau)$ و $\Gamma(\gamma, \omega)$ هستند. اکنون با فرض استقلال پیشین‌ها، توزیع پیشین توأم $\pi(\beta, \sigma, \varphi) = \pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\sigma)\pi(\varphi)$, حاصل می‌شود. لذا توزیع پسین متناسب با

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \varphi|\boldsymbol{y}) = \pi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\beta}, \sigma, \varphi,)\pi(\sigma)\pi(\varphi)\pi(\boldsymbol{\beta})) \qquad (1)$$

خواهد شد، که دارای فرم پیچیده‌ای است. بنابراین از روش‌های MCMC برای شبیه‌سازی از توزیع پسین استفاده می‌شود. برای به کارگیری الگوریتم نمونه‌گیری گیبز توزیع‌های شرطی کامل پارامترها مورد نیاز است. توزیع شرطی کامل β به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \sigma, \varphi) &\propto \pi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\beta}, \sigma, \varphi, \boldsymbol{\lambda})\pi(\boldsymbol{\beta}) \\ &\propto exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_\beta)^\top \Sigma_\beta^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_\beta)\right\}\end{aligned}$$

خواهد شد و دارای فرم مشخصی از توزیع نرمال به صورت

$$[\beta|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\sigma,\varphi]\sim N_p(\boldsymbol{\mu}_\beta,\Sigma_\beta)$$

است، که $\Sigma_\beta=(H'\Sigma_\theta^{-1}H+B^{-1})^{-1}$ ،$\boldsymbol{\mu}_\beta=\Sigma_\beta(B^{-1}\boldsymbol{a}+H'\Sigma_\theta^{-1}\boldsymbol{x})$ هستند. بنابراین تولید نمونه از توزیع شرطی کامل β به راحتی امکان‌پذیر است. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $\beta\sim N(\boldsymbol{a},B)$ و $\boldsymbol{x}|\beta,\boldsymbol{\theta}\sim N(H\beta,\Sigma_\theta)$ آن‌گاه

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\sim N(\boldsymbol{\mu}_x,\Sigma_x) \qquad (۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\mu}_x=Ha$ و $\Sigma_x=(\Sigma_\theta+HBH\prime)$. توزیع شرطی کامل برای سایر پارامترها و برای هر مولفه بردار متغیرهای پنهان نیز به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\sigma|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta},\varphi)&\propto IG(\alpha,\tau)\phi_n(\boldsymbol{x};H\boldsymbol{\beta},\Sigma_\theta),\\ \pi(\varphi|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta},\sigma)&\propto \Gamma(\gamma,\omega)\phi_n(\boldsymbol{x};H\boldsymbol{\beta},\Sigma_\theta)\\ \pi(x_k|\boldsymbol{x}_{-k},\boldsymbol{y},\sigma,\varphi,\boldsymbol{\beta})&\propto \pi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\pi(x_k|\boldsymbol{x}_{-k},\boldsymbol{\beta},\sigma,\varphi).\end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، توزیع‌های شرطی کامل دارای فرم خاصی از توزیع‌های شناخته شده نیستند. بنابراین برای تولید نمونه از الگوریتم متروپولیس—هستینگس استفاده می‌شود. برای پیشگویی بیزی متغیرهای پنهان، توزیع پیشگو به‌صورت

$$\pi(x_\circ|\boldsymbol{y})=\int\pi(x_\circ|\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta},\sigma,\varphi)\pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta},\sigma,\varphi|\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{\beta}\,d\sigma d\varphi, \qquad (۳)$$

است، که در آن $(x_\circ|\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta},\sigma,\varphi)$ طبق خواص توزیع نرمال دارای توزیع نرمال است. توزیع پیشگوی بیزی $y_\circ$ نیز به‌صورت

$$\pi(y_\circ|\boldsymbol{y})=\int_{x_\circ}\pi(y_\circ|x_\circ)\pi(x_\circ|\boldsymbol{y})dx_\circ, \qquad (۴)$$

است. اگر پیشگویی $y_\circ$ در موقعیت $s_\circ$ مد نظر باشد، می‌توان آن را با تولید نمونه از (۴) به دست آورد.

۴ بیز تقریبی مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی

استفاده از روش بیز تقریبی برای مدل‌های SGLM، به نمونه‌گیری‌های وقت‌گیر مونت‌کارلویی نیاز نداشته و به‌طور قابل ملاحظه‌ای سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. از مسائل مهم در مدل‌های بیزی SGLM با متغیرهای پنهان نرمال محاسبه دو پسین $\pi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\beta)$ و $\pi(\beta|\boldsymbol{y})$ است، که به‌ترتیب برای پیشگویی بیزی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده پاسخ و برآورد بیزی پارامترها به‌کار می‌روند. هدف ما ارائه روش‌های بیز تقریبی برای محاسبه این دو پسین است.

۱.۴ توزیع پسین تقریبی متغیرهای پنهان

قضیه (ایدسویک و همکاران (۲۰۰۹)) اگر در مدل SGLM متغیرهای پنهان دارای توزیع پیشین نرمال و $\boldsymbol{y}$ متعلق به خانواده نمایی باشد، با خطی کردن حول یک مقدار ثابت، توزیع را می‌توان با توزیع نرمال به‌صورت

$$\hat{\pi}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\beta) = N_n(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}^{\circ}), \ddot{\Sigma}_{x|y,\eta}(\boldsymbol{x}^{\circ})) \qquad (۵)$$

تقریب زد که در آن $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}^{\circ}) = H\beta + \Sigma_\theta A'R^{-1}(z(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}^{obs}) - AH\beta)$ است و

$$R = A\Sigma_\theta A' + P, \quad \hat{\Sigma}_{x|y,\eta}(\boldsymbol{x}^{\circ}) = \Sigma_\theta - \Sigma_\theta' R^{-1} A\Sigma_\theta$$

می‌باشند. برای تعیین مقدار ثابت و خطی سازی قسمت درست‌نمایی در آن و برازش یک تقریب نرمال به پسین $\hat{\pi}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\beta)$ از الگوریتم زیر استفاده می‌شود.

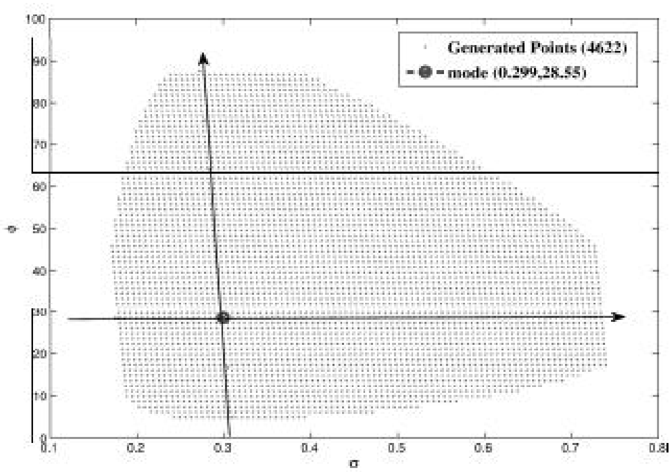
الگوریتم تعیین پسین تقریبی متغیرهای پنهان

الف: مد تابع $\log\hat{\pi}(\beta|\boldsymbol{y})$ با روش بهینه‌سازی شبه- نیوتن یا نیوتن رافسون تعیین و با η^* نشان داده می‌شود.

ب : ماتریس هسین $H = \frac{\partial^2 \log\hat{\pi}(\beta|\boldsymbol{y})}{\partial\eta^i\partial\eta^j}$ محاسبه و عکس آن به‌صورت $H^{-1} = V\Lambda V'$ تجزیه شود، که در آن V ماتریس بردارهای ویژه و Λ ماتریس قطری مقادیر ویژه آن است.

ج : مبدا مختصات به مد η^* انتقال داده شود، فرمول مختصات در مبدا η^* به‌صورت $\eta(t) = \eta^* + V\Lambda^{-1}t$ تعریف می‌شود که در آن t مقادیر استاندارد شده هستند. به عنوان مثال برای حالت دو بعدی $t = (t_1, t_2)$، با قرار دادن مبدا مختصات $t = (0,0)$ در رابطه بالا $\eta(0) = \eta^*$ حاصل می‌شود.

د : با شروع از مبدا مختصات جدید روی هر یک از محورها نقاطی به فاصله مقادیر صحیح δ_t به‌گونه‌ای اختیار شوند، که شرط $\log\hat{\pi}(\eta(0)|\boldsymbol{y}) - \log\hat{\pi}(\eta(t)|\boldsymbol{y}) < \delta_t$ برقرار باشد، سپس به‌طور مشابه نقاط درون صفحات نیز تعیین می‌شوند. با به‌کار بردن این الگوریتم η_i هایی از توزیع $\pi(\beta|\boldsymbol{y})$ تولید می‌شوند که می‌توان از آن‌ها برای تقریب توزیع $(\pi(\beta|\boldsymbol{y}))$ استفاده کرد. به عنوان مثال برای تحلیل بیز تقریبی داده‌های سمنان و ارزیابی عددی $\hat{\pi}(\beta|\boldsymbol{y})$ با استفاده از الگوریتم بالا ۴۶۲۲ مقدار تولید شده است، که این نقاط در شکل ۱ مشخص شده‌اند.



شکل ۱: نمودار نقاط تولید شده از توزیع پسین تقریبی

۲.۴ پیشگویی فضایی بیز تقریبی

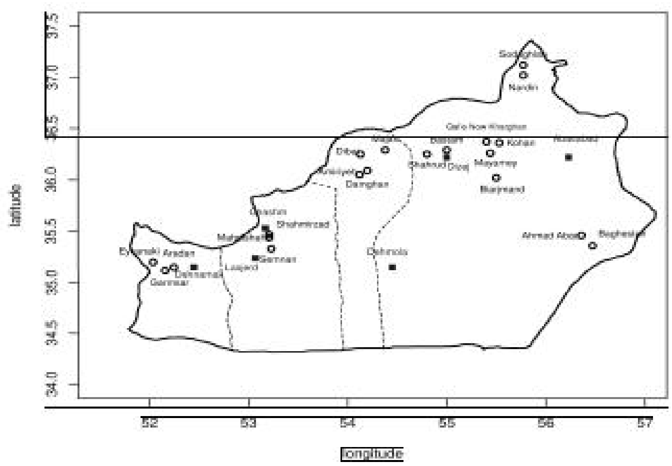
یکی از اهداف مدل‌های SGLM، پیشگویی متغیرهای پنهان x^{pred}، در موقعیت‌های فاقد مشاهده است. تقریب نرمال برای توزیع پسین متغیرهای پنهان، نقش کلیدی در به‌دست آوردن توزیع پیشگوی بیزی دارد. با توجه به تقریب ارائه شده برای $\pi(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\beta)$ و بسته بودن توزیع نرمال نسبت به حاشیه‌سازی، $\pi(x_j|\boldsymbol{y},\beta)$ متعلق به خانواده توزیع‌های نرمال است. بنابراین توزیع تقریبی پیشگو برای متغیرهای پنهان به‌صورت

$$\hat{\pi}(x_j|\boldsymbol{y}) = \sum_{\ell} \hat{\pi}(x_j|\boldsymbol{y},\beta_{ell})\hat{\pi}(\beta_{ell}|\boldsymbol{y}) \qquad (٦)$$

حاصل می‌شود، که در آن ℓ تعداد نقاط تولید شده از الگوریتم پسین تقریبی پارامترها می‌باشد. در عمل پیشگویی در موقعیت‌های $j = k + ۱, \cdots, n$ مد نظر می‌باشد.

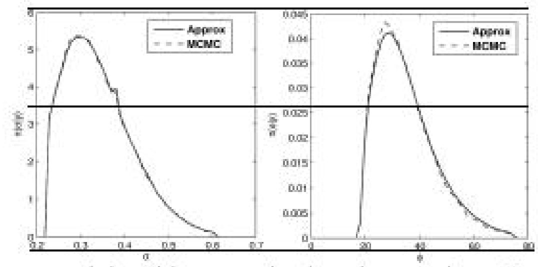
۵ بررسی داده‌های بارندگی استان سمنان

در این بخش مدل SGLM به داده‌های تعداد روزهای دارای بارندگی در استان سمنان برازش داده شده می‌شود و مورد تحلیل آماری قرار می‌گیرد. متغیر پاسخ تعداد روزهای دارای بارندگی است، که طی پنج ماه از اول آبان تا پایان اسفند ۱۳۹۱ در ۲۰ ایستگاه هواشناسی استان سمنان مشاهده شده‌اند. در شکل ۲ موقعیت بیست ایستگاهی که تعداد روزهای دارای بارندگی در آن‌ها ثبت شده است و موقعیت‌هایی که به منظور پیشگویی انتخاب شده‌اند بر روی نقشه استان سمنان مشخص شده است. فرض می‌شود متغیرهای پاسخ دوجمله‌ای



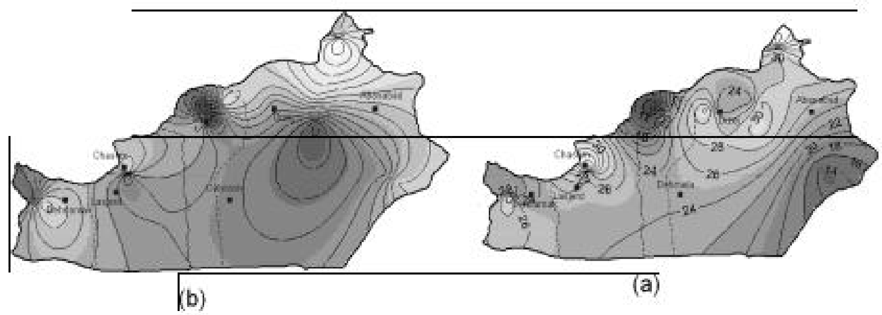
شکل ۲: نقشه سمنان، دایره موقعیت دارای مشاهده پاسخ و مربع موقعیت فاقد مشاهده پاسخ

شرطی مستقل هستند، به‌طوری‌که $\pi(y_i|x_i) = \exp\{y_i x_i - u_i \log(۱ + \exp(x_i))\}$ و متغیرهای پنهان x نیز دارای توزیع نرمال به فرم $N(\beta_۰, \Sigma_\theta)$ باشند. برای ساختار همبستگی فضایی تابع کواریانس نمایی همسانگرد در نظر گرفته شده است. برای پارامتر مقیاس σ، پیشین گامای معکوس با پارامترهای $IG(۵, ۰.۵)$، برای پارامتر همبستگی پیشین گاما با پارامترهای ۸ و ۵ منظور شده است. برای این مجموعه داده‌ها متغیر کمکی وجود ندارد



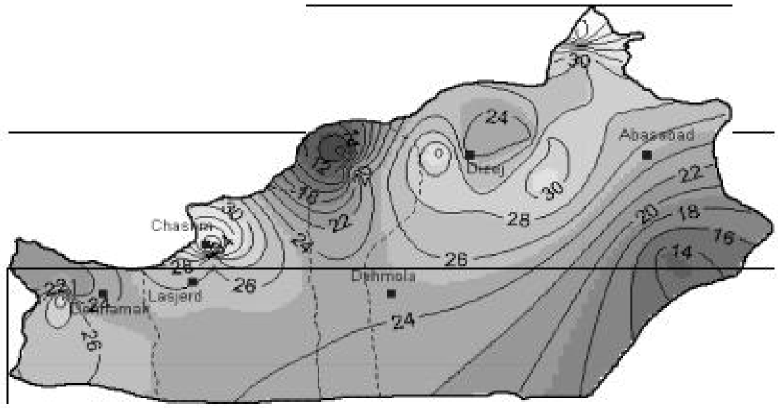
شکل ۳: نمودار توزیع‌های حاشیه‌ای پسین پارامترها با روش بیزی

و برای جمله ثابت β_0 پیشین نرمال با میانگین ۱ و واریانس ۵ در نظر گرفته شد که با توجه به رابطه (۲) این پارامتر از مدل خارج می‌شود. شکل ۳ نشان‌دهنده توزیع‌های پسین حاشیه‌ای پارامترها است که با ۵۰۰۰ تکرار، از روش‌های MCMC و به کار بردن الگوریتم متروپلیس هاستینگس و از روش بیز تقریبی با تولید ۴۶۲۲ نقطه از توزیع تقریبی پسین و الگوریتم توضیح داده شده حاصل شده‌اند. خط ممتد روش بیز تقریبی و خط چین مربوط به روش‌های MCMC هستند. می‌بینیم که دو روش بسیار شبیه به‌هم هستند. از میانگین نمونه‌های مونت کارلوی تولید شده برآورد بیزی پارامترها به صورت $(\hat{\sigma}, \hat{\varphi}) = (۰/۲۹, ۳۳/۵)$ به‌دست آمده‌اند. اکنون با جایگذاری برآوردهای بیزی پارامترها می‌توان در نقاط جدید پیشگویی انجام داد. شکل ۴ نقشه پیشگویی



شکل ۴: نقشه پیشگویی متغیرهای پنهان ، راست: به روش بیز تقریبی چپ: به روش بیز معمولی

متغیر پنهان به دو روش بیز معمولی و تقریبی به صورت لایه‌هایی در ۱۵ سطح، روی نقشه سمنان رسم شده است که نشان دهنده توزیع میزان بارندگی در این استان می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این دو نقشه نیز دارای نتایج یکسانی هستند. به طوری که از هر دو نقشه پیشگویی نتیجه می‌شود و بیشترین بارندگی در این استان در مناطق شمالی استان می‌باشد که به دلیل همسایگی با استان‌های شمالی است. پیشگویی تعداد روزهای دارای بارندگی در ٦ ایستگاه هواشناسی مورد نظر، لاسجرد، ده‌نمک، ده‌ملا، چاشم، دیزج و عباس‌آباد با روش بیز تقریبی نیز در نمودار ۵ مشخص شده است.



(a)

شکل ۵: نقشه پیشگویی متغیر پاسخ

بحث و نتیجه‌گیری

به دلیل ناگاوسی بودن متغیرهای پاسخ و وجود متغیرهای پنهان در مدل‌های SGLM، برآورد پارامترهای مدل و پیشگوییها با روش‌های معمول به راحتی به‌دست نمی‌آیند. در این مقاله ابتدا رهیافت بیز معمولی و الگوریتم‌های مونت کارلویی برای برآورد پارامترها و همچنین پیشگویی فضایی متغیرهای پنهان ارائه شد. به دلیل زمان‌بر بودن الگوریتم‌های مونت کارلویی در این مدل‌ها روش بیز تقریبی پیشنهاد شد و مشاهده گردید که نتایج هر دو روش بسیار مشابه هم هستند اما از نظر زمانی اختلاف بسیار زیادی دارند. به طوری که اجرای برنامه‌های مربوط به داده‌های سمنان با الگوریتم‌های مونت کارلو بیشتر از یک روز و بیز تقریبی کمتر از یک دقیقه زمان برده است. از ایرادات اصلی روش بیز تقریبی این است که با افزایش تعداد پارامترها از دقت نتایج نسبت به روش‌های بیز معمولی کاسته می‌شود و لذا به عنوان مطالعه آینده روش اصلاح شده تقریبی مد نظر می‌باشد.

مراجع

Breslow, N. E., and Clayton, D. G. (1993). Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 9-25.

Christensen, O. F., Moller, J., and Waagepetersen R. P. (2000). Analysis of Spatial Daya Using Generalized Linear Mixed Models and Langevin-Type Markov Chain Monte Carlo, *Research Report R-00-2009*, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University.

Christensen O. F., and Waagepetersen R. P. (2002). Bayesian Prediction of Spatial Count Data Using Generalized Linear Mixed Models, *Biometrics*, **58**, 280-286.

Christensen, O. F., Roberts, G. O., and Skold, M. (2006). Robust MCMC Methods for Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **15**, 1-17.

Diggle, P., Tawn, J. A. and Moyeed, R. A. (1998). Model-Based Geostatistic, *Journal of the Royal Statistical Society, Series C. Applied Statistics*, **47**, 299-350.

Eidsvik, J., Martino, S., and Rue, H. (2009). Approximate Bayesian Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Scandinavian Journal of Statistics*, **36**,1-22.