



روش عددی اختلاف محدود (Finite difference) برای معادلات Onsager's در حالت تقریبی برای جریان سیال در یک سانتریفیوژ گازی کوتاه

فرزین، آقابابایی^{۱*}، محمد، ره گشای^۲، امیر ندایی^۳

Farzin.babae2001@gmail.com

m.rahgoshay@gmail.com

چیکده

این مقاله به معادلات Onsager's، در حالت تقریبی با استفاده از مدل شبیه سازی برای جریان گاز UF_6 در داخل یک سانتریفیوژ کوتاه می باشد. اساس این کار بر پایه روش عددی تفاضل محدود با استفاده از کد برنامه نویسی Fortran معادلات دیفرانسیلی جزئی مرتبه ۶ ام را به ۴ معادله کوپل شده تبدیل کرده و آنها را به روش عددی فون نیومن، تکراری حل می نماییم. در این مقاله نوع شبکه بندی روتور از نوع متناوب (Stretched) بوده که ۸۰ نقاط گرهی در راستای شعاعی و ۱۶۰ نقاط گرهی در راستای محوری می باشد و همچنین در این مش بندی مبحث مهم Claustering در مناطق مختلف روتور رعایت شده است. در این مدل بر اساس چرخش جریان گاز با سرعت بسیار بالا (1440m / Sec) در داخل سانتریفیوژ کوتاه موجب ایجاد حالت Perturbation (به واسطه نیروی راسبی) شده و جریان سیال به حالت Solid body در می آید. اساس این مقاله به این صورت است که معادلات پیوستگی، مومنتم، انرژی و حالت در مختصات استوانه ای با استفاده از شرایط مرزی و فرضیات لازم معادلات تبدیل به ۴ معادله غیر خطی بیضوی، تابع جریان، حالت گردابی، انرژی و سرعت Azimuthal، گردیدند، که در نزدیکی دیواره روتور از روش ضمنی و در داخل استوانه از روش مهم مک کورمک، استفاده نموده ایم.

کلمات کلیدی: شبیه سازی، سانتریفیوژ کوتاه، روش فون نیومن، تجمع شبکه ای.

^۱ دانشجوی دکتری دانشگاه علوم تحقیقات تهران / ۰۹۱۴۴۹۱۱۹۹۰

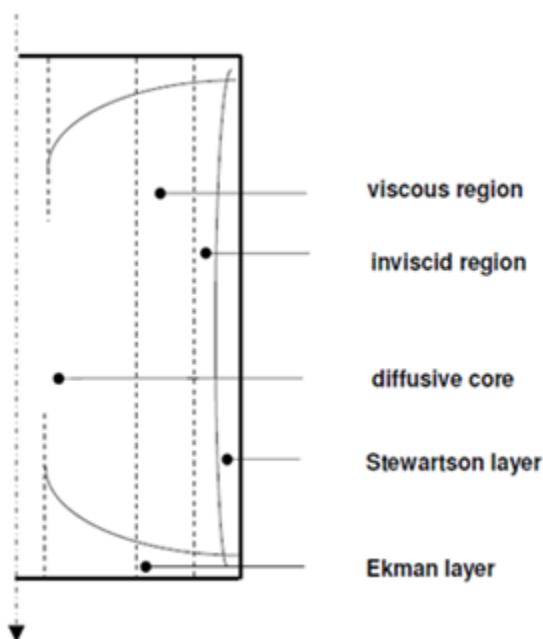
^۲ دانشیار دانشکده فنی مهندسی دانشگاه علوم تحقیقات تهران /

^۴ کارشناس عملیات شرکت خطوط لوله و مخابرات نفت ایران / ۰۹۱۴۴۹۱۷۱۱۶



۱- مقدمه

در داخل این سانتریفیوژ نواحی جریانهای زیر قرار دارند: ناحیه جریان رقیق شده، ناحیه انتقال و ناحیه با گرادیان دانسیته بالا. جریان با سرعت مافوق صوت می چرخد و تکانههای موجی ایجاد می کند هرچند چرخش جریان با سرعت مادون صوت در حالت مختصات محوری می باشد. تجزیه و تحلیل این نوع حالات در چرخش گاز در داخل روتور بسیار سخت بوده ولی با این حال سعی ما بر این بوده تا بتوانیم این مشکل را مرتفع کنیم. جریان سیال غیر قابل تراکم با گرادیان فشار بالا و اینکه بیشتر سیال (گاز) در نواحی بسته (کلاهک های بالا و پایین) و دیواره روتور قرار دارد و گاز متناسب با سرعت Azimuthal با فاصله اندک از دیواره روتور چرخش می کند (بدون لغزش). مدل عددی بکار رفته براساس مجموعه ای از معادلات گسسته سازی بر طبق معادلات اصلی، توصیف معادله ممنتوم، جرم، انرژی و چرخش گاز ایده آل با سرعت بسیار بالا در داخل سانتریفیوژ کوتاه می باشد. نواحی جریان در یک سانتریفیوژ کوتاه:



شکل ۱- ناحیه جریان ولایه های مرزی در یک سانتریفیوژ گازی [1]

۲- لایه Stewartson :

در هنگام چرخش سیلندر، لایه های مرزی در امتداد دیواره ثابت باقی می مانند که این تجزیه و تحلیل لایه استوار سون بیشتر توسط matsuda انجام پذیرفت. matsuda نشان داد که دو لایه داخلی گسترش می یابند که ضخامتشان

توسط Lm, Em ارتفاع و شعاع سانتریفیوژ در حالت کوتاه می باشند) است ضخامت واقعی لایه استوار سون بسیار نازک بوده و معمولاً از 0.8 میلی متر بیشتر نمی شود البته بستگی به پارامترهای سانتریفیوژ دارد زمانی که گرادیان درجه حرارت بر روی دیواره سیلندر برابر 2 است ($\nabla\theta = 2$) یک جریان نسبتاً قوی در لایه داخلی استوار سون ایجاد می شود. Brouwers و



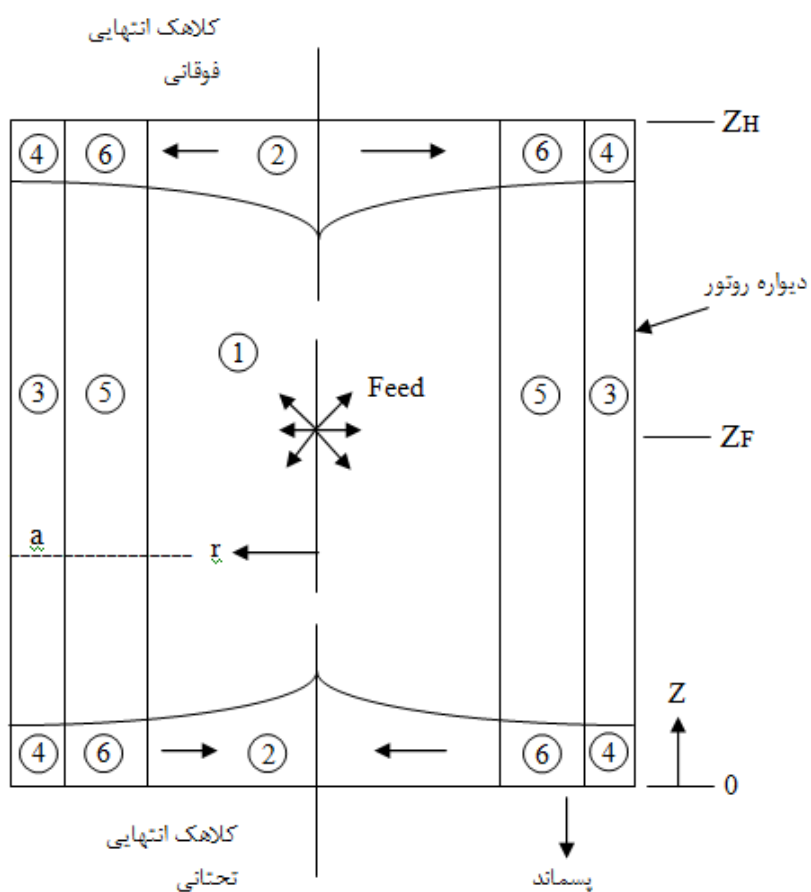
Stewartson نشان دادند که ضخامت لایه استوار سون در نزدیکی دیواره تا حدودی ضخیم تر نسبت به مدل تحلیلی است بر این اساس Brouwers نشان داد که تابع جریان در این لایه استوار سون^۴ از رابطه زیر

$$\psi = \frac{1}{4}(LE)^{\frac{1}{3}}e^{-x} / \left(1 + \frac{1}{4}Br\right) \quad \text{بدست می آید [2].} \quad (1)$$

و هم چنین ضخامت لایه استوار سون از رابطه ،

$$x_s = A(LE)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

x_s فاکتور اندازه گیری برای این لایه مرزی ، می باشد.



شکل ۲- ناحیه جریان ولایه های مرزی در یک سانتریفیوژ کوتاه [3]

¹. Stewartson layers



- ۱- هسته درونی ۲- لایه اکمن ($B^{\frac{1}{2}}$) ۳- لایه استوارسون ($B^{\frac{1}{3}}$) ۴- بسط اکمن $B^{\frac{1}{3}} \times B^{\frac{1}{2}}$ ۵- لایه استوارسون ($B^{\frac{1}{4}}$) ۶- بسط اکمن ($B^{\frac{1}{4}} \times B^{\frac{1}{2}}$)
همچنین نواحی جریان در شکل (۱) نشان داده شده است.

۳- لایه Ekman :

لایه اکمن یک لایه مرزی در امتداد کلاhek ها است قسمتی از لایه بالایی، گاز را به سمت گوشه کلاhek ها و دیواره سیلندر هدایت می کند و قسمتی از لایه پائینی، گاز را از گوشه دیواره سیلندر و کلاhek پائینی به سمت محفظه اصلی هدایت می کند بر طبق تجزیه و تحلیل بیشتر توسط Brouwers معلوم شد ضخامت لایه اکمن در یک سیال تراکم پذیر برابر $Lm^{-1}(Em^x)^{\frac{1}{2}}$ است که انتقال حرارت در هر دو کلاhek ها به شدت به لایه اکمن تاثیر می گذارد در نزدیکی گوشه دیواره سیلندر و کلاhek ها، لایه اکمن می تواند به چند ردیف نازک تر از لایه استوارسون تبدیل شود. می توان گفت که بیشتر، درون لایه اکمن گسترش می یابد و به هسته مرکزی می پیوندد این اتفاق در $e^x > \frac{1}{Em}$ می باشد که در ضخامت لایه اکمن برابر می شود با:

$$\delta \approx \frac{1}{Lm} \quad (3)$$

تولید لایه اکمن از طریق مکش یا پمپاژ است که این مکش یا پمپاژ از ۳ طریق است :

- ۱- اختلاف درجه حرارت در میان دو تا کلاhek بالا و پائین.
- ۲- اختلاف سرعت زاویه ای در میان دو تا کلاhek بالا و پائین.
- ۳- تزریق کردن یا خروج گاز از کلاhek ها.

۴- مشخصات گاز UF6 و نوع سانتریفیوژ کوتاه:

$$M = 352 \frac{kg}{kmol} \quad \mu = 1.86 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot sec} \quad \lambda = 6.358 \times 10^{-3} \frac{W}{m \cdot K} \quad (4)$$

$$A = 16.990 \quad Br = 2.7502 \quad E = 5.1302 \times 10^{-6} \quad \varepsilon = 0.06$$

$$F = 11.833 \times 10^{-6} \frac{KgUF6}{sec} \quad W = 5.9165 \times 10^{-6} \frac{KgUF6}{sec}$$

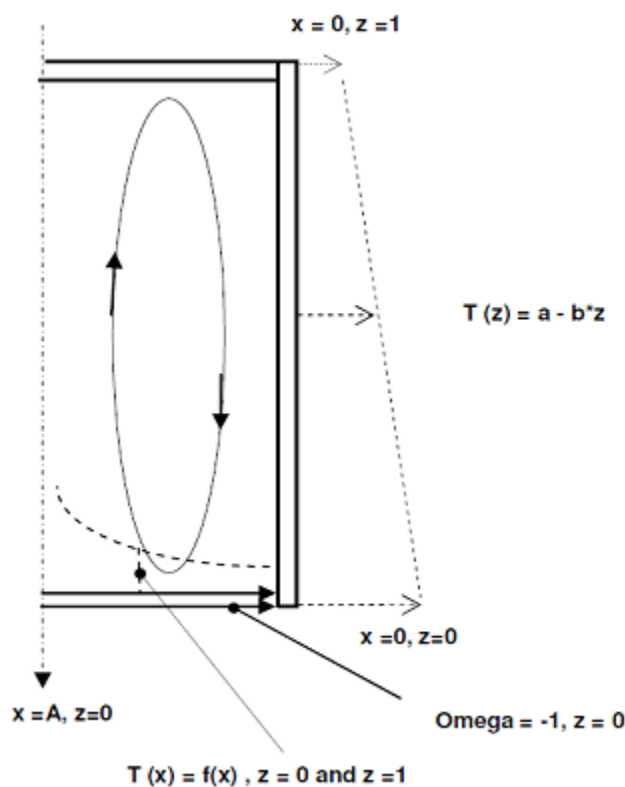
$$l = 78cm \quad V_w = V_a = 1440 \frac{m}{sec} \quad a = 10cm$$

F = مقدار فید وارده به سانتریفیوژ ، W = مقدار زباله خروجی از سانتریفیوژ ، l = ارتفاع سانتریفیوژ کوتاه ،
 a = شعاع سانتریفیوژ کوتاه ، ε = عدد راسبی



۵- شرایط مرزی و گسسته سازی معادلات مدل شده در سانتریفیوژ کوتاه:

مدل استفاده شده، سانتریفیوژ یک استوانه دوار با کلاهک های بالا و پائین است. مدل نهایی مجموعه ای از ۴ جفت معادله غیر خطی از معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی^۵ از نوع بیضوی^۶ است که در این فصل شرایط مرزی را برای این معادلات بیان می کنیم در این شکل، شماتیکی از مدل شرایط مرزی نشان داده شده است.



شکل ۳- مدل شماتیک سانتریفیوژ کوتاه، شامل نواحی و مناطق مرزی [3]

شرایط مرزی معادله انرژی (وابسته به درجه حرارت):

معادله انرژی بر اساس خطی سازی داریم:

$$\frac{Br}{L} \frac{\partial \psi}{\partial z} = E \left[4A^2 \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x/A) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

در مختصات شعاعی در طول امتداد خط مرکزی (Center line) در داخل سیلندر این شرایط را نتیجه می دهد.

¹. Partial ². Elliptic



$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x = A \quad (6)$$

از آن جا که درجه حرارت بیشتر بر روی کلاهک ها تاثیر مستقیم گذاشته بنابراین با اعمال این شرط مرزی خواهیم داشت که:

$$\lambda_w \delta_w \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z} \Big|_{end\ cap} + h_s (T - T_s) \quad (7)$$

که λ_g, λ_w به ترتیب ضریب انتقال حرارت هدایتی مواد دیواره و گاز هستند. T_s ($W/m.k^\circ$) درجه حرارت محیط و δ_w ضخامت دیواره و h_s ضریب انتقال حرارت تشعشی می باشد. مدل حرارتی از طریق کویل شدن ضریب انتقال حرارت تشعشی (h_s) به همراه شرایط حرارتی در خارج از سیلندر دوار است. در حالت تغییرات بدون بعد، معادله ۱۴-۳ را می توان نوشت:

$$4A^2 \frac{\lambda_w \delta_w}{\lambda_g a} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x/A) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = -\frac{1}{L} \frac{\partial \theta_g}{\partial z} \Big|_{end\ cap} + \frac{h_s a}{\lambda_g} (\theta - \theta_s) \quad (8)$$

که با استفاده از این رابطه میزان درجه حرارت را مدل سازی خواهیم کرد. شرایط مرزی سرعت زاویه ای:

از طرفی با توجه به جریان گاز با دور بسیار بالا در درون سانتریفیوژ رابطه سرعت زاویه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$-\frac{2}{(1-x/A)L} \frac{\partial \psi}{\partial z} = E \left[4A^2 \frac{\partial^2 (1-x/A)\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] \quad (9)$$

شرایط مرزی برای سرعت زاویه ای در امتداد دیواره چرخش و کلاهک بالایی، برابر است با:

$$\omega = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x = 0 \quad (10)$$

- در کلاهک بالا:

$$\omega = 0, \quad 0 < x < A, \quad z = 1 \quad (11)$$

در حالت مختصات شعاعی و در امتداد خط مرکزی، سرعت زاویه ای برابر است با:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x = A \quad (12)$$



۶- مش بندی متناوب (Staggered) :

گسسته سازی معادلات در این بخش مورد بحث قرار خواهند گرفت. قبل از این کار، به مش بندی که یکی از مهمترین مباحث برنامه نویسی است می پردازیم. هنگامی که از ۴ معادله غیر خطی بیضوی کوپل شده، عمل گسسته سازی انجام می گیرد، نتیجه آن ۴ معادله کوپل شده جبری است.

با انتخاب یک مش مناسب، و همچنین اعمال کردن مبحث تجمع شبکه در نزدیک دیواره ها و بالا و پایین روتور، با ایجاد تعداد نقاط شبکه بیشتر در مش بندی، در نهایت معادلات ما جوابهای دقیقتری خواهند داشت و به واقعیت جریان گاز درون روتور نزدیکتر خواهیم شد.

مزیت دوم در روش مش بندی این است که گسسته سازی باعث می شود که معادلات تبدیل به مشتقات از مرتبه اول شود.

نوع شبیه سازی مش بندی این روتور به صورت، ۱۶۰ نقاط شبکه در راستای محوری ۸۰ نقاط شبکه در راستای شعاعی است.

با توجه به شکل (۴)، ψ, ζ را به صورت مش بندی i, j ، و ω را به صورت مش بندی $i, j + \frac{1}{2}$ ، و θ را بصورت $i, j - \frac{1}{2}$

گسسته سازی می کنیم. پس داریم روش زیر را که:

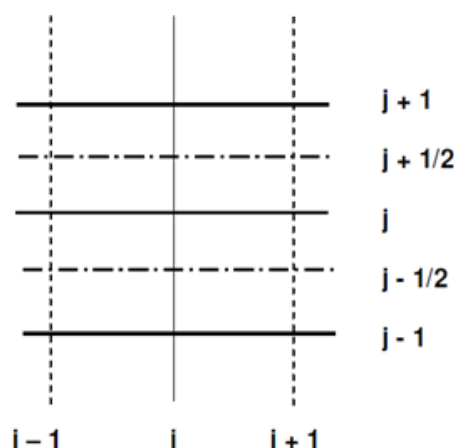
۱- گسسته سازی ψ, ζ در مش بندی i, j

۲- گسسته سازی ω را توسط مش بندی نیمه بالای درفاصله محوری $i, j + \frac{1}{2}$

۳- گسسته سازی θ را توسط مش بندی نیمه پایین در فاصله محوری $i, j - \frac{1}{2}$

استدلال این انتخاب براساس این است که مشتقات اول در سمت چپ ۴ معادلات بیضوی در ماتریس حاصل می شوند.

علاوه بر اینها در هر مکان نقطه شبکه مش بندی، نتیجه ماتریس برای تک تک $\psi, \omega, \zeta, \theta$ حاصل می شود که این عمل در تجمع شبکه در دیواره ها و نزدیک کلاهدک ها بسیار دشوار است. در این مدل، موقعیت مش برای ψ, ζ در کل دامنه در جهات محوری و شعاعی برحسب نقاط شبکه i, j می باشد که این دامنه در کلاهدک های بالا و پایین و دیواره سیلندر و موقعیت خط مرکزی (center line) می باشد ولی موقعیت مش برای ω, θ در نیمی از شبکه های محوری صورت گرفته است.



شکل ۴- Staggered mesh (نوع مش بندی متناوب استفاده شده در این پروژه) [4]



۷- معادلات حاکم بر جریان سیال دینامیکی:

در این قسمت به تحلیل و تجزیه مدل‌های ریاضی بدست آمده می پردازیم. معادلات بقا جرم، مومنتم، انرژی و معادله حالت گاز ایده آل را بر اساس شرایط مرزی و با اعمال روش گسسته سازی و مشتق گیری از معادلات حاکم بر Onsager، خواهیم داشت:

$$v_r = 0, v_z = 0, v_\theta = \Omega r, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_w}, T^* = \frac{T}{T_o}, \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_o = \rho_o g \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_o = \rho_o \Omega^2 r = \frac{P_o}{RT_o} \Omega^2 r, V_w = \Omega a, L = \frac{l}{a}, \text{Re} = \frac{\rho_w a V_w}{\mu}$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{KM}, A^2 = \frac{M \Omega^2 a^2}{2RT_o}, \xi = A^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \eta = \frac{z}{Z}, \varepsilon = \frac{\mu}{\rho_w \Omega a^2}$$

معادله بقا جرم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_o V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_o u) = 0 \quad (14)$$

معادله مومنتم محوری:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (15)$$

معادله مومنتم شعاعی:

$$-\rho r \Omega^2 - 2\rho_o \Omega w = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \right] + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} \quad (16)$$

معادله مومنتم زاویه ای:

$$2\rho_o \Omega V = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (17)$$

معادله بقای انرژی:

$$\frac{Br}{L} \frac{\partial \psi}{\partial z} = E \left[4A^2 \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x/A) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (18)$$

که:

r = شعاع ، ρ = دانسیته ، P = فشار ، θ = درجه حرارت بدون بعد ، M = جرم مولکولی گاز ،
 A = پارامتر سرعت ، V_w = سرعت دیواره ، ρ_w = دانسیته دیواره ، a = شعاع سیلندر ، P_w = فشار دیواره



Ω = سرعت زاویه ای در چرخش سیلندر ، L = نسبت طول بدون بعد ، ε = عدد راسبی ، Br = عدد برینکمن
 Re = عدد رینولدز ، Ω = سرعت زاویه ای ، Pr = عدد پرانتل ، E = عدد اکمن ، Pr = عدد پرانتل ، μ = لزجت
 دینامیکی گاز ، u_r, u_θ, u_z = سرعتهای گاز در جهات شعاعی و محوری و زاویه ای ، θ = درجه حرارت ، ω =
 سرعت زاویه ای ، x = مختصات شعاعی بدون بعد $x = A(1-r^2)$

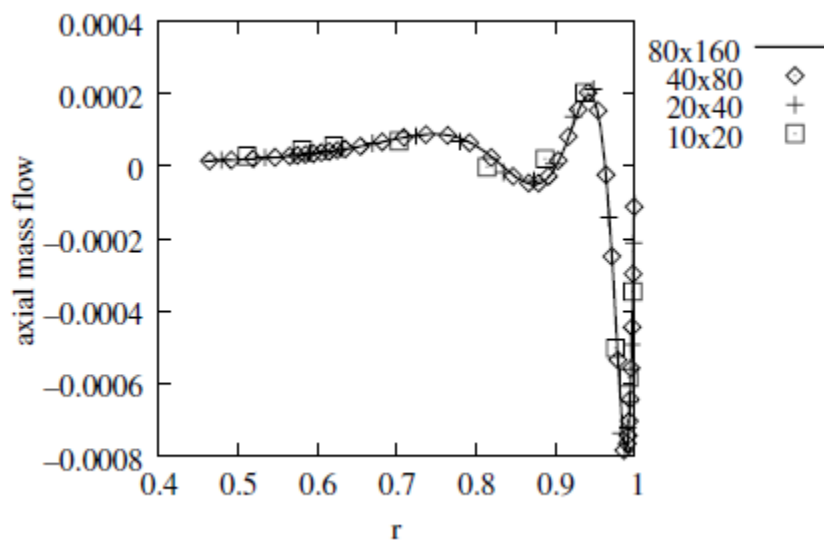
۸- نتیجه گیری و همگرایی عددی :

نتایج این بررسی ها در گراف های ذیل مشاهده میگردد. لایه های مرزی تشکیل شده اعم از لایه استوارتسون، لایه اکمن، و نواحی جریان
 Viscous و Inviscid نازک بوده و در مقایسه با سانتریفیوژ بلند دارای ضخامت نسبتا بیشتر می باشند که در این مقاله ما توانستیم این
 نواحی از گاز را توسط نرم افزار فلونت شبیه سازی نماییم. از دقت کار در این پروژه ، از بین بردن خطاها در گوشه های سانتریفیوژ می
 باشد. شناخت تئوری جداسازی بر اساس فرآیند گریز از مرکز بدون شک پیشرفت حاصله در تحلیل جریان را به اندازه یک گام مهم، پیش
 برده است. نتایج در مورد تحلیل حوزه جریان ، بیانگر این است که پارامترهای تشابه در موارد جاری از لحاظ محوری متغیر می باشند. روش
 انتگرال گیری و استفاده از بسط فون نیومن در معادلات حوزه جریان ، جهت بسط آن به این حالت کلی، اصلاح گردیده و معادلات دقیق تری
 بوجود آمده است. با توجه به استفاده از مصالح مدرن، سرعت چرخشی گاز در داخل استوانه افزایش می یابد که این عمل تاثیر خوبی بر
 عملکرد جداسازی دارد در این پایان نامه سرعت روی دیواره گاز برابر $\frac{m}{sec} 1440$ گرفته شده است. که با استفاده از تکنیک های عددی و
 استفاده از نرم افزار برنامه نویسی می توان یک استوانه دوار سریع را شبیه سازی کرد که در این شبیه سازی، سرعت، فشار دیواره، دما و ابعاد
 استوانه و متریکال استفاده شده نقش بسیار مهمی در تغییر بازده ظرفیت جداسازی و فاکتور جداسازی را دارند.

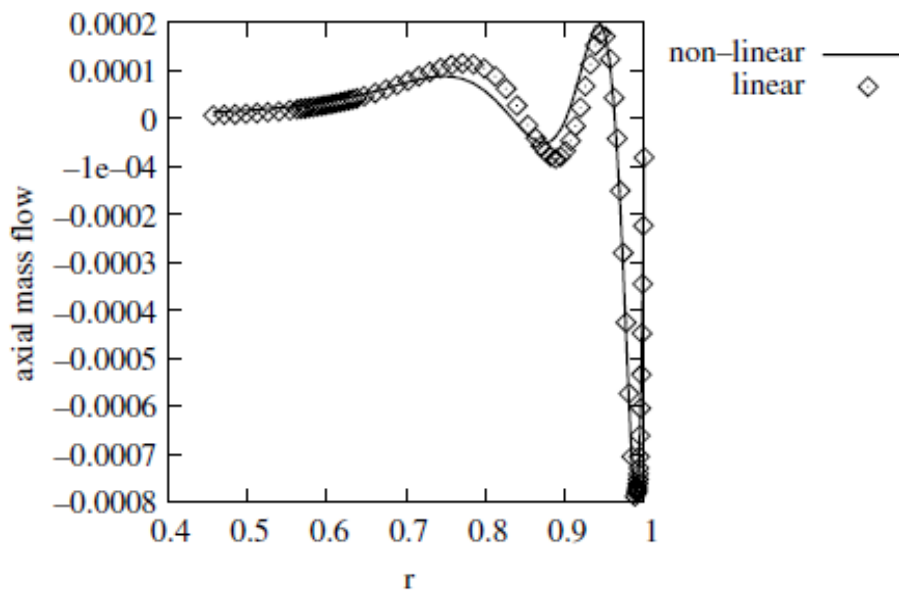
۹- نتیجه گیری:

جدول ۱- پارامترهای تعیین شده برای سانتریفیوژ کوتاه

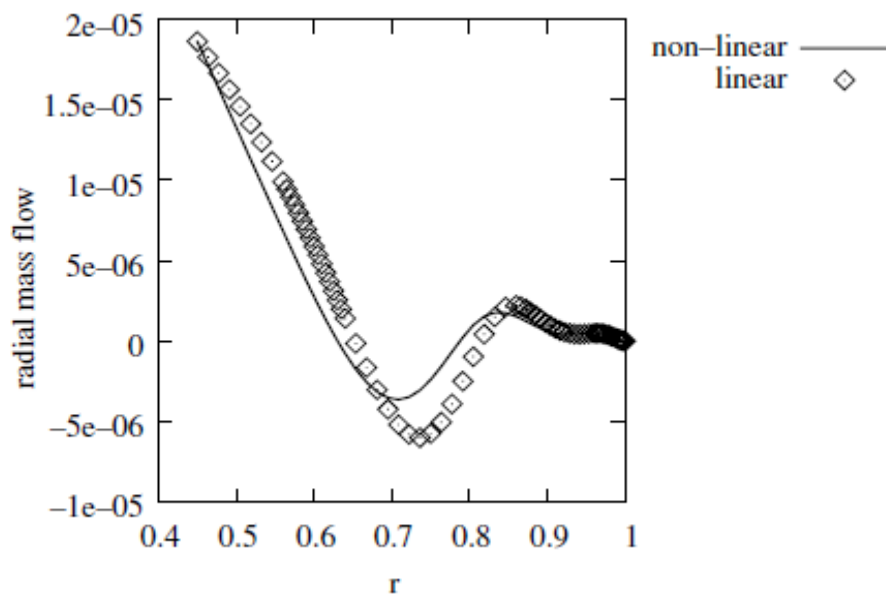
Grid point Axial	Grid point Radial	E_F $x_{ci} = 4$	E_F $x_{ci} = 6.5$	A	E	Br	L
140	60	2.36×10^{-4}	6.320×10^{-4}	16.990	5.1302×10^{-6}	9.325	7.8
140	70	6.58×10^{-4}	9.857×10^{-4}	16.990	5.1302×10^{-6}	9.325	7.8
160	70	9.86×10^{-4}	1.325×10^{-3}	16.990	5.1302×10^{-6}	9.325	7.8
160	80	3.250×10^{-3}	5.657×10^{-3}	16.990	5.1302×10^{-6}	9.325	7.8



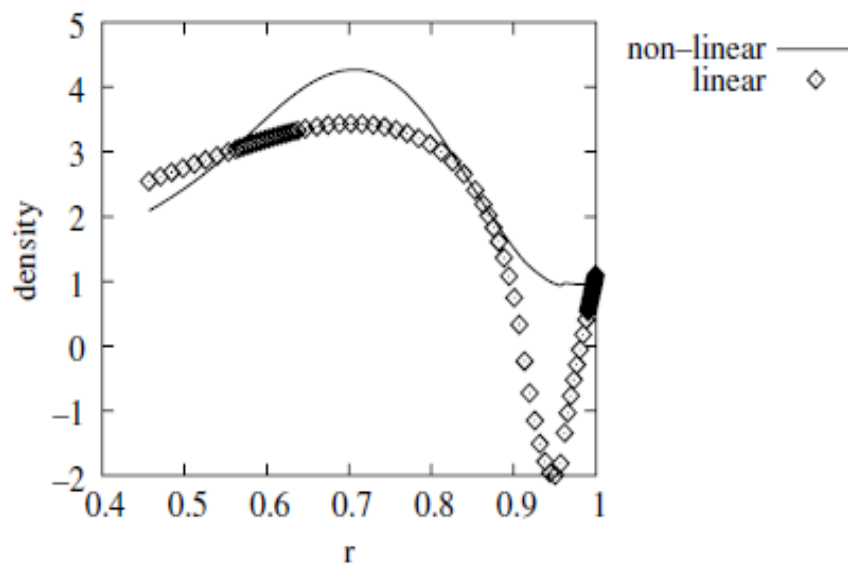
شکل ۱- جریان جرمی محوری در نیمی از ارتفاع سانتریفیوژ بر اساس مش بندی های متناوب جدول (۱)

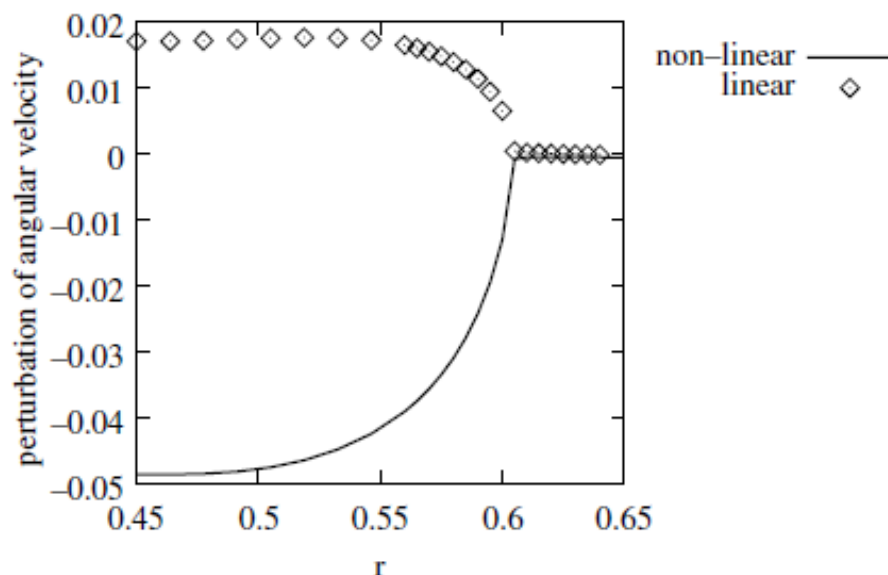


شکل ۲- مقایسه جریان جرمی محوری در نیمی از ارتفاع سانتریفیوژ در حالت خطی و غیر خطی

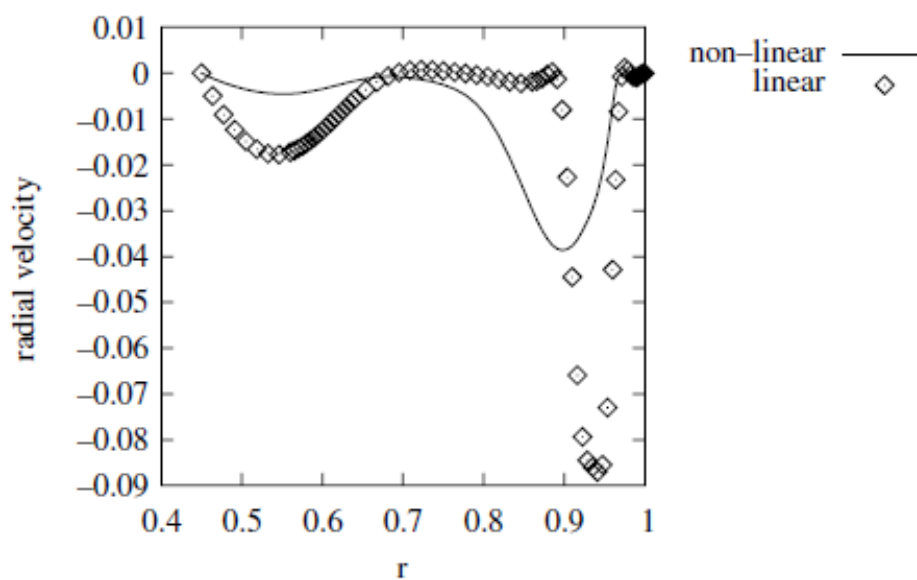


شکل ۳- مقایسه جریان جرمی شعاعی در نیمی از ارتفاع سانتریفیوژ در حالت خطی و غیر خطی


 شکل ۴- مقایسه دانسیته گاز (ρ) ، در حالت خطی و غیر خطی ، برای گاز در حالت Rigid body، در کل ارتفاع سانتریفیوژ



شکل ۵- مقایسه حالت آشفته‌گی جریان گاز UF₆، در حالت خطی و غیر خطی، در نزدیکی اسکوب خروجی



شکل ۶- مقایسه سرعت شعاعی در کل ارتفاع سانتریفیوژ در حالت خطی و غیر خطی

مراجع:

1. Makihara ,H.& Ito,T.1988 separation characteristics of gas centrifuge J.Nuclear.sci.Tech.25,649-80
- 2.Villani.Stelio, 1976,Topics in applied .volume 35,spinger verlag Berlin Heidelberg Newyork
- 3.Cohen ,K.1951 The theory of isotope separation as a applied in lerge Scale Production of U235 .Mc Graw-Hill
4. Ying ,C.Guo,Z; wood,H,G 1966 solution of the diffusion equation in a gas centrifuge for separation of multi component mixture separation science and Techn.31,2455-2471
5. Wood ,H.G & Morton,J.P.1980 onsager,s pancake approximation for the Fluid dynamics of a gas centrifuge J.Fluid.Mech.101,11-135
6. Allen, G. C., I. S. Butler, et al. (2009). "Characterization of UF6, by Micro-Raman Spectroscopy." J. Nucl. Mat. 144(1-2): 17-19.
7. Poulesquen, A., L. Desgranges, et al. (2007). "An improved model to evaluate the oxidation kinetics of UF6, during dry storage." J. Nucl. Mat. 362: 402-10.
8. McEachern, R. J. (1997). "A review of kinetic data on the rate of U3O7 formation on UO2." J. Nucl. Mat. 245(2-3): 238-S47.
9. Walz A, Volosciuk K, Schu" tz H. Numerical investigations of the flowfield near a model of a scoop using the vortex transport equations. In:Wood HG, editor. Proceedings of the 5th workshop on gases instrong rotation, University of Virginia, School of engineering andapplied science, Charlottesville, Virginia, USA; 2010. p. 425–57.
10. Cuvelier C, Segal A, Van Steenhoven AA. Finite element methodsand Navier Stokes equations. Dordrecht, The Netherlands: ReidelPublishing Company; 1986.